

CAPITOLUL 4

COMANDA OPTIMALĂ DISCRETĂ ȘI CONTROLUL OPTIMAL NELINIAR AL APARATELOR DE ZBOR

4.1. ESTIMAREA PARAMETRICĂ ON-LINE ȘI COMANDA OPTIMALĂ DISCRETĂ A APARATELOR DE ZBOR

Pornind de la descrierea discretă a mișcării aparatelor de zbor (modelul intrare-ieșire, respectiv, modelul intrare-stare-ieșire), se construiește un nou algoritm de estimare (identificare) parametrică on-line și comandă (conducere) optimală discretă.

Sistemul condus (mișcarea aparatului de zbor) A poate fi descris de ecuațiile intrare-ieșire și stare-ieșire [1]

$$\begin{aligned}x(k+1) &= A_d x(k) + B_d u(k), \\y(k) &= C_d x(k) + D_d u(k),\end{aligned}\tag{4.1}$$

cu

$$A_d \cong I + AT, B_d \cong BT, C_d = C, D_d = D,\tag{4.2}$$

iar modelul estimat \hat{A} al lui A este descris de ecuațiile similare

$$\hat{x}(k+1) = \hat{A}_d \hat{x}(k) + \hat{B}_d u(k),\tag{4.3}$$

$$\hat{y}(k) = \hat{C}_d \hat{x}(k);\tag{4.4}$$

x și \hat{x} au dimensiunea $(n \times 1)$, $u(m \times 1)$, y și $\hat{y}(p \times 1)$, A_d și $\hat{A}_d(n \times n)$, B_d și $\hat{B}_d(n \times n)$,

$$C_d = \hat{C}_d (p \times n).$$

O altă descriere a sistemului A este [1]

$$y(k) + \sum_{i=1}^n a_i \cdot y(k-i) = \sum_{j=q}^m b_j \cdot u(k-j) + v(k) \quad (4.5)$$

sau

$$L(z^{-1})y(t) = z^{-q}M(z^{-1})u(t) + v(t) + d, \quad (4.6)$$

unde

$$\begin{aligned} L(z^{-1}) &= 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}, \\ M(z^{-1}) &= b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

cu a_i – matrice ($p \times p$) și b_j – matrice ($p \times m$); $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, $q = 0$, $b_0 = 0$ și ecuația (2.65) este echivalentă cu ecuația $y(k) = z^T(k)b(k-1) + e(k)$, cu vectorul de regresie z de forma [1]

$$z^T(k) = [y(k-1) \quad y(k-2) \quad \dots \quad y(k-n) \quad u(k-1) \quad u(k-2) \quad \dots \quad u(k-m)] \quad (4.8)$$

și vectorul parametrilor b de forma $b = [-a_1 \quad -a_2 \quad \dots \quad -a_n \quad b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_m]$, iar modelul estimat este descris de ecuația

$$\hat{y}(k+1) = \hat{z}^T(k+1)\hat{b}(k) + \hat{e}(k+1) \quad (4.9)$$

sau de ecuația

$$\hat{y}(k+1) = \hat{b}^T(k)\hat{z}(k+1) + \hat{e}(k+1), \quad (4.10)$$

unde vectorul de regresie \hat{z} și vectorul parametrilor $\hat{b}(k)$ se exprimă astfel [1]:

$$z^T(k+1) = [\hat{Y}^T(k) \quad u(k) \quad U^T(k)], \quad (4.11)$$

cu

$$\begin{aligned}\hat{Y}^T &= [\hat{y}(k) \quad \hat{y}(k-1) \quad \cdots \quad \hat{y}(k-n+1)], \\ U^T(k) &= [u(k-1) \quad u(k-2) \quad \cdots \quad u(k-m+1)],\end{aligned}\tag{4.12}$$

$\hat{Y}(np \times 1), U[(m-1)m \times 1]$ și

$$\hat{b}^T(k) = [\hat{\alpha}^T(k) \quad \hat{b}_1(k) \quad \hat{\beta}^T(k)],\tag{4.13}$$

cu [1]

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}^T(k) &= [-\hat{a}_1(k) \quad -\hat{a}_2(k) \quad \cdots \quad -\hat{a}_n(k)], \\ \hat{\beta}^T(k) &= [\hat{b}_2(k) \quad \hat{b}_3(k) \quad \cdots \quad \hat{b}_m(k)],\end{aligned}\tag{4.14}$$

$\hat{\alpha}(np \times p), \hat{b}_1(p \times m), \hat{\beta}[(m-1)p \times m]$. Dacă $m = p$, atunci ecuația (4.10) devine [1]

$$\hat{y}(k+1) = \hat{\alpha}^T(k)\hat{Y}(k) + \hat{b}_1(k)u(k) + \hat{\beta}^T(k)U(k).\tag{4.15}$$

Dacă $m \neq p$, matricea $\hat{\beta}^T(k)$ nu poate fi înmulțită cu vectorul $U(k)$ datorită dimensiunilor lor [1].

De aceea, în ecuația (4.15) ultimul termen se va exprima pentru fiecare caz concret (în funcție de valorile lui m și p). Astfel, în cazul mișcării longitudinale a aparatului de zbor ($n=4, m=1$), $\forall p$, ecuația (4.15) devine [1]

$$\hat{y}(k+1) = \hat{\alpha}^T(k)\hat{Y}(k) + \hat{b}_1(k)u(k),\tag{4.16}$$

unde

$$\begin{aligned}\hat{Y}^T(k) &= [\hat{y}(k) \quad \hat{y}(k-1) \quad \hat{y}(k-2) \quad \hat{y}(k-3)], \\ \hat{\alpha}^T &= [-\hat{a}_1(k) \quad -\hat{a}_2(k) \quad -\hat{a}_3(k) \quad -\hat{a}_4(k)],\end{aligned}\tag{4.17}$$

\hat{b}_1 este vector $(p \times 1)$, \hat{y} – vector $(p \times 1)$ și $u(k)$ de dimensiuni (1×1) .

În cazul mișcării laterale ($n=4, m=2$), $\forall p$, ecuația (4.15) devine [1]

$$\hat{y}(k+1) = \hat{\alpha}^T(k)\hat{Y}(k) + \hat{b}_1(k)u(k) + \hat{b}_1(k)U(k-1),\tag{4.18}$$

cu Y și $\hat{\alpha}$ de formele (4.17); \hat{b}_1 și \hat{b}_2 sunt vectori $(p \times 2)$, y – vector $(p \times 1)$ și u – vector (2×1) .

Pentru proiectarea legii de comandă $u(k)$ în timp real, se poate alege indicatorul de performanță [1]

$$J = [\bar{y}(k+1) - \hat{y}(k+1)]^T Q [\bar{y}(k+1) - \hat{y}(k+1)] + u^T(k) R u(k), \quad (4.19)$$

unde $\bar{y}(k+1)$ este vectorul de ieșire impus, iar $Q(p \times p)$, $R(m \times m)$ – matrice simetrice, pozitiv definite, R – matrice nesingulară; $y(k+1)$ este de forma (4.16) sau (4.18). Din

condiția de optim $\left(\frac{\partial J}{\partial u(k)} = 0 \right)$, se obține comanda optimală [1]

$$u(k) = G [\bar{y}(k+1) - \hat{\alpha}^T(k) \hat{Y}(k)] \quad (4.20)$$

pentru $m=1$ (**mișcarea longitudinală**), respectiv

$$u(k) = G [\bar{y}(k+1) - \hat{\alpha}^T(k) \hat{Y}(k) - \hat{b}_2(k) u(k-1)] \quad (4.21)$$

pentru $m=2$ (**mișcarea laterală**), cu [1]

$$G = [R + \hat{b}_1^T(k) Q \hat{b}_1(k)]^{-1} \hat{b}_1^T(k) Q. \quad (4.22)$$

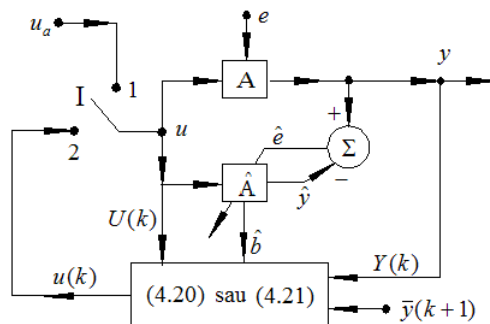


Fig. 4.1. Structura sistemului de estimare parametrică și comandă optimală discretă a A

Structura sistemului de estimare parametrică și comandă optimală discretă este

prezentată în fig. 4.1. Conform ecuațiilor de mai sus și a structurii din fig. 4.1, a rezultat **algoritmul ALGLDR** prezentat mai jos [1], [2].

Pasul 1: se face identificarea (estimarea parametrică) off – line folosind, de exemplu, CMMP (metoda celor mai mici pătrate), rezultând astfel vectorul parametrilor $\hat{b}_0 = \hat{b}(0)$, adică coeficienții $\hat{b}_j, j = \overline{1, r}, \hat{a}_i, i = \overline{1, n}$ ai funcțiilor de transfer discrete ale modelului estimat \hat{A} (în fig. 4.1 I este pe poziția 1, e – perturbația și $u = u_a$ – intrarea de tip aleator); se calculează $\hat{y}(t)$ și se memorează vectorii $\hat{Y}_0 = \hat{Y}(0)$ și $U_0 = U(0)$ cu componentele (4.12) și matricea de covarianță P_0 obținută la finalul identificării ($P_0 = P(0)$); folosind coeficienții funcțiilor de transfer discrete ale sistemului condus A și ale modelului său \hat{A} , se calculează matricele A_d, B_d și \hat{A}_d, \hat{B}_d și, cu acestea, se calculează vectorii de stare x și \hat{x} folosind ecuația (4.1) și ecuația (4.3); se memorează acești vectori la finalul identificării (x_0, \hat{x}_0);

Pasul 2: pentru simularea variației în timp a parametrilor sistemului condus A , se modifică coeficienții funcțiilor sale de transfer discrete (de exemplu, cu 5%) și cu noii coeficienți se recalculează matricele A_d, B_d ;

Pasul 3: se trece I pe poziția 2 (conducere on-line); se calculează Q' și R cu algoritmul ALGLX, în funcție de matricele \hat{A}_d, \hat{B}_d , apoi se calculează matricea $Q = (C^T)^+ Q' C^+$;

Pasul 4: se calculează matricea (4.22), cu \hat{b}_1 extras din $\hat{b}(k)$;

Pasul 5: se calculează comanda $u(k)$ cu (4.14) pentru mișcarea longitudinală sau cu (4.21) pentru mișcarea laterală, folosind $\hat{Y}(k)$ și $\hat{a}(k)$ cu elementele (4.17), $\hat{b}_2(k)$ extras din $\hat{b}(k)$ și componenta $u(k-1)$ a lui $U(k)$;

Pasul 6: se calculează $x(k+1)$ cu (4.1), $\hat{x}(k+1)$ cu (4.3), $y(k+1)$ se măsoară sau se calculează cu formula $y(k+1) = C_d x(k+1)$, iar $\hat{y}(k+1)$ se calculează cu formula $\hat{y}(k+1) = \hat{C}_d \hat{x}(k+1)$; se memorează vectorul $\hat{Y}(k+1)$ și vectorul $U(k+1)$ și se calcu-

lează abaterea [1]

$$\hat{e}(k+1) = y(k+1) - \hat{y}(k+1);$$

Pasul 7: se calculează matricea de covarianță cu formula din algoritmul CMMP

$$P(k+1) = P(k) \left[I_{m+n} - \frac{\hat{z}(k+1)\hat{z}^T(k+1)}{\lambda + \hat{z}^T(k+1)P(k)\hat{z}(k+1)} P(k) \right]$$

și, cu aceasta,

$$\hat{b}(k+1) = \hat{b}(k) + P(k+1)\hat{z}(k+1)\hat{e}(k+1),$$

unde $\hat{z}(k+1)$ este de forma (4.11);

Pasul 8: $k \rightarrow k+1$ și se trece la pasul 4; dacă $k < k_{impus}$, programul se oprește; se trasează grafic variabilele de stare $x_i(t)$ și $\hat{x}_i(t)$.

Pentru validarea algoritmului s-au conceput programele de calcul numeric din anexa A4.1 (pentru mișcarea longitudinală (1.111)) și din anexa A4.2 (pentru mișcarea laterală (1.115)) [1].

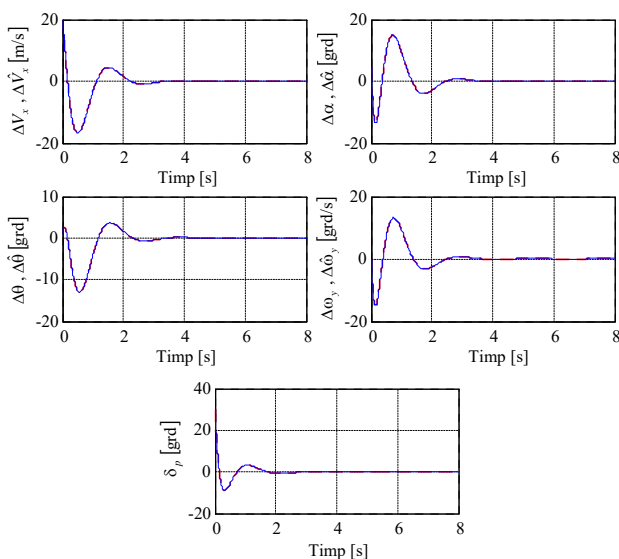


Fig. 4.2. Dinamica variabilelor de stare, a estimatorilor lor și a comenzii mișcării longitudinale a aeronavei

În cazul **mișcării longitudinale** s-a făcut mai întâi identificarea off-line, rezul-

tând vectorul aferent modelului estimat (\hat{A})

$$\hat{b}_0^T = \hat{b}^T(0) = [4.013 \quad -6.042 \quad 4.047 \quad -1.017 \quad 0.058 \quad -0.096 \quad 0.106 \quad -0.070]$$

al sistemului A al cărui vector este b_0 ,

$$b_0^T = b^T(0) = [3.985 \quad -5.954 \quad 3.954 \quad -0.984 \quad 2.034 \cdot 10^{-5} \quad 6.102 \cdot 10^{-5} \quad -6.052 \cdot 10^{-5} \quad -2.017 \cdot 10^{-5}]$$

și matricele [1]

$$\hat{A}_d = \begin{bmatrix} 4.012 & 1 & 0 & 0 \\ -6.042 & 0 & 1 & 0 \\ 4.046 & 0 & 0 & 1 \\ -1.017 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \hat{B}_d = \begin{bmatrix} 0.058 \\ -0.096 \\ 0.106 \\ -0.070 \end{bmatrix}, \hat{C}_d^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \hat{D}_d = 0,$$

$$A_d = \begin{bmatrix} 3.984 & 1 & 0 & 0 \\ -5.954 & 0 & 1 & 0 \\ 3.954 & 0 & 0 & 1 \\ -9.984 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_d = 10^{-4} \begin{bmatrix} 0.203 \\ 0.610 \\ -0.605 \\ -0.201 \end{bmatrix}, C_d^T = \hat{C}_d, D_d = \hat{D}_d.$$

După închiderea lui I, se trece în regim de comandă automată cu identificare on-line; considerând că se modifică în timp parametrii lui A (mișcarea longitudinală) cu 5%, rezultă vectorul

$$b^T = [3.786 \quad -5.657 \quad 3.757 \quad -0.935 \quad 1.932 \cdot 10^{-5} \quad 5.797 \cdot 10^{-5} \quad -5.749 \cdot 10^{-5} \quad -1.917 \cdot 10^{-5}].$$

Se calculează matricele Q și R cu algoritmul ALGLX: $Q = 1.548$, $R = 1$ și, cu acestea, se calculează G și u la fiecare pas de calcul, vectorii $x, \hat{x}, y, \hat{y}, \hat{e}, P, \hat{b}$ și se trasează caracteristicile de timp $x_1 = \Delta V_x$, $\hat{x}_1 = \Delta \hat{V}_x$, $x_2 = \Delta \alpha$, $\hat{x}_2 = \Delta \hat{\alpha}$, $x_3 = \Delta \theta$, $\hat{x}_3 = \Delta \hat{\theta}$, $x_4 = \omega_y$, $\hat{x}_4 = \hat{\omega}_y$ și $u = \delta_p$ (prezentate în fig. 4.2; curbele x_i – linie continuă, \hat{x}_i – linie întreruptă); s-a ales $\bar{y} = \Delta \bar{\theta} = 0$.

Pentru **mișcarea laterală** descrisă de [1]

$$b_0^T = b^T(0) = \begin{bmatrix} 3.99 & -5.98 & 3.98 & -0.99 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3.99 & -5.98 & 3.98 & -0.99 & 0.01 & -0.03 & 0.03 & -0.01 \end{bmatrix},$$

$$A_d^{11} = A_d^{21} = \begin{bmatrix} 3.99 & 1 & 0 & 0 \\ -5.98 & 0 & 1 & 0 \\ 3.98 & 0 & 0 & 1 \\ -9.99 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_d^{11} = \begin{bmatrix} 0.001 \\ -0.004 \\ 0.004 \\ -0.001 \end{bmatrix}, B_d^{21} = \begin{bmatrix} 0.010 \\ -0.031 \\ 0.031 \\ -0.010 \end{bmatrix}, C_d^{11T} = C_d^{21T} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, D_d^{11} = D_d^{21} = 0,$$

prin identificare off-line au rezultat următoarele

$$\hat{b}_0^T = \hat{b}^T(0) = \begin{bmatrix} 3.97 & -5.90 & 3.90 & -0.96 & 0.04 & 0.10 & 0.23 & -0.09 \\ 3.97 & -5.90 & 3.90 & -0.96 & 0.01 & 0.13 & 0.26 & -0.10 \end{bmatrix},$$

$$\hat{A}_d^{11} = \hat{A}_d^{21} = \begin{bmatrix} 3.96 & 1 & 0 & 0 \\ -5.90 & 0 & 1 & 0 \\ 3.90 & 0 & 0 & 1 \\ -0.96 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \hat{B}_d^{11} = \begin{bmatrix} 0.004 \\ -0.109 \\ 0.236 \\ -0.092 \end{bmatrix}, \hat{B}_d^{21} = \begin{bmatrix} 0.013 \\ -0.136 \\ 0.263 \\ -0.101 \end{bmatrix},$$

$$\hat{C}_d^{11T} = \hat{C}_d^{21T} = C_d^{11T}, \hat{D}_d^{11} = \hat{D}_d^{21} = 0.$$

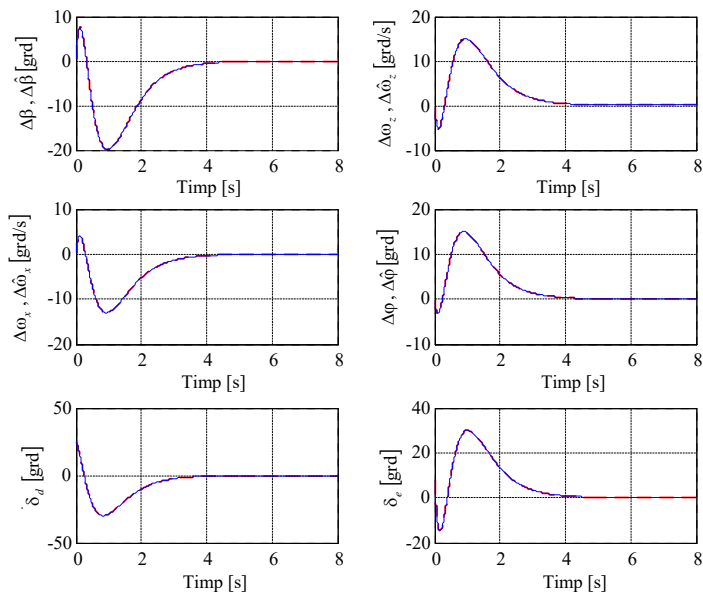


Fig. 4.3. Dinamica variabilelor de stare, a estimatelor lor și a comenzii mișcării laterale a aeronavei

După modificarea parametrilor A cu 5%, rezultă [1]

$$b^T = \begin{bmatrix} 3.79 & -5.68 & 3.78 & -0.94 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3.79 & -5.68 & 3.78 & -0.94 & 0.01 & -0.03 & 0.03 & -0.01 \end{bmatrix}.$$

Matricele Q și R sunt: $Q = 0.0382$, $R = \begin{bmatrix} 1 & 0.985 \\ 0.985 & 1 \end{bmatrix}$. Variabilele de stare și estima-

tele lor sunt $x_1 = \Delta\beta$, $\hat{x}_1 = \Delta\hat{\beta}$, $x_2 = \Delta\omega_z$, $\hat{x}_2 = \Delta\hat{\omega}_z$, $x_3 = \Delta\omega_x$, $\hat{x}_3 = \Delta\hat{\omega}_x$, $x_4 = \Delta\varphi$, $\hat{x}_4 = \Delta\hat{\varphi}$ și $u^T = [\delta_d \ \delta_e]$. Variațiile în timp ale acestor variabile de stare sunt prezentate în fig. 4.3 (x_i – linie continuă, \hat{x}_i – linie întreruptă); s-au ales $\bar{y} = \Delta\bar{\omega}_x = 0$.

Pentru modelul mișcării rachetei în plan vertical, cu abaterea laterală y față de linia de semnal egal,

$$\dot{x} = Ax + Bu + Eu_p, \quad (4.23)$$

cu

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{V}{T_V} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_V} & 1 \\ 0 & 0 & -a_0 & -a_1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ k_\delta \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{T_V} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.24)$$

procedând ca mai sus, se obțin, respectiv, următoarele rezultate numerice pentru a 10-a secundă de zbor [1]

$$\hat{b}_0^T = \hat{b}^T(0) = [3.8856 \quad -5.6477 \quad 3.6376 \quad -0.8754 \quad -0.0558 \quad 0.1647 \quad 0.0274 \quad -0.1258],$$

$$b_0^T = b^T(0) = [4.005 \quad -6.013 \quad 4.011 \quad -1.003 \quad 10^{-3}(-0.010) \quad 10^{-3}(-0.110) \quad 10^{-3}(-0.110) \quad 10^{-3}(-0.010)],$$

$$b^T = [3.805 \quad -5.713 \quad 3.811 \quad -0.959 \quad -9.506 \cdot 10^{-6} \quad 0 \quad 0 \quad -9.524 \cdot 10^{-6}],$$

$$\hat{A}_d = \begin{bmatrix} 3.901 & 1 & 0 & 0 \\ -5.716 & 0 & 1 & 0 \\ 3.728 & 0 & 0 & 1 \\ -0.913 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \hat{B}_d = \begin{bmatrix} -0.079 \\ -0.070 \\ -0.010 \\ 0.158 \end{bmatrix}, A_d = \begin{bmatrix} 3.772 & 1 & 0 & 0 \\ -5.620 & 0 & 1 & 0 \\ 3.722 & 0 & 0 & 1 \\ -0.924 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_d = \begin{bmatrix} 0.009 \\ 0.103 \\ 0.102 \\ 0.009 \end{bmatrix},$$

$$\hat{C}_d = C_d = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0], \hat{D}_d = D_d = 0, Q = 7.565, R = 1.$$

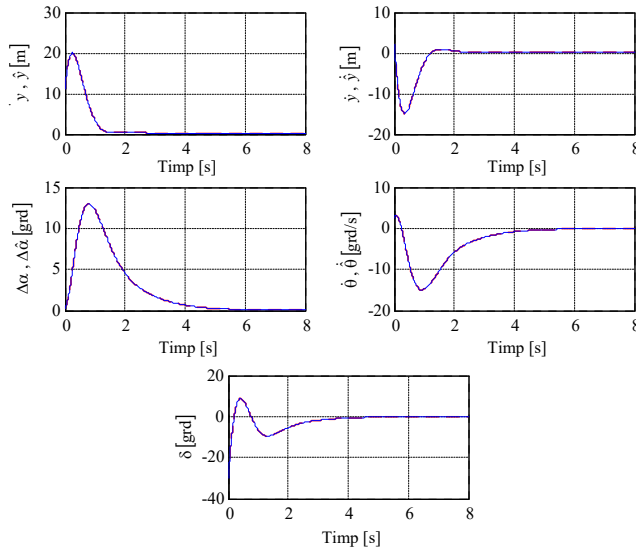


Fig. 4.4. Dinamica variabilelor de stare, a estimatelor lor și a comenzii mișcării unei rachete în plan vertical în a 10-a secundă de zbor, cu abaterea y față de linia de semnal egal

Programul de calcul numeric este dat în anexa A4.3, iar caracteristicile de timp

$x_1 = y, \hat{x}_1 = \hat{y}, x_2 = \dot{y}, \hat{x}_2 = \hat{\dot{y}}, x_3 = \Delta\alpha, \hat{x}_3 = \Delta\hat{\alpha}, x_4 = \dot{\theta}, \hat{x}_4 = \dot{\hat{\theta}}, \delta$ în fig. 4.4 (x_i – linie continuă, \hat{x}_i – linie întreruptă) [1]. Similar, pentru a 40-a secundă de zbor, se obțin

$$\begin{aligned} \hat{b}_0^T &= \hat{b}^T(0) = [3.845 \quad -5.503 \quad 3.469 \quad -0.811 \quad -0.006 \quad 0.061 \quad 0.136 \quad -0.056], \\ b_0^T &= b^T(0) = [4.023 \quad -6.062 \quad 4.053 \quad -1.015 \quad 10^{-3}(-0.041) \quad 10^{-3}(-0.461) \quad 10^{-3}(-0.462) \quad 10^{-3}(-0.042)], \\ b^T &= [3.822 \quad -5.759 \quad 3.851 \quad -0.964 \quad -3.971 \cdot 10^{-5} \quad 0 \quad 0 \quad -4 \cdot 10^{-5}], \end{aligned}$$

$$\hat{A}_d = \begin{bmatrix} 3.818 & 1 & 0 & 0 \\ -5.451 & 0 & 1 & 0 \\ 3.445 & 0 & 0 & 1 \\ -0.812 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \hat{B}_d = \begin{bmatrix} -0.001 \\ 0.066 \\ -0.050 \\ 0.076 \end{bmatrix}, A_d = \begin{bmatrix} 3.759 & 1 & 0 & 0 \\ -5.586 & 0 & 1 & 0 \\ 3.694 & 0 & 0 & 1 \\ -0.917 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_d = \begin{bmatrix} 0.039 \\ 0.429 \\ 0.426 \\ 0.038 \end{bmatrix},$$

$$\hat{C}_d = C_d = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0], \hat{D}_d = D_d = 0, Q = 0.1067, R = 1.$$

Curbele $x_i(t), \hat{x}_i(t)$ și $\delta(t)$ sunt date în fig. 4.5. Pentru a 50-a secundă de zbor, se obțin următoarele rezultate [1]

$$\begin{aligned} \hat{b}_0^T &= \hat{b}^T(0) = [4.016 \quad -6.043 \quad 4.038 \quad -1.011 \quad 0.079 \quad -0.069 \quad 0.049 \quad -0.071], \\ b_0^T &= b^T(0) = [4.012 \quad -6.030 \quad 4.024 \quad -1.006 \quad 10^{-4}(-0.041) \quad 10^{-4}(-0.459) \quad 10^{-4}(-0.460) \quad 10^{-4}(-0.041)], \\ b^T &= [3.811 \quad -5.729 \quad 3.823 \quad -0.955 \quad -3.964 \cdot 10^{-6} \quad -4.367 \cdot 10^{-6} \quad -4.372 \cdot 10^{-5} \quad -3.978 \cdot 10^{-6}], \end{aligned}$$

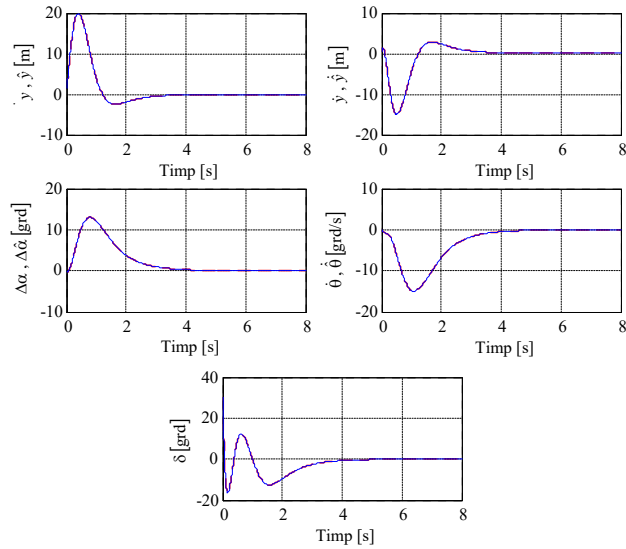


Fig. 4.5. Dinamica variabilelor de stare, a estimatelor lor și a comenzii mișcării unei rachete în plan vertical în a 40-a secundă de zbor, cu abaterea y față de linia de semnal egal

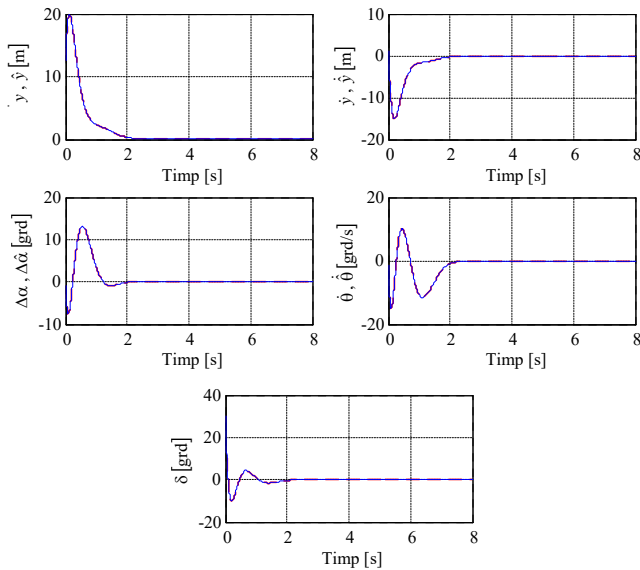


Fig. 4.6. Dinamica variabilelor de stare, a estimatelor lor și a comenzii mișcării unei rachete în plan vertical în a 50-a secundă de zbor, cu abaterea y față de linia de semnal egal

$$\hat{A}_d = \begin{bmatrix} 3.949 & 1 & 0 & 0 \\ -5.860 & 0 & 1 & 0 \\ 3.870 & 0 & 0 & 1 \\ -0.960 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \hat{B}_d = \begin{bmatrix} -0.048 \\ -0.038 \\ 0.009 \\ -0.063 \end{bmatrix}, A_d = \begin{bmatrix} 3.781 & 1 & 0 & 0 \\ -5.649 & 0 & 1 & 0 \\ 3.754 & 0 & 0 & 1 \\ -0.936 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_d = \begin{bmatrix} 0.039 \\ 0.432 \\ 0.431 \\ 0.039 \end{bmatrix},$$

$$\hat{C}_d = C_d = [1 \ 0 \ 0 \ 0], \hat{D}_d = D_d = 0, Q = 0.1067, R = 1.$$

Curbele $x_i(t)$, $\hat{x}_i(t)$ și $\delta(t)$ sunt date în fig. 4.6 [1].

4.2. CONTROLUL NELINIAR AL REACȚIEI BAZAT PE METODE DE OPTIMIZARE

Metoda ce este prezentată în continuare este o metodă ce simplifică liniarizarea ecuațiilor de stare [3], [4]. Se obține o lege de control prin transformări analitice neliniare fără a se rezolva ecuații cu derivate parțiale. Legea de control analitică care se obține este dependentă de alegerea arbitrară a unor parametri; metoda optimizează și valorile acestora.

Există numeroase metode pentru liniarizarea ecuațiilor de stare [5], [6], [7], [8], [9], [10]. Metodele se bazează pe utilizarea unei aproximări polinomiale a unor funcții, ce caracterizează modelul neliniar original și a aparatului matematic asociat produsului Kronecker [3]. Așadar, metoda prezentată aici constă în determinarea unui polinom ce aproximează reacția după vectorul de stare printr-o transformare neliniară. În [11] se poate vedea că anumiți parametri ai polinomului de control pot fi aleși arbitrar și de aici apare întrebarea: care sunt cei mai buni parametri ce asigură eficiența transformării neliniare și garantează performanțele controlului?

Se consideră sistemul neliniar SISO descris de ecuația de stare [3]

$$\dot{x} = \sum_{i \geq 1} f_i x^{[i]} + g_0 u = \sum_{i \geq 1} \tilde{f}_i \tilde{x}^{[i]} + g_0 u, \quad (4.25)$$

unde $x \in \mathcal{M}^{n \times 1}$ este vectorul de stare, $u \in \mathcal{M}^{m \times 1}$ este vectorul de intrare (variabila de intrare). $f(x) = \sum_{i \geq 1} f_i x^{[i]}$ este un vector $(n \times 1)$ care poate fi văzut ca o dezvoltare în serie

Taylor generalizată folosind produsul Kronecker și puterea vectorilor. $x^{[i]}$ este puterea redundantă Kronecker de ordinul „ i ” a vectorului x , iar $\tilde{x}^{[i]}$ este puterea non-redundantă Kronecker a aceluiași vector [12]. Relația dintre puterea Kronecker redundantă și non-redundantă este [13]: $x^{[i]} = R_n^i \tilde{x}^{[i]} \Leftrightarrow \tilde{x}^{[i]} = (R_n^i)^+ x^{[i]}$; R_n^i se numește matrice de redundanță, $R_n^i \in \mathcal{M}^{n_i \times n_i}$, cu $n_i = C_{n+i-1}^i$ și $(R_n^i)^+$ – pseudo-inversa Moore-Penrose a lui R_n^i .

Tehnica de liniarizare a sistemului se bazează pe sinteza unui control polinomial descris de ecuația [3]

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v, \quad (4.26)$$

printr-o transformare neliniară

$$z = \phi(x). \quad (4.27)$$

Așadar, sistemul original (4.25) poate fi transformat într-un sistem liniar cu forma canonică [4]

$$\dot{z} = Az + Bv, \quad (4.28)$$

unde v este intrarea, iar (A, B) – pereche controlabilă de matrice.

Deoarece sistemul (4.28) este unul stabil, pasul următor este acela de a utiliza tehnicile de poziționare a polilor pentru a stabili polii sistemului în circuit închis. Legea de comandă a sistemului (reacția sistemului) este

$$v = -Kz. \quad (4.29)$$

Ecuațiile (4.28) și (4.29) conduc la următoarea ecuație [4]

$$\dot{z} = (A - BK)z. \quad (4.30)$$

Transformarea neliniară (4.27) poate fi scrisă și sub forma

$$z = \phi(x) = \sum_{k \geq 1} \phi_k x^{[k]}; \quad (4.31)$$

cu aceasta, se determină [4]

$$u = \sum_{i \geq 1} \alpha_i x^{[i]} + \sum_{j \geq 0} \beta_j x^{[j]v}. \quad (4.32)$$

Pentru a determina mărimea de comandă u și vectorul de stare z , este nevoie de calculul coeficienților ε_i , β_j și ϕ_k (aceștia caracterizează transformarea neliniară $\phi(\cdot)$ și mărimea de comandă u) [3]. Determinarea coeficienților ϕ_k ai transformării neliniare $\phi(\cdot)$ se face prin determinarea componentelor necunoscute ale transformării inverse neliniare [3]

$$x = \phi^{-1}(z) = S(z) = \sum_{i \geq 1} S_i^1 z^{[i]}. \quad (4.33)$$

Pentru rezolvarea acestei probleme, se pornește de la expresia analitică (4.25) și, folosind aparatul matematic al lui Kronecker, se scrie [4]

$$x^{[k]} = \sum_{i \geq k} S_i^k z^{[i]}, \quad (4.34)$$

unde

$$S_p^n = \sum_{j=1}^{p-n+1} S_{p-j}^{n-1} \otimes S_j^1. \quad (4.35)$$

Sistemul (4.25) poate fi astfel scris în funcție de termenii lui z :

$$\dot{x} = \sum_{i \geq 1} f_1 S_i^1 z^{[i]} + \sum_{i \geq 2} f_2 S_i^2 z^{[i]} + \dots + \sum_{i \geq p} f_p S_i^p z^{[i]} + g_0 u. \quad (4.36)$$

Folosind derivata Kronecker de ordinul „ i ” a vectorului de stare x [12],

$$\frac{dx^{[i]}}{dt} = V^{[i]}(I_n \otimes x^{[i-1]}), \quad (4.37)$$

unde $V^{[i]} = \sum_{j=0}^{i-1} (U_{n^j \times n} \otimes I_{n^{(i-j-1)}})$ și $U_{p \times q}$ – matrice de permutare Kronecker [12], rezultă

$$\dot{x} = \sum_{i \geq 1} S_i^1 V^{[i]} (I_n \otimes z^{[i-1]}) \dot{z}. \quad (4.38)$$

Înlocuind \dot{z} de forma (4.30) în această ultimă expresie, se obține [4]

$$\dot{x} = \sum_{i \geq 1} S_i^1 V^{[i]} \left[(A - BK) \otimes I_{n^{(i-1)}} \right] z^{[i]}. \quad (4.39)$$

Vectorul de comandă u are expresia

$$u = \sum_{i \geq 1} \alpha_1 S_i^1 z^{[i]} + \sum_{i \geq 2} \alpha_2 S_i^2 z^{[i]} + \dots + \sum_{i \geq p} \alpha_p S_i^p z^{[i]} - \left(\beta_0 K z + \dots + \sum_{i \geq p} (\beta_p S_i^p \otimes K) z^{[i+1]} \right). \quad (4.40)$$

Înlocuind u cu forma (4.40) în (4.36), se obține relația dintre \dot{x} și z [3]. Identificând elementele acestei ecuații cu cele ale ecuației (4.39), se obține următorul algoritm:

- pentru $p=1$

$$\begin{aligned} S_1^1 &= I_n, f_1 + g_0 \alpha_1 = A - BK, \\ A - BK &\rightarrow \text{stabila}, \beta_0 \rightarrow \text{arbitrar}; \end{aligned} \quad (4.41)$$

- pentru $p=2$

$$\begin{aligned} \text{vec}(S_p^1) &= -\text{pinv}(A_p) \text{vec} \left(\sum_{i=2}^p f_i S_i^i R_n^p \right), \\ \alpha_p &= \text{pinv}(g_0) g_0 \left[\left(- \sum_{i=2}^{p-1} \alpha_i S_i^i R_n^p \right) + \left(\sum_{i=1}^{p-1} (\beta_i S_i^i \otimes K) R_n^p \right) \right] \text{pinv}(S_p^p R_n^p), \\ A_p &= \left((R_n^p)^T \otimes (f_1 + g_0 \alpha_1) \right) - \left\{ V^{(p)} \left[\left((A - BK) \otimes (I_{n^{p-1}}) \right) R_n^p \right]^T \otimes I_n \right\}, \beta_{p-1} \rightarrow \text{arbitrar}; \end{aligned} \quad (4.42)$$

$\text{vec}(\cdot)$ este operatorul de vectorizare, iar $\text{pinv}(\cdot)$ – pseudo-inversa Moore-Penrose.

Așadar, utilizând acest algoritm [3], se obțin componentele transformării neliniare (4.31), adică componentele ϕ_k

$$\phi_1^1 = (S_1^1)^{-1}, \phi_k^1 = -(S_1^1)^{-1} \left(\sum_{i=2}^k S_i^1 \phi_k^i \right), \phi_k^i = \sum_{j=1}^{k-i+1} (\phi_{k-j}^{i-1} \otimes S_j^1). \quad (4.43)$$

Conform soluției date de algoritmul de mai sus, se poate concluziona că dinamica sistemului descris de (4.25) și (4.32) se află în strânsă legătură cu alegerea parametrilor α_i și β_j .

În cele ce urmează se studiază o metodă de optimizare care să asigure eficiența transformării sistemului neliniar (4.25) într-un sistem de tipul (4.28); metoda de optimizare determină valorile optime ale parametrilor considerați (β_j).

Transformarea neliniară discutată până acum ține cont de alegerea lui α_i și β_j . Așadar, problema se transformă acum într-o problemă de optimizare. Pentru a rezolva o problemă de optimizare este nevoie de [4]:

- o funcție obiectiv sau funcție cost (o funcție matematică ce trebuie maximizată sau minimizată);
- variabile decizionale (variabilele funcției cost). Ele sunt în permanență ajustate pentru obținerea valorilor optime;
- spațiul de căutare (setul ce conține toate soluțiile posibile ale problemei de optimizat);
- constrângerile (egalități sau inegalități).

Există mai mulți algoritmi de optimizare. Ei se împart în algoritmi determiniști și algoritmi probabilistici. O serie foarte importantă de algoritmi o reprezintă algoritmi Monte Carlo. Algoritmii de tip Monte Carlo (MC) sunt algoritmi probabilistici [14], [15], [16], [13]; aceștia includ cel puțin o instrucțiune care se bazează pe valori aleatoare. Mai mult, algoritmii de tip MC constau în generarea unui set de soluții fezabile (posibile) și apoi alegerea dintre acestea a celei mai bune. Se generează, de exemplu, 50 de valori pentru vectorii β_p . În fiecare caz, se calculează eroarea medie normalizată, ea fiind funcția obiectiv a problemei de optimizare considerată

$$EMN_z = \frac{\|z - \hat{z}\|_2^2}{\|z\|_2^2}, \quad (4.44)$$

unde z este soluția sistemului [4]

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + Bv, z(0) = \phi(x(0)), \\ v = -Kz, \end{cases} \quad (4.45)$$

iar \hat{z} este de tipul (4.31), adică

$$\hat{z} = \sum_{k \geq 1} \phi_k x^{[k]}. \quad (4.46)$$

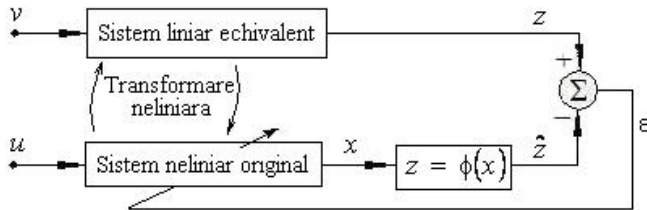


Fig. 4.7. Schema bloc a algoritmului de optimizare

Funcția obiectiv este dată de relația (4.44). Dacă se introduce și constrângerea

$$u_{\min} \leq u \leq u_{\max}, \quad (4.47)$$

algoritmul prezentat până acum poate fi sintetizat astfel [4]:

Pasul 1: Se transformă sistemul neliniar de forma

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (4.48)$$

într-un sistem descris de ecuația (4.25).

Pasul 2: Se determină un sistem liniar echivalent definit de ecuația (4.28).

Pasul 3: Se inițializează aleatoriu și independent parametrii $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_q$ (q – ordinul de trunchiere).

Pasul 4: Se determină parametrii transformării inverse neliniare S_1, S_2, \dots, S_q și parametrii reacției $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$ utilizând ecuația (4.42).

Pasul 5: Se determină parametrii transformării neliniare $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_q$ cu ecuația (4.43).

Pasul 6: Se calculează valoarea funcției obiectiv (4.44) pentru acești parametri.

Pasul 7: Se repetă pașii 3-6 până când este satisfăcută constrângerea (4.47).

4.3. CONTROLUL OPTIMAL STOCHASTIC

O metodă foarte utilizată în cadrul controlului stochastic este controlul liniar quadratic Gaussian; în cadrul său, modelul asociat dinamicii sistemului este liniar, funcția obiectiv are formă quadratică și, în plus, se adaugă și perturbațiile [17]. În cazul sistemelor discrete în timp, se utilizează proprietatea conform căreia soluția controlului optimal pentru un sistem fără perturbații este aceeași cu cea care s-ar obține în cazul sistemului cu perturbații [18].

Pentru problemele de control optimal stochastic, o metodă frecvent utilizată constă în minimizarea funcției cost [18]

$$\bar{J} = E_1 \sum_{t=1}^S (y_t^T Q y_t + u_t^T R u_t), \quad (4.49)$$

unde E_1 este valoarea „așteptată” (valoarea medie), S poate fi ∞ și

$$y_t = A_t y_{t-1} + B_t u_t; \quad (4.50)$$

$A_t (n \times n)$ – matrice de tranziție stochastică, $B_t (n \times k)$ – matrice de amplificare, iar $Q (n \times n)$ și $R (k \times k)$ – matrice simetrice și pozitiv definite [17].

Utilizând metoda inducției matematice, se obține controlul [17]

$$u_t^* = -[E(B^T x_t + R)]^{-1} E(B^T x_t A) y_{t-1}, \quad (4.51)$$

în care x_t este soluția ecuației

$$x_{t-1} = Q + E[A^T x_t A] - E[A^T x_t B][E(B^T x_t B + R)]^{-1} E(B^T x_t A); \quad (4.52)$$

ecuația (4.52) este ecuație Riccati în variantă discretă.

4.4. CONTROLUL OPTIMAL STOCHASTIC PENTRU SISTEMELE CARACTERIZATE DE ZGOMOT

4.4.1. FORMULAREA PROBLEMEI

În cadrul acestui subcapitol este prezentat un algoritm de control optimal sto-

chastic pentru sistemele afectate de zgomot [19].

Se consideră u – vectorul variabilelor de control și ζ – vector aleator. Modelul multiplicativ al zgomotului are forma $C(u)\zeta$, unde $C(u)$ – matrice ale cărei elemente au o dependență liniară de u ; astfel, pentru a exprima dependența liniară dintre vectorul u și matricea C , coloana „ i ” a matricei C este $C_i u$, în care C_i sunt matrice constante. Se obține $C(u)\zeta = \sum_i C_i u \zeta^i$ [19], în care ζ^i este componenta „ i ” a vectorului aleator ζ .

Se consideră un sistem dinamic liniar, discret în timp, cu starea $x_t \in \mathcal{R}^m$, controlul $u_t \in \mathcal{R}^p$ și reacția $y_t \in \mathcal{R}^k$ [19]

$$\begin{cases} x_{t+1} = Ax_t + Bu_t + \mu_t + \sum_{i=1}^c \zeta_i^i C_i u_t, \\ y(t) = Dx_t + \omega_t + \sum_{i=1}^d \xi_i^i H_i x_t. \end{cases} \quad (4.53)$$

Obiectivul este minimizarea funcției obiectiv $J = x_t^T Q_t x_t + u_t^T R u_t$. Semnalul de reacție y_t depinde de semnalul de control u_t . Starea inițială a sistemului este \hat{x}_1 și are covarianța η_1 . Toate matricele din ecuațiile (4.53) sunt cunoscute și au dimensiuni compatibile. Matricele de cost R, Q_1, \dots, Q_n sunt simetrice și pozitiv definite, respectiv, simetrice și pozitiv semi-definite ($R > 0, Q_t \geq 0$). Variabilele aleatoare și independente $\mu_t \in \mathcal{R}^m, \omega_t \in \mathcal{R}^k, \zeta_t \in \mathcal{R}^c, \xi_t \in \mathcal{R}^d$ au distribuții multidimensionale gaussiene cu media 0 și covarianțele $\Omega^\mu \geq 0, \Omega^\omega > 0, \Omega^\zeta = I$ și, respectiv, $\Omega^\xi = I$; astfel, termenii zgomot, dependenți de vectorul de control și de cel de stare, au covarianțele $\eta_i C_i u_t u_t^T C_i^T$ și $\eta_i H_i x_t x_t^T D_i^T$ [19]. Când zgomotul se adaugă în semnalul de control, matricele C_i vor avea forma $B F_i$, unde F_i sunt factorii de scală. Partea dependentă de control a dinamicii sistemului devine $B(I + \eta_i \zeta_i^i F_i) u_t$.

Problema controlului optimal este legată de proiectarea legii de control optimal $u_t(u_1, u_2, \dots, u_{t-1}, y_1, \dots, y_{t-1})$ ce minimizează funcția cost. În cazul în care $C_1, \dots, C_c = 0$ și

$H_1, \dots, H_d = 0$, problema se reduce la o problemă clasică LQG cu soluția optimală [20]

$$\begin{cases} u_t = -L_t \hat{x}_t, \\ L_t = (R + B^T S_{t+1} B)^{-1} B^T S_{t+1} A, \\ S_t = Q_t + A^T S_{t+1} (A - B L_t), \end{cases} \quad (4.54)$$

unde \hat{x}_t se determină printr-un filtru Kalman

$$\begin{cases} \hat{x}_{t+1} = A \hat{x}_t + B u_t + K_t (y_t - D \hat{x}_t), \\ K_t = A \eta_t D^T (D \eta_t D + \Omega^o)^{-1}, \\ \eta_{t+1} = \Omega^u + (A - K_t D) \eta_t A^T. \end{cases} \quad (4.55)$$

Legea de control optimal depinde de semnalele de control și de reacție prin intermediul vectorului de stare estimat \hat{x}_t , cel care este actualizat recursiv utilizând un filtru Kalman. Matricele L ce definesc legea de control optimal nu depind de covarianțele zgomotului sau de coeficienții filtrului, iar matricele K ce definesc filtrul optimal nu depind de legea de control și de funcția cost.

În cazul controlului zgomotului dependent de stare, proprietățile prezentate anterior nu mai sunt valabile, iar procesul de control se complică semnificativ; u_t este o funcție arbitrară ce depinde de \hat{x}_t , acesta din urmă fiind un filtru liniar recursiv de forma

$$\hat{x}_{t+1} = A \hat{x}_t + B u_t + K_t (y_t - D \hat{x}_t) + \sigma_t; \quad (4.56)$$

zgomotul intern $\sigma_t \in \mathcal{R}^m$ are media 0 și covarianța $\Omega^\sigma \geq 0$; amplificările K_1, \dots, K_{n-1} nu sunt adaptive, fiind determinate anterior și nu se pot modifica ca funcție de control. Mai mult [19], pentru orice K_1, \dots, K_{n-1} , $E[x_t \mid \hat{x}_t] = \hat{x}_t (\forall) t$.

4.4.2. PROIECTAREA CONTROLLERULUI OPTIMAL

Pentru determinarea legii de control u_t , se va utiliza starea estimată \hat{x}_t și funcția cost [19]

$$V_t(x_t, \hat{x}_t) = x_t^T S_t^x x_t + (x_t - \hat{x}_t)^T S_t^e (x_t - \hat{x}_t) + s_t = x_t^T S_t^x x_t + e_t^T S_t^e e_t + s_t, \quad (4.57)$$

în care $e_t = x_t - \hat{x}_t$ este eroarea de estimare a stării. La momentul final ($t=n$), funcția de cost finală este $x_n^T Q_n x_n$ și $S_n^x = Q_n, S_n^e = 0, s_n = 0$. În cadrul demonstrației și a procesului de proiectare a legii de control, se utilizează metoda inducției matematice [19].

Se consideră o lege de control variabilă în timp, optimală la pașii $t+1, \dots, n$ și care, la pasul t , este $V_t^\pi = \pi(\hat{x}_t)$; pentru aceasta, funcția cost corespunzătoare este $V_t^\pi = \pi(x_t, \hat{x}_t)$. Cum această lege de control este optimală la momentul „ t ”, se obține $V_{t+1}^\pi = V_{t+1}$. Funcția V_t^π satisface ecuația Bellman [19]

$$V_t^\pi = \pi(x_t, \hat{x}_t) = x_t^T Q_t x_t + \pi(\hat{x}_t)^T R \pi(\hat{x}_t) + E[V_{t+1}(x_{t+1}, \hat{x}_{t+1}) \mid x_t, \hat{x}_t, \pi]. \quad (4.58)$$

Folosind acum definițiile pentru y_t și e_t , dinamica stochastică a principalelor variabile devine

$$\begin{cases} x_{t+1} = Ax_t + B\pi(\hat{x}_t) + \mu_t + \sum_i \zeta_i^i C_i \pi(\hat{x}_t), \\ e_{t+1} = (A - K_t D)e_t + \mu_t - K_t \omega_t - \sigma_t + \sum_i \zeta_i^i C_i \pi(\hat{x}_t) - \sum_i \xi_i^j K_t H_i x_t. \end{cases} \quad (4.59)$$

Mediile și covarianțele lui x_{t+1} și e_{t+1} sunt

$$\begin{cases} E[x_{t+1} \mid x_t, \hat{x}_t, \pi] = Ax_t + B\pi(\hat{x}_t), \\ E[e_{t+1} \mid x_t, \hat{x}_t, \pi] = (A - K_t D)e_t, \\ \text{cov}[x_{t+1} \mid x_t, \hat{x}_t, \pi] = \Omega^\mu + \sum_i C_i \pi(\hat{x}_t) \pi^T(\hat{x}_t) C_i^T, \\ \text{cov}[e_{t+1} \mid x_t, \hat{x}_t, \pi] = \Omega^\mu + \sum_i C_i \pi(\hat{x}_t) \pi^T(\hat{x}_t) C_i^T + \Omega^\sigma + K_t \Omega^\omega K_t^T + \sum_i K_t H_i x_t x_t^T H_i^T K_t^T. \end{cases} \quad (4.60)$$

Funcția cost devine

$$\begin{aligned} V_t^\pi(x_t, \hat{x}_t) = & x_t^T (Q_t + A^T S_{t+1}^x A + D_t) x_t + e_t^T (A - K_t D)^T S_{t+1}^e (A - K_t D) e_t + \\ & + \text{tr}(\mathcal{M}_t) + \pi^T(\hat{x}_t) (R + B^T S_{t+1}^x B + C_t) \pi(\hat{x}_t) + 2\pi^T(\hat{x}_t) B^T S_{t+1}^x A x_t, \end{aligned} \quad (4.61)$$

în care [19]

$$\begin{cases} C_t = \sum_i C_c^T (S_{t+1}^e + S_{t+1}^\times) C_i, \\ \mathcal{D}_t = \sum_i D_i^T K_i^T S_{t+1}^e K_i H_i, \\ \mathcal{M}_t = S_{t+1}^\times \Omega^\mu + S_{t+1}^e (\Omega^\mu + \Omega^\sigma + K_i \Omega^\omega K_i^T). \end{cases} \quad (4.62)$$

Deoarece $E[x_t \mid \hat{x}_t] = \hat{x}_t$, se obține

$$E[V_t^\pi(x_t, \hat{x}_t) \mid \hat{x}_t] = \text{const} + \pi^T(\hat{x}_t)(R + B^T S_{t+1}^\times B + C_t) \pi(\hat{x}_t) + 2\pi^T(\hat{x}_t) B^T S_{t+1}^\times A \hat{x}_t \quad (4.63)$$

și legea de control optimal la momentul t este

$$u_t = \pi(\hat{x}_t) = -L_t \hat{x}_t, \quad (4.64)$$

în care

$$L_t = (R + B^T S_{t+1}^\times B + C_t)^{-1} B^T S_{t+1}^\times A. \quad (4.65)$$

Pentru calculul funcției cost $V_t^\pi = V_t$, pentru $\pi(\hat{x}_t) = -L_t \hat{x}_t$, se utilizează relațiile

$$\begin{cases} L_t^T (R + B^T S_{t+1}^\times B + C_t) L_t = L_t^T B^T S_{t+1}^\times A = A^T S_{t+1}^\times B L_t, \\ \hat{x}^T z \hat{x} - 2\hat{x}^T z x = (x - \hat{x})^T z (x - \hat{x}) - \hat{x}^T z x = e^T z e - x^T z x. \end{cases} \quad (4.66)$$

Pentru o matrice simetrică z (aici egală cu $L_t^T B^T S_{t+1}^\times A$), rezultă [19]

$$\begin{aligned} V_t^\pi(x_t, \hat{x}_t) &= x_t^T \left[Q_t + A^T S_{t+1}^\times (A - B L_t) + \mathcal{D}_t \right] x_t + \text{tr}(\mathcal{M}_t) + s_{t+1} + \\ &+ e_t^T \left[A^T S_{t+1}^\times B L_t + (A - K_t D)^T S_{t+1}^e (A - K_t D) \right] e_t. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Demonstrația este completă acum; legea de control se definește prin intermediul relațiilor [19]

$$\begin{cases} u_t = -L_t \hat{x}_t, \\ L_t = \left[R + B^T S_{t+1}^\times B + \sum_i C_i^T (S_{t+1}^\times + S_{t+1}^e) C_i \right]^{-1} B^T S_{t+1}^\times A, \\ S_t^\times = Q_t + A^T S_{t+1}^\times (A - B L_t) + \sum_i H_i^T K_i^T S_{t+1}^e K_i H_i, \\ S_t^e = A^T S_{t+1}^\times B L_t + (A - K_t D)^T S_{t+1}^e (A - K_t D), \\ s_t = \text{tr} \left[S_{t+1}^\times \Omega^\mu + S_{t+1}^e (\Omega^\mu + \Omega^\sigma + K_i \Omega^\omega K_i^T) \right] + s_{t+1}, \\ S_n^\times = Q_n, S_n^e = 0, s_n = 0. \end{cases} \quad (4.68)$$

În cazul în care $C_1, \dots, C_c = 0$ și $H_1, \dots, H_d = 0$, ecuațiile (4.68) sunt identice cu (4.54). Zgomotul intern σ , ca și termenii adiționali de tip zgomot μ și ω , nu afectează în mod direct calculul matricelor de amplificare L . În schimb, toți termenii de tip zgomot influențează calculul amplificărilor K , care, la rândul lor, influențează L .

Sistemul (4.53) poate fi transformat într-unul complet observabil alegând $D = I$, $\Omega^\omega = \Omega^\sigma = 0, D_1, \dots, D_d = 0$; rezultă $K = A$. Pentru a obține un controller optimal pentru cazul sistemului complet observabil, trebuie să presupunem că x_t este cunoscut în momentul în care se generează u_t . În acest caz, funcția cost va fi $x_t^T S_t x_t + s_t$ și termenul ce trebuie minimizat în raport cu $u_t = \pi(x_t)$ devine

$$E[V_{t+1}] = (Ax_t + Bu_t)^T S_{t+1} (Ax_t + Bu_t) + u_t^T \left(\sum_i C_i^T S_{t+1} C_i \right) u_t + \text{tr}[S_{t+1} \Omega^\mu] + s_{t+1}. \quad (4.69)$$

În concluzie, ecuațiile finale asociate controllerului sunt [19]

$$\begin{cases} u_t = -L_t x_t, \\ L_t = \left(R + B^T S_{t+1}^\times B + \sum_i C_i^T S_{t+1}^\times C_i \right)^{-1} B^T S_{t+1}^\times A, \\ S_t = Q_t + A^T S_{t+1} (A - BL_t), \\ s_t = \text{tr}(S_{t+1} \Omega^\mu) + s_{t+1}, \\ S_n = Q_n, s_n = 0. \end{cases} \quad (4.70)$$

4.5. CONTROLUL OPTIMAL NELINIAR BAZAT PE ECUAȚII HAMILTON-JACOBI

În general, o problemă de control optimal pentru un sistem neliniar se rezolvă cu ajutorul unei funcții cost quadractice. În cadrul lucrării [21], se consideră o funcție ce este quadratică în cadrul controlului dar neliniară în ceea ce privește starea; se obține o ecuație diferențială de tip Hamilton-Jacobi (HJ), care, de cele mai multe ori, este dificil de

rezolvat. De aceea, în [21], ecuația HJ se rezolvă utilizând metoda gradientului funcției cost. Cu alte cuvinte, ecuația diferențială HJ se transformă într-o serie de ecuații algebrice, acestea fiind mult mai ușor de rezolvat.

Se consideră următorul sistem neliniar (liniar în raport cu vectorul de control, dar neliniar în raport cu vectorul de stare) [21]

$$\frac{dx(t)}{dt} = g(x(t)) + B(x(t))u(t), x(0) = x_0, \quad (4.71)$$

unde $g: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n$, $B: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^{n \times m}$, $x \in \mathcal{R}^n$ și $u \in \mathcal{R}^m$; se presupune că g și B sunt derivabile în raport cu x . De asemenea, se consideră următoarea funcție cost nequadratică (quadratică în raport cu vectorul de comandă u dar nequadratică în raport cu vectorul de stare x)

$$J(x, u) = \int_0^{\infty} [l(x) + u^T R(x) u] d\tau, \quad (4.72)$$

în care $l(x)$ este o funcție derivabilă, $R(x)$ este o matrice simetrică și pozitiv definită. Problema de optimizare ce trebuie rezolvată constă în determinarea unei legi de comandă $u(t)$ care să minimizeze funcția cost (4.72) pentru un sistem cu dinamica (4.71).

În [22], pentru rezolvarea problemei de optimizare, se obține următoarea ecuație Hamilton-Jacobi

$$\frac{1}{4} \frac{\partial V^T(x)}{\partial x} B(x) R^{-1}(x) \frac{\partial V(x)}{\partial x} - g^T(x) \frac{\partial V(x)}{\partial x} - l(x) = 0, \quad (4.73)$$

unde $V: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^+$ – funcție derivabilă.

Pentru ecuația HJ de mai sus, se definește controllerul optimal [21]

$$u^* = -\frac{1}{2} R^{-1}(x) B^T(x) \frac{\partial V(x)}{\partial x}. \quad (4.74)$$

Deoarece $R(x)$ este simetrică și pozitiv definită, ea este inversabilă; mai mult, $\frac{\partial V(x)}{\partial x}$ este vector coloană. Astfel, în loc să determinăm $V(x)$ din ecuația (4.73), se va deter-

$$\min_x \frac{\partial V(x)}{\partial x}.$$

În proiectarea controllerului, se introduce o versiune generalizată a lemei Liu & Leake [23], [21]. Aceasta este prezentată mai jos.

Lema [21]

Fie $x \in \mathcal{R}^n$ – vector n -dimensional, $z(x)$ și $y(x)$ – funcții vectoriale r -dimensionale și $\alpha(x)$ – funcție reală, iar N – o matrice reală, simetrică și pozitiv semi-definită. $z(x)$ satisface condiția

$$z^T(x)Nz(x) + 2z^T(x)y(x) + \alpha(x) = 0 \quad (4.75)$$

dacă și numai dacă

$$y^T(x)N^+y(x) \geq \alpha(x), \quad (4.76)$$

unde N^+ este pseudo-inversa matricei N . În acest caz, soluția ecuației (4.75) este

$$z(x) = -N^+y(x) + G^+a(x)\beta(x), \quad (4.77)$$

în care $\beta(x) = [y^T(x)N^+y(x) - \alpha(x)]^{1/2}$, G – o matrice pătratică, $N = G^T G$ și $a(x)$ – vector arbitrar (aleator) cu norma egală cu 1.

Demonstrație [21]

Suficiența teoremei poate fi demonstrată prin substituție directă. Înlocuind ecuația (4.77) în (4.75), rezultă

$$\left(-y^T N^+ + \beta^T a^T G^{+T}\right) N \left(-N^+ y + G^+ a \beta\right) + 2 \left(-y^T N^+ + \beta^T a^T G^{+T}\right) y + \alpha = 0. \quad (4.78)$$

După calcule, se obține

$$y^T N^+ y - 2\beta^T a^T G^{+T} N N^+ y - \beta^T a^T G^{+T} N G^+ a \beta - 2y^T N^+ y + 2\beta^T a^T G^{+T} y + \alpha = 0. \quad (4.79)$$

Utilizând proprietățile pseudo-inversei $N^+ N N^+ = N^+$, $A^{T+} = A^{+T}$, $G G^+ a = a$, al doilea termen din membrul stâng se scrie succesiv [21]

$$\begin{aligned}
 & -2\beta^T a^T G + G^T G (G^T G)^+ y = -2\beta^T (GG^+ a)^T GG^+ G^{T+} y = \\
 & = -2\beta^T a^T GG^+ G^{T+} y = -2\beta^T (G^{+T} G^T a)^T G^{+T} y = -2\beta^T a^T G^{+T} y;
 \end{aligned}
 \tag{4.80}$$

se simplifică astfel al cincilea termen din membrul stâng; se obține [21]

$$-y^T N^+ y + \alpha - \beta^T a^T G^{+T} N G^+ a \beta = 0.
 \tag{4.81}$$

Pentru că se presupune că $a(x)$ este imaginea lui G , rezultă $G^{+T} N G^T = G^{+T} G^T G G^+ = I$.

Astfel, al treilea termen din membrul stâng al ecuației (4.81) devine $\beta^T a^T a \beta$; ecuația (4.81) capătă forma

$$-y^T N^+ y + \alpha - \beta^T \beta = 0.
 \tag{4.82}$$

Suficiența teoremei rezultă prin înlocuirea lui $\beta(x)$ în ecuația de mai sus.

Pentru a demonstra că sunt suficiente condițiile, se fac schimbările de variabilă $\hat{z} = Gz$ și $\hat{y} = (G^+)^T y$. Deoarece $y^T N^+ y = |\hat{y}|^2 < \alpha \Rightarrow |\hat{z} + \hat{y}|^2 < 0$ – contradicție. Fie $\hat{v} = \hat{z} + \hat{y}$; utilizând expresia lui $\beta(x)$, din (4.75) rezultă $\hat{v}^T \hat{v} = \beta^2$. Considerând $a = \frac{\hat{v}}{|\hat{v}|}$,

se obține $\hat{v} = a\beta$. Făcând înlocuirile, rezultă

$$\begin{aligned}
 \hat{z} + \hat{y} = a\beta & \Leftrightarrow Gz + (G^+)^T y = a\beta \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow Gz = -(G^+)^T y + a\beta & \Leftrightarrow z = -(G^T G)^+ y + G^+ a\beta.
 \end{aligned}
 \tag{4.83}$$

În continuare, este prezentat un corolar ce rezultă din lema anterioară [23].

Corolar [23], [24]

Fie N – o matrice simetrică și pozitiv definită. $z(x)$ satisface condiția

$$z^T(x)N z(x) + 2z^T(x)y(x) + \alpha(x) = 0
 \tag{4.84}$$

dacă și numai dacă

$$y^T(x)N^{-1}y(x) \geq \alpha(x).
 \tag{4.85}$$

În acest caz, soluția ecuației (4.84) este

$$z(x) = -N^{-1}y(x) + G^{-1}a(x)\beta(x), \quad (4.86)$$

unde

$$\beta(x) = [y^T(x)N^{-1}y(x) - \alpha(x)]^{1/2}; \quad (4.87)$$

G este o matrice nesingulară astfel încât $N = G^T G$ și $a(x)$ este un vector aleator cu norma unitară.

Teoremă [21]

Pentru sistemul (4.71) și funcția cost (4.72), se presupune că $V: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$ este derivabilă de două ori și satisface ecuația (4.73). Fie

$$Q(x) = B(x)R^{-1}(x)B^T(x) \quad (4.88)$$

și

$$\lambda(x) = \sqrt{Q(x)}a(x)\sqrt{g^T(x)Q^+(x)g(x) + l(x)}, \quad (4.89)$$

unde $Q(x)$ este un vector aleator cu normă unitară. Comanda optimală ce asigură minimizarea funcției cost (4.72) este

$$u^*(x) = -R^{-1}(x)B^T(x)Q^+(x)[g(x) + \lambda(x)], \quad (4.90)$$

dacă următoarele condiții sunt satisfăcute

$$Q^+\left(\frac{\partial g}{\partial x^T} + \frac{\partial \lambda}{\partial x^T}\right) + \frac{\partial Q^+}{\partial x^T}[I_n \otimes (g + \lambda)] = \left(\frac{\partial g}{\partial x^T} + \frac{\partial \lambda}{\partial x^T}\right)^T Q^+ + [I_n \otimes (g + \lambda)]\left(\frac{\partial Q^+}{\partial x^T}\right)^T, \quad (4.91)$$

$$Q^+\left(\frac{\partial g}{\partial x^T} + \frac{\partial \lambda}{\partial x^T}\right) + \frac{\partial Q^+}{\partial x^T}[I_n \otimes (g + \lambda)] \geq 0 \quad (4.92)$$

și $a(x)$ și $\frac{\partial V}{\partial x}$ sunt imaginile termenului $\sqrt{B(x)R^{-1}(x)B^T(x)}/2(\forall)x$.

Demonstrație [21]

Utilizând lema 1, ecuația (4.73) cu $z = \frac{\partial V}{\partial x}$, $N = (BR^{-1}B^T / 4)$, $y = -g/2$ și $\alpha = -l$,

rezultă

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} BR^{-1}B^T \right)^+ (-g) + \sqrt{\left(\frac{1}{4} BR^{-1}B^T \right)^T} a \sqrt{\frac{1}{4} g^T \left(\frac{1}{4} BR^{-1}B^T \right)^+ g + l} = \\ &= 2(BR^{-1}B^T)^T g + 2\sqrt{(BR^{-1}B^T)^T} a \sqrt{g^T (BR^{-1}B^T)^+ g + l}. \end{aligned} \quad (4.93)$$

Fie $G = \sqrt{(B(x)R^{-1}B^T(x))} / 2$; din ecuația (4.74), controlul optimal este

$$\begin{aligned} u^* &= -R^{-1}B^T (BR^{-1}B^T)^+ g - R^{-1}B^T \sqrt{BR^{-1}B^T} a \sqrt{g^T (BR^{-1}B^T)^+ g + l} = \\ &= -R^{-1}B^T (BR^{-1}B^T)^+ \left[g + \sqrt{BR^{-1}B^T} a \sqrt{g^T (BR^{-1}B^T)^+ g + l} \right]. \end{aligned} \quad (4.94)$$

Pentru a putea rezolva ecuația (4.73) este nevoie ca V să fie simetrică și pozitiv definită. Folosind (4.88) și (4.89), ecuația (4.93) devine

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2Q^+(x)[g(x) + \lambda(x)]; \quad (4.95)$$

derivata de ordinul 2 a funcției $V(x)$ este

$$\frac{\partial^2 V(x)}{\partial x \partial x^T} = 2Q^+(x) \left(\frac{\partial g(x)}{\partial x^T} + \frac{\partial \lambda(x)}{\partial x^T} \right) + 2 \frac{\partial Q^+}{\partial x^T} \{I_n \otimes [g(x) + \lambda(x)]\}. \quad (4.96)$$

De asemenea $\frac{\partial^2 V(x)}{\partial x \partial x^T} = \left(\frac{\partial^2 V(x)}{\partial x \partial x^T} \right)^T$ și, deci, rezultă că V este o funcție scalară și simetrică. Astfel, din ecuația (4.96) rezultă condiția de simetrie (4.91) și condiția de ne-negativitate (4.92).

4.6. SOLUȚII APROXIMATIVE ALE PROBLEMELOR DE CONTROL OPTIMAL NELINIAR

O metodă inovativă de rezolvare a problemelor de control optimal neliniar este prezentată în [19]. Metoda utilizează înscrierea unor regulatoare liniar-quadractice, solu-

ția convergând către soluția problemei neliniare. Metoda este o versiune modificată a celei ce utilizează o serie de ecuații Riccati [25], [26]. Aceasta transformă dinamica neliniară și funcția obiectiv într-o structură pseudo-liniară și, respectiv, într-o structură de tip quadratic utilizând funcții dependente de stare și control (comandă). La fiecare iterație, aceste funcții sunt evaluate folosindu-se soluțiile de la iterația anterioară, obținându-se astfel o serie de reglatoare quadratice și liniar dependente în timp (problema LQR).

4.6.1. FORMULAREA PROBLEMEI CONTROLULUI OPTIMAL NELINIAR

Problema controlului optimal constă în determinarea a „ n ” funcții (vectori) de control $u(t)$ pentru un set de „ n ” ecuații diferențiale de ordinul 1 [27]

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad (4.97)$$

astfel încât să fie minimizat indicatorul de calitate

$$J = g(x(t_f), t_f) + \int_{t_i}^{t_f} L(x, u, t) dt \quad (4.98)$$

și să fie satisfăcute un număr de „ $n+q$ ” condiții

$$x(t_i) = x_i, h(x(t_f), t_f) = 0. \quad (4.99)$$

Cu alte cuvinte, problema constă în găsirea unei soluții în cadrul problemei de minimizare a funcției cost [27]

$$J = g(x(t_f), t_f) + w^T h(x(t_f), u(t_f), t_f) + \int_{t_i}^{t_f} L(x, u, t) + \varphi^T (f(x, u, t) - \dot{x}) dt, \quad (4.100)$$

unde φ se numește vector de co-stare, iar w este un multiplicator asociat condițiilor. Constrângerile necesare (cele care decurg din ecuații de tip Euler-Lagrange) sunt

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \varphi}; \dot{\varphi} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial u} = 0, \quad (4.101)$$

în care Hamiltonianul H este [27]

$$H(x, \varphi, u, t) = L(x, u, t) + \varphi^T f(x, u, t). \quad (4.102)$$

Sistemul de ecuații (4.101) se rezolvă împreună cu condițiile de mărginire (4.99) și cu condițiile de transversabilitate

$$\varphi(t_f) = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^T w \right]_{t=t_f}. \quad (4.103)$$

4.6.2. OBȚINEREA ECUAȚILOR RICCATI

Dinamica (4.97) este scrisă în cadrul lucrării [27] sub forma

$$\dot{x} = A(x, t)x + B(x, u, t), \quad (4.104)$$

în timp ce funcția obiectiv (4.98) se scrie astfel:

$$J = \frac{1}{2} x^T(t_f) S(x(t_f), t_f) x(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} [x^T Q(x, t) x + u^T R(x, u, t) u] dt, \quad (4.105)$$

unde A , B , S , Q sunt matrice. Problema de control optimal se definește prin intermediul dinamicii neliniare (4.104) și a indicatorului de calitate (4.105). Se consideră cunoscută starea inițială x_i , în timp ce condiția finală (h din ecuația (4.99)) poate avea diverse forme. Problema optimală definită prin intermediul ecuațiilor (4.104) și (4.105) se reduce la o serie de regulatoare quadratice, liniar dependente în timp, care se definesc prin evaluarea matricelor ce depind de vectorii de stare și, respectiv, de control utilizând soluția de la iterația anterioară [27].

Primul pas este rezolvarea „problemei 0”, adică

$$\begin{cases} \dot{x}^{(0)} = A(x_i, t)x^{(0)} + B(x_i, 0, t)u^{(0)}, \\ J = \frac{1}{2}x^{(0)T}(t_f)S(x_i, t_f)x^{(0)}(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_i}^{t_f} [x^{(0)T}Q(x_i, t)x^{(0)} + u^{(0)T}R(x_i, 0, t)u^{(0)}]dt. \end{cases} \quad (4.106)$$

Problema este una clasică de minimizare a lui J , cunoscându-se toate matricele A , B , S și Q ; prin rezolvarea sa, se determină $x^{(0)}(t)$ și $u^{(0)}(t), t \in [t_i, t_f]$.

Generalizând, rezolvarea problemei „ k ” are la bază ecuațiile [27]

$$\begin{aligned} \dot{x}^{(k)} &= A(x^{(k-1)}(t), t)x^{(k)} + B(x^{(k-1)}(t), u^{(k-1)}(t), t)u^{(k)}, \\ J &= \frac{1}{2}x^{(k)T}(t_f)S(x^{(k-1)}(t), t)x^{(k)}(t_f) + \\ &+ \frac{1}{2}\int_{t_i}^{t_f} [x^{(k)T}Q(x^{(k-1)}(t), t)x^{(k)} + u^{(k)T}R(x^{(k-1)}(t), u^{(k-1)}(t), t)u^{(k)}]dt; \end{aligned} \quad (4.107)$$

$x^{(k-1)}$ și $u^{(k-1)}$ sunt soluțiile problemei „ $k-1$ ” (de la iterația anterioară). Rezolvarea problemei „ k ” conduce la obținerea vectorilor $x^{(k)}(t)$ și $u^{(k)}(t), t \in [t_i, t_f]$.

Alegerea numărului de iterații se face în funcție de satisfacerea criteriului de convergență [27]

$$\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_{\infty} = \max_{t \in [t_i, t_f]} \left\{ |x_j^{(k)}(t) - x_j^{(k-1)}(t)|, j = 1, \dots, n \right\} \leq \varepsilon, \quad (4.108)$$

în care ε este toleranța dorită. Cu alte cuvinte, procesul ia sfârșit atunci când modificarea tuturor componentelor stării, de la un pas la altul, este mai mică ca ε .

4.6.3. SOLUȚIA LA PROBLEMA LQR UTILIZÂND MATRICEA DE TRANZIȚIE A STĂRII

S-a demonstrat mai sus că problema optimală de control neliniar se reduce la rezolvarea unor probleme LQR, acest lucru realizându-se prin intermediul matricei de tranziție a stării. Metoda este prezentată în lucrarea [28].

Se pornește de la dinamica

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad (4.109)$$

funcția cost ce trebuie minimizată fiind

$$J = \frac{1}{2}x^T(t_f)S(t_f)x(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} [x^T Q(t)x + u^T R(t)u] dt, \quad (4.110)$$

în care Q , R și S sunt pozitiv definite. Hamiltonianul asociat integrandului funcției J este

$$H = \frac{1}{2}[x^T Q(t)x + u^T R(t)u] + \varphi^T [A(t)x + B(t)u], \quad (4.111)$$

iar condițiile de optimalitate sunt [27]

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad (4.112)$$

$$\dot{\varphi} = -Q(t)x - A^T(t)\varphi, \quad (4.113)$$

$$R(t)u + B^T(t)\varphi = 0. \quad (4.114)$$

Din (4.114) rezultă

$$u = -R^{-1}(t)B^T(t)\varphi, \quad (4.115)$$

care, înlocuită în (4.112) și (4.113), conduce la [27]

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)\varphi, \\ \dot{\varphi} = -Q(t)x - A^T(t)\varphi, \end{cases} \quad (4.116)$$

sau, în variantă matriceală,

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) & -B(t)R^{-1}(t)B^T(t) \\ -Q(t) & -A^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \varphi \end{bmatrix}. \quad (4.117)$$

Ecuția (4.117) corespunde unui sistem de ecuații diferențiale liniare, soluția fiind [27]

$$\begin{cases} x(t) = \Phi_{xx}(t_i, t)x_i + \Phi_{xp}(t_i, t)\varphi_i, \\ \varphi(t) = \Phi_{\varphi x}(t_i, t)x_i + \Phi_{\varphi\varphi}(t_i, t)\varphi_i, \end{cases} \quad (4.118)$$

unde funcțiile $\Phi_{xx}, \Phi_{xp}, \Phi_{\varphi x}, \Phi_{\varphi\varphi}$ sunt componentele matricei de tranziție ce rezultă prin integrarea dinamicii [27]

$$\begin{bmatrix} \dot{\Phi}_{xx} & \dot{\Phi}_{xp} \\ \dot{\Phi}_{\varphi x} & \dot{\Phi}_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) & -B(t)R^{-1}(t)B^T(t) \\ -Q(t) & -A^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{xx} & \Phi_{xp} \\ \Phi_{\varphi x} & \Phi_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \quad (4.119)$$

cu condițiile inițiale

$$\begin{cases} \Phi_{xx}(t_i, t) = \Phi_{\varphi\varphi}(t_i, t) = I_{n \times n}, \\ \Phi_{xp}(t_i, t) = \Phi_{\varphi x}(t_i, t) = 0_{n \times n}. \end{cases} \quad (4.120)$$

Dacă se cunosc x_i și φ_i , este posibil să se calculeze $x(t)$ și $\varphi(t)$ cu ecuațiile (4.118) și apoi $u(t)$ cu ecuația (4.115). Se consideră cunoscută condiția inițială și, în acest caz, calculul lui φ_i depinde doar de condiția finală, lucru care este definit în trei feluri în lucrarea [27]:

Problemă cu constrângeri majore

Valoarea stării finale este $x(t_f) = x_f$ și, astfel, ecuațiile (4.110) nu mai contează pentru S . Valoarea lui φ_i se determină scriind (4.118) astfel:

$$x_f = \Phi_{xx}(t_i, t_f)x_i + \Phi_{xp}(t_i, t_f)\varphi_i, \quad (4.121)$$

cu soluția [27]

$$\varphi_i(x_i, x_f, t_i, t_f) = \Phi_{xp}^{-1}(t_i, t_f)(x_f - \Phi_{xx}(t_i, t_f)x_i). \quad (4.122)$$

Problemă cu constrângeri minore

În acest caz, starea finală nu se cunoaște și S din ecuația (4.110) este o matrice $(n \times n)$ pozitiv definită. Condițiile de transversabilitate (4.103) satisfac relația [27]

$$\varphi(t_f) = S(t_f) \times (t_f), \tag{4.123}$$

relație ce poate fi utilizată pentru determinarea lui φ_i ; astfel, cu relațiile

$$\begin{cases} x(t_f) = \Phi_{xx}(t_i, t_f)x_i + \Phi_{x\varphi}(t_i, t_f)\varphi_i, \\ S(t_f)x(t_f) = \Phi_{\varphi x}(t_i, t_f)x_i + \Phi_{\varphi\varphi}(t_i, t_f)\varphi_i, \end{cases} \tag{4.124}$$

se obține

$$\varphi_i(x_i, t_i, t_f) = [\Phi_{\varphi x}(t_i, t_f) - S(t_f)\Phi_{xx}(t_i, t_f)]^{-1} \times [S(t_f)\Phi_{xx}(t_i, t_f) - \Phi_{\varphi x}(t_i, t_f)]x_i. \tag{4.125}$$

Problemă cu constrângeri mixte

În acest caz, o parte din componentele stării finale sunt cunoscute, iar o altă parte nu se cunoaște. Fără a micșora generalitatea, se consideră $x = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$, unde y cuprinde cele „ p ” componente cunoscute la momentul final $y(t_f) = y_f$, iar z conține celelalte

$n-p$ componente. Co-starea φ se descompune și ea astfel: $\varphi = \begin{bmatrix} \xi \\ \mu \end{bmatrix}$. Cu acestea, S din ecuația (4.110) de înmulțește la stânga și la dreapta cu $z(t_f)$ și condiția (4.103) devine $\mu(t_f) = S(t_f)z(t_f)$. Ecuațiile (4.118) devin

$$\begin{bmatrix} y(t_f) \\ z(t_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{yy} & \Phi_{yz} \\ \Phi_{zy} & \Phi_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_i \\ z_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi_{y\xi} & \Phi_{y\mu} \\ \Phi_{z\xi} & \Phi_{z\mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_i \\ \mu_i \end{bmatrix} \tag{4.126}$$

și

$$\begin{bmatrix} \xi(t_f) \\ \mu(t_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{\xi y} & \Phi_{\xi z} \\ \Phi_{\mu y} & \Phi_{\mu z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_i \\ z_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi_{\xi\xi} & \Phi_{\xi\mu} \\ \Phi_{\mu\xi} & \Phi_{\mu\mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_i \\ \mu_i \end{bmatrix}. \tag{4.127}$$

Din (4.126) rezultă [27]

$$\xi_i = \Phi_{y\xi}^{-1} [y_f - \Phi_{yy}y_i - \Phi_{yz}z_i] - \Phi_{y\xi}^{-1}\Phi_{y\mu}\mu_i, \tag{4.128}$$

care, înlocuită în expresia lui $z(t_f)$ – ecuația (4.126), conduce la

$$z_f = (\Phi_{zy} - \Phi_{z\xi} \Phi_{y\xi}^{-1} \Phi_{yy}) y_i + (\Phi_{zz} - \Phi_{z\xi} \Phi_{y\xi}^{-1} \Phi_{yz}) z_i + \Phi_{z\xi} \Phi_{y\xi}^{-1} y_f + (\Phi_{z\mu} - \Phi_{z\xi} \Phi_{y\xi}^{-1} \Phi_{y\mu}) \mu_i. \quad (4.129)$$

Înlocuind ecuațiile (4.128) și (4.129) în (4.127), rezultă

$$\mu_i(x_i, y_f, t_i, t_f) = (\tilde{\Phi}_{\mu\mu})^{-1} W(x_i, y_f, t_i, t_f), \quad (4.130)$$

unde

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{\mu\mu} &= \Phi_{\mu\mu} - \Phi_{\mu\xi} \Phi_{y\xi}^{-1} \Phi_{y\mu} - S(\Phi_{z\mu} - \Phi_{z\xi} \Phi_{y\xi}^{-1} \Phi_{y\mu}), \\ W(x_i, y_f, t_i, t_f) &= [S(\Phi_{zy} - \Phi_{z\xi} \Phi_{y\xi}^{-1} \Phi_{yy}) - \Phi_{\mu y} + \Phi_{\mu\xi} \Phi_{y\xi}^{-1} \Phi_{yy}] y_i + \\ &+ [S(\Phi_{zz} - \Phi_{z\xi} \Phi_{y\xi}^{-1} \Phi_{yz}) + \Phi_{\mu z} + \Phi_{\mu\xi} \Phi_{y\xi}^{-1} \Phi_{yz}] z_i + \\ &+ [S(\Phi_{z\xi} \Phi_{y\xi}^{-1}) - \Phi_{\mu\xi} \Phi_{y\xi}^{-1}] y_f. \end{aligned} \quad (4.131)$$

După determinarea lui μ_i, ξ_i se calculează cu (4.128) și, deci, întreaga co-stare

$$\varphi_i \text{ este determinată; } \varphi_i(x_i, y_f, t_i, t_f) = \begin{bmatrix} \xi_i(x_i, y_f, t_i, t_f) \\ \mu_i(x_i, y_f, t_i, t_f) \end{bmatrix}.$$

4.7. CONTROLUL OPTIMAL NELINIAR BAZAT PE ECUAȚII HAMILTON-JACOBI-BELLMAN ȘI EULER-LAGRANGE

În cadrul acestui subcapitol sunt prezentate câteva metode de rezolvare a problemei controlului optimal neliniar utilizând ecuații Hamilton-Jacobi-Bellman (HBJ), Euler-Lagrange (EL) sau formula Sontag [29].

Se consideră dinamica neliniară

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, f(0) = 0, \quad (4.132)$$

în care $x \in \mathcal{R}^n$ este vectorul de stare, $u \in \mathcal{R}^m$ – vectorul de control, $f(x): \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n$ și $g(x): \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^{n \times m}$; f și g sunt funcții diferentiabile. Rezolvarea problemei de control optimal neliniar constă în determinarea vectorului de comandă u care asigură minimi-

zarea unui indicator de calitate, adică

$$\inf_u \int_0^{\infty} (g(x) + u^T u) dt, \quad (4.133)$$

unde $q(x)$ este funcție continuă și diferențiabilă, pozitiv semi-definită, iar perechea $[f, q]$ este detectabilă.

4.7.1. METODĂ BAZATĂ PE ECUAȚII HAMILTON-JACOBI-BELLMAN

Problema optimală prezentată mai sus se reduce la rezolvarea ecuației diferențiabile Hamilton-Jacobi-Bellman [28]

$$V_x^* f - \frac{1}{4} (V_x^* g g^T V_x^{*T}) + g(x) = 0, \quad (4.134)$$

unde $V_x = \frac{\partial V}{\partial x} = \left[\frac{\partial V}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial V}{\partial x_n} \right]$, V^* este valoarea funcției ce asigură condiția (4.133),

adică [29]

$$V^*(x(t)) = \inf_u \int_t^{\infty} (g(x(\tau)) + u(\tau)^T u(\tau)) d\tau. \quad (4.135)$$

Dacă există o funcție continuă, diferențiabilă, pozitiv definită, soluție a ecuației (4.134), atunci comanda optimală se obține de forma

$$u^* = -\frac{1}{2} g^T V_x^{*T}. \quad (4.136)$$

Din păcate, rezolvarea ecuației HJB (4.134) este extrem de dificil de făcut.

4.7.2. METODĂ BAZATĂ PE ECUAȚII EULER-LAGRANGE

O altă soluție pentru problema optimală neliniară, asociată sistemului (4.132), se bazează pe ecuația EL. Problema de rezolvat este

$$\inf_u \int_0^T (g(x) + u^T u) dt + \psi(x(T)), x(0) = x_0. \quad (4.137)$$

În antiteză cu ecuația (4.133), condiția inițială este prezentată explicit, nefiind necesar ca soluția să fie de forma unei legi de control ce depinde de stare. Este nevoie de rezolvarea următoarelor ecuații Euler-Lagrange [29]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= H_\lambda(x, u^*, \lambda), \\ \dot{\lambda} &= -H_x(x, u^*, \lambda), \\ u^* &= \operatorname{argmin}_u H(x, u, \lambda), \end{aligned} \quad (4.138)$$

unde $H(x, u, \lambda) = g(x) + u^T u + \lambda^T [f(x) + g(x)u]$ este funcția Hamiltonian. Rezolvarea sistemului de ecuații (4.138) se face cu ajutorul condiției inițiale $x(0) = x_0$ și, respectiv, a celei finale $\lambda(T) = \psi_x^T(x(T))$.

4.7.3. METODĂ BAZATĂ PE FUNCȚII LIAPUNOV ȘI FORMULA SONTAG

O funcție Liapunov, continuă, diferențiabilă, pozitiv definită, $V : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}_+$ are forma [29], [30], [31]

$$\inf_u [V_x(x)f(x) + V_x(x)g(x)u] < 0. \quad (4.139)$$

Pentru a vedea dacă problema optimală are soluție, se calculează derivata funcției V :

$$\dot{V}(x) = V_x [f(x) + g(x)u]. \quad (4.140)$$

Alegând convenabil u , se poate asigura condiția $\dot{V} < 0$; aceasta coincide cu ecuația

(4.139); o astfel de metodă de determinare a lui u utilizează formula Sontag.

În [29] se demonstrează că existența unei funcții Liapunov V pentru sistemul (4.132) este echivalentă cu existența unei legi de control asimptotic stabilizatoare $u = b(x)$ care este continuă $(\forall)x \neq 0$ [30]; $b(x)$ poate fi calculată cu ajutorul funcțiilor f , g și V . Formula Sontag [32] este probabil cea mai importantă formulă pentru proiectarea unui controller optimal asociat sistemelor neliniare cu dinamica (4.132). O variantă a acestei formule a fost introdusă în [33]

$$u = \begin{cases} - \left[\frac{V_x f + \sqrt{(V_x f)^2 + q(x)(V_x g g^T V_x^T)}}{V_x g g^T V_x^T} \right] g^T V_x^T, & V_x g \neq 0, \\ 0 & , V_x g = 0. \end{cases} \quad (4.141)$$

Considerând că există o funcție scalară $\lambda(x)$ astfel încât $V_x^* = \lambda(x)V_x, (\forall)x$, controllerul (4.136) are soluția

$$u^* = -\frac{1}{2} g^T V_x^T = -\frac{\lambda(x)}{2} g^T V_x^T; \quad (4.142)$$

$\lambda(x)$ poate fi calculată înlocuind $V_x^* = \lambda(x)V_x$ în ecuația diferențială HJB (ecuația (4.134)) [29]

$$\lambda(x)V_x f - \frac{\lambda^2(x)}{4}(V_x g g^T V_x^T) + q(x) = 0. \quad (4.143)$$

Rezolvarea ecuației (4.143) conduce la soluția

$$\lambda(x) = \frac{2V_x f + 2\sqrt{(V_x f)^2 + q(x)(V_x g g^T V_x^T)}}{V_x g g^T V_x^T}; \quad (4.144)$$

eliminând $\lambda(x)$ între ecuațiile (4.142) și (4.144), rezultă [29]

$$u^* = \begin{cases} - \left[\frac{V_x f + \sqrt{(V_x f)^2 + q(x)(V_x g g^T V_x^T)}}{V_x g g^T V_x^T} \right] g^T V_x^T, & V_x g \neq 0, \\ 0 & , V_x g = 0, \end{cases} \quad (4.145)$$

aceasta fiind exact formula lui u (ecuația (4.141)).

Bibliografie capitol

- [1] Lungu, M. Sisteme de conducere a zborului. Editura Sitech, Craiova, 2008.
- [2] Lungu, R., Lungu, M. *On-line Parametrical Identification and Discrete Optimal Command of the Flying Objects*. A 6-a Conferință Internațională de Sisteme Electromecanice și Energetice, 2-5 septembrie 2007, Chișinău, Republica Moldova.
- [3] Jemai, W., Jerbi, H., Abdelkrim, M., Isaac, D., *Synthesis of an approximate feedback nonlinear control based on optimization methods*, WSEAS Transactions on Systems and Control, vol. 5, nr. 8, 2010.
- [4] Lungu, M. *Algoritmi și structuri pentru identificarea, estimarea și conducerea zborului aeronavelor și rachetelor*. Editura Sitech, Craiova, 2013.
- [5] Choi, H., Lim, J., *Stabilizing a class of nonlinear system based on approximate feedback linearization*, IEICE Trans. Fund. vol. E88-A, 2005, pag. 1626-1630.
- [6] Doyle, F. J., Allgower, F., Morari, M. *A normal form approach to approximate input-output linearization of maximum phase nonlinear SISO systems*, IEEE Transactions on Automatic Control. vol. 41, 1996, pag. 305-310.
- [7] Guardabassi, G.O., S. Savaresi, M., *Approximate linearization via feedback, An overview*. Automatica. vol. 37, 2001, pag. 1-15.
- [8] Johansen, T., Hunt, K., *A Computational Approach to Approximate Input/State Feedback Linearization*, Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control. 2000, pag. 4467-4472.
- [9] Bortoff, S.A., *Approximate state-feedback linearization using spline functions*, Automatica. vol. 33, 1997, pag. 1449-1458.
- [10] Son, J.W., Lim, J.T., *Stabilization of Approximately Feedback Linearizable Systems Using Singular Perturbation*, IEEE Transactions on Automatic Control. vol. 53, 2008, pag. 1499-1503.
- [11] Jemai, W.J., Jerbi, H., Abdelkrim, M.N., *A method based on the Monte Carlo optimization schemes for the control of nonlinear polynomial systems*, 6th

- WSEAS International Conference on Dynamical Systems and Control, 2010.
- [12] Brewer, J.W., *Kronecker products and matrix calculus in systems theory*, IEEE Trans. Circ. Syst. vol. 25, 1978, pag. 772-781.
- [13] Sontag, E., *Mathematical Control Theory: Deterministic Finite Dimensional Systems*, 2nd ed., Springer, New York. 1998.
- [14] Hromkovic, J., Zamecnikova, I., *Design and Analysis of Randomized Algorithms: Introduction to Design Paradigms*, Texts in Theoretical Computer Science, an EATCS series. Springer, first edition. 2005.
- [15] Liu, J.S. *Monte Carlo Strategies in Scientific Computing*. Springer, 2002.
- [16] Mackeown, P.K., *Stochastic Simulation in Physics*, Springer-Verlag New York, Inc., Secaucus, NJ, USA. 2001.
- [17] https://en.wikipedia.org/wiki/Stochastic_control.
- [18] Chow, G.P. *Analysis and Control of Dynamic Economic Systems*, Wiley, 1976.
- [19] Todorov, E. *Stochastic Optimal Control and Estimation Methods Adapted to the Noise Characteristics of the Sensorimotor System*, capitol in "Methods for Optimal Sensorimotor Control", 2005, pag. 1084-110.
- [20] Davis, M., Vinter, R. *Stochastic modelling and control*. Chapman and Hall, 1985.
- [21] Won, C., Biswas, S. *Optimal Control Using an Algebraic Method for Control-Affine Nonlinear Systems*. International Journal of Control, vol. 80, nr. 9, 2007, pag. 1491-1502.
- [22] Fleming, W., Rishel, R. *Deterministic and Stochastic Optimal Control*, Springer-Verlag, New York, 1975.
- [23] Liu, R.W., Leake, J. *Inverse Lyapunov Problems*, Technical Report No. EE-6510, Department of Electrical Engineering, University of Notre Dame, 1965.
- [24] Sain, M.K., Won, C.H., Spencer Jr., B.F., Liberty, S.R. *Cumulants and Risk-Sensitive Control: A Cost Mean and Variance Theory with Application to Seismic Protection of Structures*, Advances in Dynamic Games and Applications, Annals of the International Society of Dynamic Games, vol. 5, 2000, pag. 427-459.
- [25] Cimen, T., Banks, S. *Global optimal feedback control for general nonlinear systems with nonquadratic performance criteria*, Systems and Control Letters, vol. 53,

- nr. 5, 2004, pag. 327-346.
- [26] Cimen, T., Banks, S. *Nonlinear optimal tracking control with application to super-tankers for autopilot design*, Automatica, vol. 40, nr. 11, 2004, pag. 1845-1863.
- [27] Topputo, F., Bernelli-Zazzera, F. *Approximate Solutions to Nonlinear Optimal Control Problems in Astrodynamics*, ISRN Aerospace Engineering, 2013, pag. 1-7.
- [28] Bryson, A., Ho, Y. *Applied Optimal Control*, JohnWiley & Sons, New York, NY, USA, 1975.
- [29] Primbs, J., Nevistic, V., Doyle, J. *Nonlinear optimal control: a control Lyapunov function and receding horizon perspective*, Asian Journal of Control, vol. 1, nr. 1, 1999, pag. 14-24.
- [30] Artstein, Z. *Stabilization with Relaxed Controls*, Nonlinear Anal., vol. 15, nr. 11, 1983, pag. 1163-117.
- [31] Sontag, E. *A Lyapunov-like Characterization of Asymptotic Controllability*, SIAM J. Contr. Optimiz., vol. 21, nr. 3, 1983, pag. 462-471.
- [32] Sontag, E.D., *A 'Universal' Construction of Artstein's Theorem on Nonlinear Stabilization*, Syst. Contr. Lett., vol. 13, nr. 2, 1989, pag. 117-123.
- [33] Freeman, R., Primbs, J. *Control Lyapunov Functions: New Ideas from and Old Source*, In Proc. Of the 35th IEEE Conf. Decis. Cont., Kobe, Japan, 1996, pag. 926-3931.