

## CAPITOLUL 5

### CONTROLUL ATITUDINII SATELIȚILOR UTILIZÂND METODA BACKSTEPPING

#### 5.1. ROȚI INERȚIALE

Roțile inerțiale (de reacție) RI se utilizează pe scară largă drept actuatoare în cadrul sistemelor de control automat al atitudinii sateliților (S). RI sunt ușor manevrabile și produc rotații mici ale S. Fiind acționate de motoare electrice, nu necesită combustibil și nu produc perturbații, comparativ cu dispozitivele cu jet. RI pot fi controlate atât prin reglarea vitezelor de rotație, cât și prin reglarea cuplului. Un dezavantaj al RI este acela că, pentru efectuarea unor manevre ample, sunt necesare roți de dimensiuni mari, deoarece cuplul creat depinde de dimensiunile roții, fapt ce conduce la creșterea greutateii. Un alt dezavantaj este generat de existența unui prag de saturare. La atingerea pragului de saturare, funcția RI este preluată de dispozitivele cu jet, perioadă de timp în care RI se desaturează.

Cu notațiile  $\omega_s$  – viteza unghiulară de rotație,  $\dot{\omega}_s$  – accelerația unghiulară,  $J_s$  – momentul de inerție,  $K_s = J_s \omega_s$  – momentul cinetic al RI,  $M_c = \dot{K}_s$  – momentul cuplului creat de rotorul motorului electric de antrenare a RI și  $K$  – momentul cinetic al S, în absența momentelor perturbatoare, este îndeplinită relația

$$\dot{K} + \dot{K}_s = 0; \quad (5.1)$$

momentul cuplului creat de rotorul motorului electric de antrenare a RI ( $M_c$ ) produce un cuplu de rotație ( $M$ ) a satelitului egal și de sens contrar ( $M = \dot{K} = -M_c$ ) în jurul axei S paralele cu axa de rotație a RI.

Notând cu  $i_c$  – intensitatea curentului și  $U_c$  – tensiunea (de comandă) în bobina de comandă a motorului electric de acționare a rotorului RI, cu  $R$  și  $L$  – rezistența electrică și inductanța bobinei, se poate exprima ecuația tensiunilor

$$L \frac{di_c}{dt} = -Ri_c + k_s \omega_s + U_c, \quad (5.2)$$

cu  $k_s$  – coeficient de proporționalitate a tensiunii autoinduse cu viteza unghiulară a rotorului motorului de acționare a RI.

## 5.2. CONFIGURAȚII DE ACTUATOARE CU ROȚI INERȚIALE

### 5.2.1. CONFIGURAȚIA STANDARD

Cea mai simplă configurație (standard) este cea formată din trei RI cu axele de rotație paralele cu axele triedrului „satelit” (legat de satelit)  $O_c X_c Y_c Z_c$  (fig. 5.1). Comenzile după cele trei axe sunt independente.

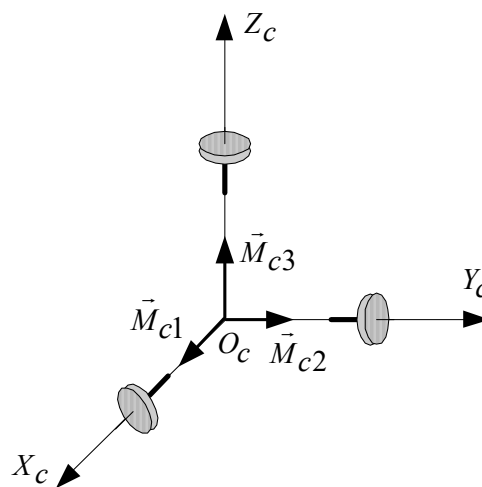


Fig. 5.1. Configurație ortogonală cu trei roți inertiabile

Pentru fiecare RI este valabilă ecuația (5.2); intensitățile curenților și tensiunile sunt  $i_{c1}, i_{c2}, i_{c3}$  și  $U_{c1}, U_{c2}, U_{c3}$ ,  $R_1 = R_2 = R_3 = R$ ,  $L_1 = L_2 = L_3 = L$ ; cu notațiile  $\mathbf{i}_c = [i_{c1} \ i_{c2} \ i_{c3}]^T$ ,  $\mathbf{U}_c = [U_{c1} \ U_{c2} \ U_{c3}]^T$ ,  $\boldsymbol{\omega}_s = [\omega_{s1} \ \omega_{s2} \ \omega_{s3}]^T$ , se poate exprima ecuația vectorială

$$\frac{d\mathbf{i}_c}{dt} = -R_c \mathbf{i}_c + k_s \boldsymbol{\omega}_s + L_c \mathbf{U}_c, \quad (5.3)$$

cu matricele

$$R_c = \begin{bmatrix} \frac{R_1}{L_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R_2}{L_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R_3}{L_3} \end{bmatrix} = \frac{R}{L} I_{3 \times 3}, k_s = \begin{bmatrix} \frac{k'_s}{L_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k'_s}{L_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k'_s}{L_3} \end{bmatrix} = \frac{k'_s}{L} I_{3 \times 3}, L_c = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_3} \end{bmatrix} = \frac{1}{L} I_{3 \times 3}. \quad (5.4)$$

Vectorul cuplurilor de comandă se exprimă astfel

$$\mathbf{M}_c = k_c \mathbf{i}_c, \mathbf{M}_c = [M_{c1} \quad M_{c2} \quad M_{c3}]^T, \quad (5.5)$$

cu

$$k_c = \begin{bmatrix} k'_c & 0 & 0 \\ 0 & k'_c & 0 \\ 0 & 0 & k'_c \end{bmatrix} = k'_c I_{3 \times 3}. \quad (5.6)$$

Înmulțind la stânga ecuația (5.3) cu matricea  $k_c$ , se obține următoarea

$$\dot{\mathbf{M}}_c = -k_c R_c k_c^{-1} \mathbf{M}_c + k_c k_s \boldsymbol{\omega}_s + k_c L_c \mathbf{U}_c. \quad (5.7)$$

Vectorul momentelor după axele triedrului satelit este

$$\begin{bmatrix} M_{cx} \\ M_{cy} \\ M_{cz} \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} M_{c1} \\ M_{c2} \\ M_{c3} \end{bmatrix}, B = I_{3 \times 3}. \quad (5.8)$$

Dezavantajul configurației standard constă în aceea că, dacă una dintre RI se defectează, atunci atitudinea satelitului nu mai poate fi controlată prin momentul după acea axă. De aceea, se utilizează configurații cu patru RI. Drept urmare, reducerea sau anularea cuplului unui RI defectată este compensată prin cuplurile generate de celelalte trei. Dacă turația uneia sau mai multor roți crește până la valoarea maximă, apare fenomenul de saturare. În acest caz, intră în funcțiune dispozitivul cu jeturi, care, prin forțele pe care le crează, produce cupluri de rotație ce modifică atitudinea S. În perioada de funcționare a dispozitivului cu jeturi, se produce desaturarea RI (scăderea turației sub valoarea de saturare).

### 5.2.2. CONFIGURAȚIA PIRAMIDALĂ

Dispunerea RI într-o astfel de configurație este ilustrată în fig. 5.2; roțile 1 și 3 sunt dispuse în planul  $O_c X_c Z_c$  și formează unghiul  $\beta$  cu axa  $O_c X_c$ ; roțile 2 și 4 sunt dispuse în planul  $O_c Y_c Z_c$  și formează unghiul  $\beta$  cu axa  $O_c Y_c$ ; [1].

Cuplurile generate de cele patru RI după axele triedrului satelit sunt

$$\begin{aligned} M_{cx} &= M_{c1} \cos \beta - M_{c3} \cos \beta, \\ M_{cy} &= M_{c2} \cos \beta - M_{c4} \cos \beta, \\ M_{cz} &= M_{c1} \sin \beta + M_{c2} \sin \beta + M_{c3} \sin \beta + M_{c4} \sin \beta. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Deci,

$$\begin{bmatrix} M_{cx} \\ M_{cy} \\ M_{cz} \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} M_{c1} \\ M_{c2} \\ M_{c3} \\ M_{c4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & -\cos\beta & 0 \\ 0 & \cos\beta & 0 & -\cos\beta \\ \sin\beta & \sin\beta & \sin\beta & \sin\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{c1} \\ M_{c2} \\ M_{c3} \\ M_{c4} \end{bmatrix}. \quad (5.10)$$

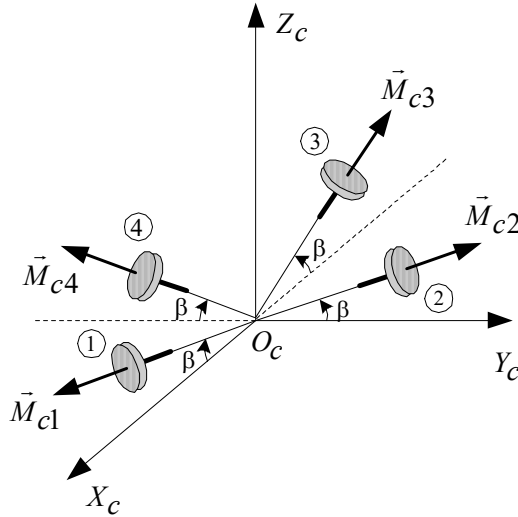


Fig. 5.2. Configurație piramidală cu patru roți inerțiale

De remarcat este faptul că suma pătratelor elementelor de pe fiecare coloană a matricei  $B$  este 1.

Vectorul momentelor de comandă aplicate RI se exprimă din (5.10)

$$\begin{bmatrix} M_{c1} \\ M_{c2} \\ M_{c3} \\ M_{c4} \end{bmatrix} = B^+ \begin{bmatrix} M_{cx} \\ M_{cy} \\ M_{cz} \end{bmatrix}, B^+ = B^T (BB^T)^{-1}. \quad (5.11)$$

După efectuarea calculului, se obține pseudoinversa matricei  $B$ ,

$$B^+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\cos\beta} & 0 & \frac{1}{4\sin\beta} \\ 0 & \frac{1}{2\cos\beta} & \frac{1}{4\sin\beta} \\ -\frac{1}{2\cos\beta} & 0 & \frac{1}{4\sin\beta} \\ 0 & -\frac{1}{2\cos\beta} & \frac{1}{4\sin\beta} \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

și, cu aceasta, din (5.11) rezultă momentele de comandă ale RI

$$\begin{aligned} M_{c1} &= \frac{1}{2\cos\beta} M_{cx} + \frac{1}{4\sin\beta} M_{cz}, M_{c2} = \frac{1}{2\cos\beta} M_{cy} + \frac{1}{4\sin\beta} M_{cz}, \\ M_{c3} &= -\frac{1}{2\cos\beta} M_{cx} + \frac{1}{4\sin\beta} M_{cz}, M_{c4} = -\frac{1}{2\cos\beta} M_{cy} + \frac{1}{4\sin\beta} M_{cz}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Pentru calculul valorii optime a unghiului  $\beta$  de înclinare a axelor RI, se minimizează norma [2]

$$\|\mathbf{M}_c\| = \left[ \sum_{i=1}^4 M_{ci}^2 \right]^{1/2}, \quad (5.14)$$

relație care exprimă minimizarea puterii consumate. Înlocuind (5.13) în (5.14), se obține

$$\|\mathbf{M}_c(\beta)\| = \frac{1}{2\cos^2\beta} (M_{cx}^2 + M_{cy}^2) + \frac{1}{4\sin^2\beta} M_{cz}^2. \quad (5.15)$$

Anulând derivata

$$\frac{d\|\mathbf{M}_c\|}{d\beta} = \frac{\sin\beta}{\cos^2\beta} (M_{cx}^2 + M_{cy}^2) - \frac{\cos\beta}{2\sin^3\beta} M_{cz}^2, \quad (5.16)$$

se obține

$$\operatorname{tg}^4\beta_{opt} = \frac{M_{cz}^2}{2(M_{cx}^2 + M_{cy}^2)}. \quad (5.17)$$

În ipoteza  $M_{cx} = M_{cy} = M_{cz}$ , rezultă  $\operatorname{tg}^4\beta = 1/4$ , adică valoarea optimă a unghiului  $\beta$  este

$$\beta_{opt} = 35.26 \text{ grad.} \quad (5.18)$$

O altă configurație piramidală cu patru roți inertiiale este cea obținută prin rotirea configurației din fig. 5.2 cu unghiul  $\theta$  în jurul axei  $O_cZ_c$ ; proiecția configurației din fig. 5.2 pe planul  $O_cX_cY_c$  este dată în fig. 5.3.

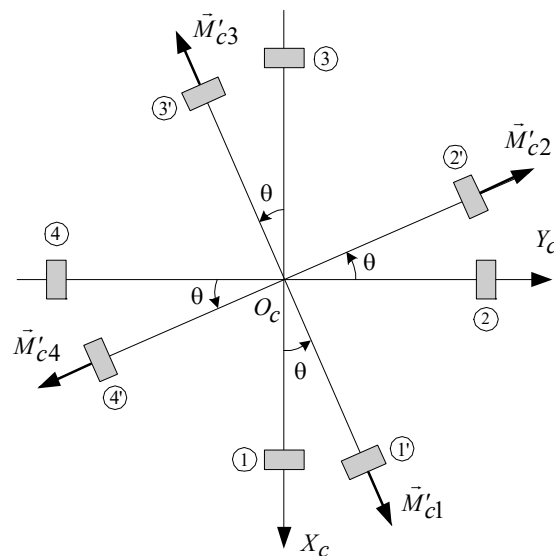


Fig. 5.3. Proiecția configurației piramidale din fig. 5.2 pe planul  $O_cX_cY_c$

Cuplurile generate după axele  $O_c X_c$  și  $O_c Y_c$  sunt

$$\begin{aligned} M_{cx} &= M'_{c1} \cos \theta - M'_{c2} \sin \theta - M'_{c3} \cos \theta + M'_{c4} \sin \theta, \\ M_{cy} &= M'_{c1} \sin \theta + M'_{c2} \cos \theta - M'_{c3} \sin \theta - M'_{c4} \cos \theta, \end{aligned} \quad (5.19)$$

cu  $M'_{ci} = M_{ci} \cos \beta, i = \overline{1, 4}$ ;

$$M_{cz} = M_{c1} \sin \beta + M_{c2} \sin \beta + M_{c3} \sin \beta + M_{c4} \sin \beta. \quad (5.20)$$

Deci,

$$\begin{aligned} M_{cx} &= M_{c1} \cos \beta \cos \theta - M_{c2} \cos \beta \sin \theta - M_{c3} \cos \beta \cos \theta + M_{c4} \cos \beta \sin \theta, \\ M_{cy} &= M_{c1} \cos \beta \sin \theta + M_{c2} \cos \beta \cos \theta - M_{c3} \cos \beta \sin \theta - M_{c4} \cos \beta \cos \theta, \\ M_{cz} &= M_{c1} \sin \beta + M_{c2} \sin \beta + M_{c3} \sin \beta + M_{c4} \sin \beta; \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$\begin{bmatrix} M_{cx} \\ M_{cy} \\ M_{cz} \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} M_{c1} \\ M_{c2} \\ M_{c3} \\ M_{c4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \theta & -\cos \beta \sin \theta & -\cos \beta \cos \theta & \cos \beta \sin \theta \\ \cos \beta \sin \theta & \cos \beta \cos \theta & -\cos \beta \sin \theta & -\cos \beta \cos \theta \\ \sin \beta & \sin \beta & \sin \beta & \sin \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{c1} \\ M_{c2} \\ M_{c3} \\ M_{c4} \end{bmatrix}. \quad (5.22)$$

Pentru  $\theta = 45 \text{ grad}$  și  $\beta = 35.26 \text{ grad}$ , matricea  $B$  are forma

$$B = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/3 & -\sqrt{3}/3 & -\sqrt{3}/3 & \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{3}/3 & \sqrt{3}/3 & -\sqrt{3}/3 & -\sqrt{3}/3 \\ \sqrt{3}/3 & \sqrt{3}/3 & \sqrt{3}/3 & \sqrt{3}/3 \end{bmatrix}. \quad (5.23)$$

### 5.2.3. CONFIGURAȚII DE TIP TETRAEDRU

O structură de tip tetraedru este cea din fig. 5.4 [3]. Conform fig. 5.5,

$$\begin{aligned} M_{cx} &= M_{c1} \cos \beta - M_{c2} \cos \beta \sin \alpha - M_{c3} \cos \beta \sin \alpha, \\ M_{cy} &= M_{c2} \cos \beta \cos \alpha - M_{c3} \cos \beta \cos \alpha, \\ M_{cz} &= -M_{c1} \sin \beta - M_{c2} \sin \beta - M_{c3} \sin \beta + M_{c4}; \end{aligned} \quad (5.24)$$

$$\begin{bmatrix} M_{cx} \\ M_{cy} \\ M_{cz} \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} M_{c1} \\ M_{c2} \\ M_{c3} \\ M_{c4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\cos \beta \sin \alpha & -\cos \beta \sin \alpha & 0 \\ 0 & \cos \beta \cos \alpha & -\cos \beta \cos \alpha & 0 \\ -\sin \beta & -\sin \beta & -\sin \beta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{c1} \\ M_{c2} \\ M_{c3} \\ M_{c4} \end{bmatrix}. \quad (5.25)$$

Valorile optime ale unghiurilor  $\alpha$  și  $\beta$  sunt cele calculate în [3], anume

$$\alpha_{opt} = 30 \text{ grad}, \beta_{opt} = 19.47 \text{ grad}. \quad (5.26)$$

Pentru o configurație de tip tetraedru rotită cu unghiul  $\theta$  în jurul axei  $O_c Z_c$ , matricea  $B$  are forma

$$B = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \theta & -\cos \beta \sin(\alpha + \theta) & -\cos \beta \sin(\alpha - \theta) & 0 \\ \cos \beta \sin \theta & \cos \beta \cos(\alpha + \theta) & -\cos \beta \cos(\alpha - \theta) & 0 \\ -\sin \beta & -\sin \beta & -\sin \beta & 1 \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

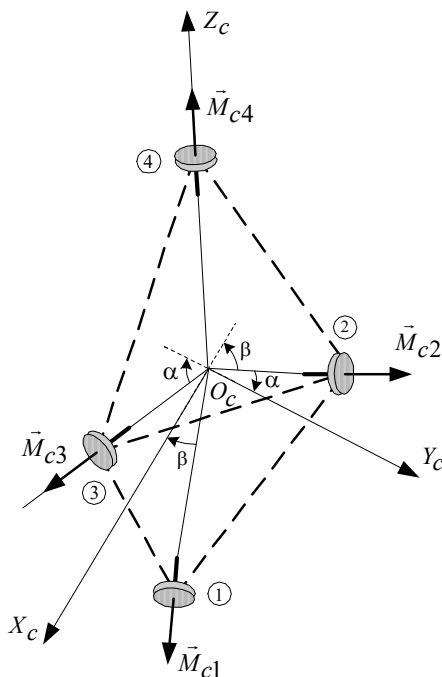


Fig. 5.4. Configurație de tip tetraedru cu patru roți inerțiale

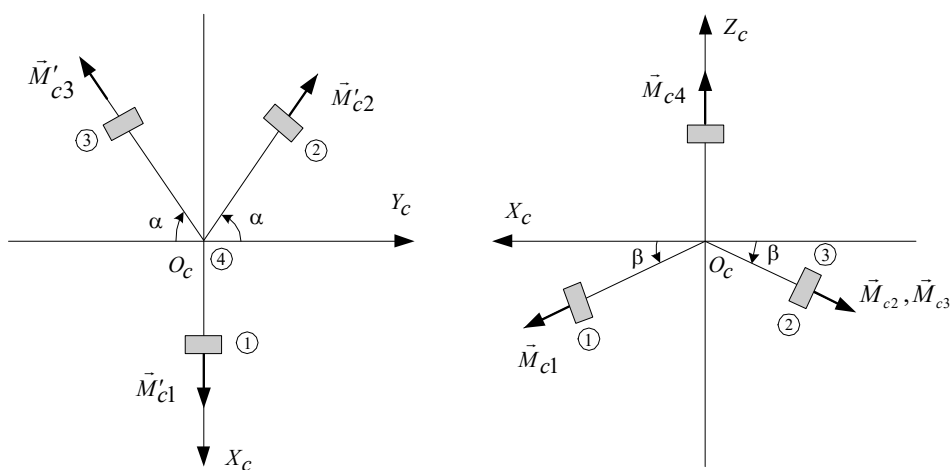


Fig. 5.5. Proiecțiile configurației din fig. 5.4 pe planele  $O_c X_c Y_c$  și  $O_c X_c Z_c$

### 5.3. MODELE DINAMICE ALE SISTEMULUI SATELIT-ACTUATOR CU ROȚI INERȚIALE

Matricele momentelor de inerție ale corpului satelitelui și ale ansamblului rotoarelor

roților inerțiale (celor trei roți inerțiale montate în configurație standard) în raport cu axele triedrului legat de satelit ( $O_c X_c Y_c Z_c$ ) sunt

$$J = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{xy} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{xz} & J_{yz} & J_{zz} \end{bmatrix}, J_s = \begin{bmatrix} J_{s1} & 0 & 0 \\ 0 & J_{s2} & 0 \\ 0 & 0 & J_{s3} \end{bmatrix}. \quad (5.28)$$

Vectorul vitezelor unghiulare ale ansamblului rotoarelor roților inerțiale relativ la triedrul legat de S este  $\boldsymbol{\omega}_s = [\omega_{s1} \ \omega_{s2} \ \omega_{s3}]^T$ , iar vectorul vitezelor unghiulare ale corpului S relativ la triedrul inerțial este  $\boldsymbol{\Omega} = [\Omega_1 \ \Omega_2 \ \Omega_3]^T$ ; vectorul vitezelor unghiulare absolute ale rotoarelor roților inerțiale este

$$\boldsymbol{\omega}_a = \boldsymbol{\omega}_s + \boldsymbol{\Omega}. \quad (5.29)$$

Vectorul moment cinetic creat de ansamblul roților inerțiale relativ la triedrul legat de S este  $\mathbf{K}_s = J_s \boldsymbol{\omega}_s$ , vectorul moment cinetic absolut al corpului S este  $\mathbf{K}_b = J \boldsymbol{\Omega}$ , iar vectorul moment cinetic absolut al sistemului format din satelit și roțile inerțiale este

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_s + \mathbf{K}_b = J_s \boldsymbol{\omega}_s + J \boldsymbol{\Omega}. \quad (5.30)$$

Vectorul moment cinetic absolut creat de ansamblul roților inerțiale este

$$\mathbf{K}_a = J_s (\boldsymbol{\omega}_s + \boldsymbol{\Omega}) = J_s \boldsymbol{\omega}_a. \quad (5.31)$$

Dacă corpul S este rotit cu o viteză unghiulară  $\boldsymbol{\Omega}$ , atunci se produce o variație a momentului cinetic  $\mathbf{K}$ , cu viteza

$$\dot{\mathbf{K}} = \mathbf{M}_p - \boldsymbol{\Omega}^\times \mathbf{K}; \boldsymbol{\Omega}^\times = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

și  $\mathbf{M}_p$  este rezultanta momentelor perturbatoare exterioare; cu (5.30), (5.32) devine

$$J \dot{\boldsymbol{\Omega}} + J_s \dot{\boldsymbol{\omega}}_s = -\boldsymbol{\Omega}^\times (J \boldsymbol{\Omega} + J_s \boldsymbol{\omega}_s) + \mathbf{M}_p. \quad (5.33)$$

Similar, dacă asupra ansamblului roților inerțiale (actuatorului) se aplică un cuplu de comandă  $\mathbf{M}_c$ , atunci se modifică momentul cinetic  $\mathbf{K}_a$ , cu viteza

$$\dot{\mathbf{K}}_a = \mathbf{M}_c - \boldsymbol{\omega}_a^\times \mathbf{K}_a; \quad (5.34)$$

conform (5.31),  $\boldsymbol{\omega}_a^\times \mathbf{K}_a = \boldsymbol{\omega}_a^\times J_s \boldsymbol{\omega}_a = 0$  și ecuația (5.34) devine



$$J_s \dot{\Omega} + J_s \dot{\omega}_s = M_c. \quad (5.35)$$

Alăturând ecuațiile (5.33) și (5.35), se obține modelul dinamic al sistemului format din satelit și actuator

$$\begin{aligned} J\dot{\Omega} + J_s \dot{\omega}_s &= -\Omega^\times (J\Omega + J_s \omega_s) + M_p, \\ J_s \dot{\Omega} + J_s \dot{\omega}_s &= M_c, \end{aligned} \quad (5.36)$$

echivalent cu sistemul

$$\begin{bmatrix} J & J_s \\ J_s & J_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\Omega} \\ \dot{\omega}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Omega^\times (J\Omega + J_s \omega_s) + M_p \\ M_c \end{bmatrix}, \quad (5.37)$$

respectiv cu sistemul

$$\begin{bmatrix} \dot{\Omega} \\ \dot{\omega}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_0^{-1} & -J_0^{-1} \\ -J_0^{-1} & J_0^{-1} + J_s^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\Omega^\times (J\Omega + J_s \omega_s) + M_p \\ M_c \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

cu  $J_0^{-1}$  obținut prin identificarea

$$\begin{bmatrix} J & J_s \\ J_s & J_s \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} J_0^{-1} & -J_0^{-1} \\ -J_0^{-1} & J_0^{-1} + J_s^{-1} \end{bmatrix}. \quad (5.39)$$

Sistemul (5.38) poate fi exprimat și sub forma

$$\begin{aligned} \dot{\Omega} &= J_0^{-1} \left[ -\Omega^\times (J\Omega + J_s \omega_s) + M_p \right] - J_0^{-1} M_c, \\ \dot{\omega}_s &= -J_0^{-1} \left[ -\Omega^\times (J\Omega + J_s \omega_s) + M_p \right] + (J_0^{-1} + J_s^{-1}) M_c. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Modelul dinamic al sistemului satelit – actuator poate fi exprimat în funcție de viteza unghiulară  $\omega = [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]^T$  a S relativ la triedrul orbital;

$$\omega = \Omega - R_0^b \omega_0, \quad (5.41)$$

cu  $R_0^b$  – matrice de rotație exprimată în funcție de atitudinea S, descrisă de quaternioni, relativ la triedrul orbital

$$R_0^b = R_0^b(q, q_4) = (q_4^2 - q^T q) I_{3 \times 3} + 2q^T q - 2q_4 q^\times, \quad (5.42)$$

respectiv de forma

$$R_0^b = \begin{bmatrix} q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_1q_2 + q_3q_4) & 2(q_1q_3 - q_2q_4) \\ 2(q_1q_2 - q_3q_4) & -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_2q_3 + q_1q_4) \\ 2(q_1q_3 + q_2q_4) & 2(q_2q_3 - q_1q_4) & -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \end{bmatrix}, \quad (5.43)$$

iar  $\boldsymbol{\omega}_0 = [0 \quad -\omega_0 \quad 0]^T$  este vectorul viteză unghiulară de rotație a S pe orbită. Atitudinea S relativ la triedrul orbital se exprimă prin unghiurile lui Euler  $\varphi, \theta, \psi$ ;

$$\begin{bmatrix} \varphi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\arcsin r_{32} \\ \arctg \frac{r_{31}}{r_{33}} \\ \arctg \frac{r_{12}}{r_{22}} \end{bmatrix}, \quad (5.44)$$

cu  $r_{ij}, i, j = \overline{1,3}$ , elemente ale matricei  $R_0^b$ .

Cu (5.41), ecuațiile modelului dinamic (5.40) devin

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\omega}} &= J_0^{-1} \left[ -(\boldsymbol{\omega} + R_0^b \boldsymbol{\omega}_0)^\times (J(\boldsymbol{\omega} + R_0^b \boldsymbol{\omega}_0) + J_s \boldsymbol{\omega}_s) + \mathbf{M}_p \right] + \boldsymbol{\omega}^\times R_0^b \boldsymbol{\omega}_0 - J_0^{-1} \mathbf{M}_c, \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_s &= -J_0^{-1} \left[ -(\boldsymbol{\omega} + R_0^b \boldsymbol{\omega}_0)^\times (J(\boldsymbol{\omega} + R_0^b \boldsymbol{\omega}_0) + J_s \boldsymbol{\omega}_s) + \mathbf{M}_p \right] + (J_0^{-1} + J_s^{-1}) \mathbf{M}_c. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Aceste ecuații pot fi exprimate și sub forma simplificată [6]

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\omega}} &= J_0^{-1} \left[ -(\boldsymbol{\omega} - \omega_0 \mathbf{c}_2)^\times (J(\boldsymbol{\omega} - \omega_0 \mathbf{c}_2) + J_s \boldsymbol{\omega}_s) + \mathbf{M}_p \right] - \omega_0 \boldsymbol{\omega}^\times \mathbf{c}_2 - J_0^{-1} \mathbf{M}_c, \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_s &= -J_0^{-1} \left[ -(\boldsymbol{\omega} - \omega_0 \mathbf{c}_2)^\times (J(\boldsymbol{\omega} - \omega_0 \mathbf{c}_2) + J_s \boldsymbol{\omega}_s) + \mathbf{M}_p \right] + (J_0^{-1} + J_s^{-1}) \mathbf{M}_c, \end{aligned} \quad (5.46)$$

unde  $\mathbf{c}_2 = \text{col}2(R_0^b)$  – vector având drept elemente elementele coloanei a doua a matricei  $R_0^b$ ;

$$\mathbf{c}_2 = [r_{12} \quad r_{22} \quad r_{32}]^T;$$

$$\mathbf{c}_2^\times = \begin{bmatrix} 0 & -r_{32} & r_{22} \\ r_{32} & 0 & -r_{12} \\ -r_{22} & r_{12} & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_3^\times = \begin{bmatrix} 0 & -r_{33} & r_{23} \\ r_{33} & 0 & -r_{13} \\ -r_{23} & r_{13} & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.47)$$

Ecuația vectorului atitudine  $\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad q_3]^T$  este de forma

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{F}(\mathbf{q})\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega} + \omega_0 \mathbf{c}_2, \quad (5.48)$$

cu

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1 - \mathbf{q}^T \mathbf{q}}{2} I_{3 \times 3} + \mathbf{q} \mathbf{q}^T + \mathbf{q}^\times \right\}, \quad (5.49)$$

în care

$$\mathbf{q}^\times = \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.50)$$

Dinamica S poate fi descrisă de ecuația neliniară de stare

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u} + \mathbf{p}(\mathbf{x})\mathbf{w}, \quad (5.51)$$

cu  $\mathbf{x}$  – vector de stare,  $\mathbf{u}$  – vector de comandă și  $\mathbf{w}$  – vector perturbator exterior. Există patru variante de alegere a vectorilor de stare și de comandă. Astfel, dacă

$$\mathbf{x} = [\mathbf{q}^T \quad \boldsymbol{\Omega}^T]^T, \mathbf{u} = \mathbf{M}_c, \mathbf{w} = \mathbf{M}_p, \quad (5.52)$$

atunci, conform ecuațiilor (5.48) și (5.40), funcțiile  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  și  $\mathbf{p}(\mathbf{x})$  au formele următoare

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{F}(\mathbf{q})(\boldsymbol{\Omega} + \omega_0 \mathbf{c}_2) \\ -J_0^{-1} \boldsymbol{\Omega}^\times (J\boldsymbol{\Omega} + J_s \boldsymbol{\omega}_s) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ -J_0^{-1} \end{bmatrix}, \mathbf{p}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ J_0^{-1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Ecuația vectorului viteză unghiulară  $\boldsymbol{\omega}_s$  este a doua ecuație (5.40), adică ecuația

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_s = -J_0^{-1} \left[ -\boldsymbol{\Omega}^\times (J\boldsymbol{\Omega} + J_s \boldsymbol{\omega}_s) + \mathbf{w} \right] + (J_0^{-1} + J_s^{-1}) \mathbf{u}. \quad (5.54)$$

În varianta a doua,

$$\mathbf{x} = [\boldsymbol{\omega}_s^T \quad \mathbf{M}_c^T]^T, \mathbf{u} = \mathbf{U}_c, \mathbf{w} = \mathbf{M}_p; \quad (5.55)$$

conform celei de-a doua ecuații (5.40) și ecuației (5.7),

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} -J_0^{-1} \left[ -\boldsymbol{\Omega}^\times (J\boldsymbol{\Omega} + J_s \boldsymbol{\omega}_s) \right] + (J_0^{-1} + J_s^{-1}) \mathbf{M}_c \\ k_c k_s \boldsymbol{\omega}_s - k_c R_c k_c^{-1} \mathbf{M}_c \end{bmatrix}, \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ k_c L_c \end{bmatrix}, \mathbf{p}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -J_0^{-1} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Ecuația vectorului viteză unghiulară  $\boldsymbol{\Omega}$  este prima ecuație (5.40), adică ecuația

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = J_0^{-1} \left[ -\boldsymbol{\Omega}^\times (J\boldsymbol{\Omega} + J_s \boldsymbol{\omega}_s) + \mathbf{w} \right] - J_0^{-1} \mathbf{u}. \quad (5.57)$$

În varianta a treia

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}^T & \boldsymbol{\omega}^T \end{bmatrix}^T, \mathbf{u} = \mathbf{M}_c, \mathbf{w} = \mathbf{M}_p; \quad (5.58)$$

conform ecuației (5.48) și primei ecuații (5.46),

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{F}(\mathbf{q})\boldsymbol{\omega} \\ J_0^{-1} \left[ -(\boldsymbol{\omega} - \omega_0 \mathbf{c}_2)^\times (J(\boldsymbol{\omega} - \omega_0 \mathbf{c}_2) + J_s \boldsymbol{\omega}_s) \right] - \omega_0 \boldsymbol{\omega}^\times \mathbf{c}_2 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ -J_0^{-1} \end{bmatrix}, \mathbf{p}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ J_0^{-1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Ecuția vectorului viteză unghiulară  $\boldsymbol{\omega}_s$  este a doua ecuație (5.46), adică ecuația

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_s = -J_0^{-1} \left[ -(\boldsymbol{\omega} - \omega_0 \mathbf{c}_2)^\times (J(\boldsymbol{\omega} - \omega_0 \mathbf{c}_2) + J_s \boldsymbol{\omega}_s) + \mathbf{w} \right] + (J_0^{-1} + J_s^{-1}) \mathbf{w}. \quad (5.60)$$

În varianta a patra

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_s^T & \mathbf{M}_c^T \end{bmatrix}^T, \mathbf{u} = \mathbf{U}_c, \mathbf{w} = \mathbf{M}_p; \quad (5.61)$$

conform celei de-a doua ecuații (5.46) și ecuației (5.7),

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} -J_0^{-1} \left[ -(\boldsymbol{\omega} - \omega_0 \mathbf{c}_2)^\times (J(\boldsymbol{\omega} - \omega_0 \mathbf{c}_2) + J_s \boldsymbol{\omega}_s) \right] + (J_0^{-1} + J_s^{-1}) \mathbf{M}_c \\ k_c k_s \boldsymbol{\omega}_s - k_c R_c k_c^{-1} \mathbf{M}_c \end{bmatrix}, \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ k_c L_c \end{bmatrix}, \mathbf{p}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -J_0^{-1} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.62)$$

Ecuția vectorului viteză unghiulară  $\boldsymbol{\omega}$  este prima ecuație (5.46), adică ecuația

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = J_0^{-1} \left[ -(\boldsymbol{\omega} - \omega_0 \mathbf{c}_2)^\times (J(\boldsymbol{\omega} - \omega_0 \mathbf{c}_2) + J_s \boldsymbol{\omega}_s) + \mathbf{w} \right] - \omega_0 \boldsymbol{\omega}^\times \mathbf{c}_2 - J_0^{-1} \mathbf{u}. \quad (5.63)$$

În cazul în care actuatorul este constituit din patru roți inerțiale în configurație piramidală sau de tip tetraedru, relațiile de mai sus devin

$$J = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{xy} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{xz} & J_{yz} & J_{zz} \end{bmatrix}, J_s = \begin{bmatrix} J_{s1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{s2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{s3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{s4} \end{bmatrix}; \quad (5.64)$$

$\boldsymbol{\omega}_s = [\omega_{s1} \ \omega_{s2} \ \omega_{s3} \ \omega_{s4}]^T$ ,  $\boldsymbol{\Omega} = [\Omega_1 \ \Omega_2 \ \Omega_3]^T$ . Relația (5.29) devine

$$\boldsymbol{\omega}_a = \boldsymbol{\Omega} + B \boldsymbol{\omega}_s; \quad (5.65)$$

$\boldsymbol{\omega}_a$  – vector ( $3 \times 1$ ). Relațiile următoare devin

$$\mathbf{K} = (B J_s) \boldsymbol{\omega}_s + J \boldsymbol{\Omega}, \quad (5.66)$$

$\mathbf{K}$  – vector ( $3 \times 1$ );

$$\mathbf{K}_a = BJ_s(\boldsymbol{\Omega} + B\boldsymbol{\omega}_s) = (BJ_s)\boldsymbol{\omega}_a, \quad (5.67)$$

$\mathbf{K}_a$  – vector ( $3 \times 1$ );

$$\dot{\mathbf{K}} = \mathbf{M}_p - \boldsymbol{\Omega}^\times \mathbf{K}, \quad (5.68)$$

$\mathbf{M}_p$  – vector ( $3 \times 1$ );

$$J\dot{\boldsymbol{\Omega}} + (BJ_s)\dot{\boldsymbol{\omega}}_s = -\boldsymbol{\Omega}^\times [J\boldsymbol{\Omega} + (BJ_s)\boldsymbol{\omega}_s] + \mathbf{M}_p; \quad (5.69)$$

$$\dot{\mathbf{K}}_a = B\mathbf{M}_c - \boldsymbol{\omega}_a^\times \mathbf{K}_a, \quad (5.70)$$

$\mathbf{M}_c = [M_{c1} \ M_{c2} \ M_{c3} \ M_{c4}]^T$  – vectorul momentelor de comandă ( $4 \times 1$ ) aplicat roților inerțiale;

$$(J_s B^+) \dot{\boldsymbol{\Omega}} + J_s \dot{\boldsymbol{\omega}}_s = \mathbf{M}_c; \quad (5.71)$$

$$J\dot{\boldsymbol{\Omega}} + (BJ_s)\dot{\boldsymbol{\omega}}_s = -\boldsymbol{\Omega}^\times (J\boldsymbol{\Omega} + (BJ_s)\boldsymbol{\omega}_s) + \mathbf{M}_p, \quad (5.72)$$

$$(J_s B^+) \dot{\boldsymbol{\Omega}} + J_s \dot{\boldsymbol{\omega}}_s = \mathbf{M}_c;$$

$$\begin{bmatrix} J & BJ_s \\ J_s B^+ & J_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\Omega}} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\Omega}^\times (J\boldsymbol{\Omega} + (BJ_s)\boldsymbol{\omega}_s) + \mathbf{M}_p \\ \mathbf{M}_c \end{bmatrix}, \quad (5.73)$$

cu matricele  $J(3 \times 3)$ ,  $BJ_s(3 \times 4)$ ,  $J_s B^+(4 \times 3)$  și  $J_s(4 \times 4)$ ;

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\Omega}} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_3 & J_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\Omega}^\times (J\boldsymbol{\Omega} + (BJ_s)\boldsymbol{\omega}_s) + \mathbf{M}_p \\ \mathbf{M}_c \end{bmatrix}; \quad (5.74)$$

$$\begin{bmatrix} J & BJ_s \\ J_s B^+ & J_s \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_3 & J_4 \end{bmatrix}; \quad (5.75)$$

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = J_1 [-\boldsymbol{\Omega}^\times (J\boldsymbol{\Omega} + (BJ_s)\boldsymbol{\omega}_s) + \mathbf{M}_p] + J_2 \mathbf{M}_c, \quad (5.76)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_s = J_3 [-\boldsymbol{\Omega}^\times (J\boldsymbol{\Omega} + (BJ_s)\boldsymbol{\omega}_s) + \mathbf{M}_p] + J_4 \mathbf{M}_c;$$

relațiile (5.41) ÷ (5.44) rămân valabile;

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\omega}} &= J_1 \left[ -(\boldsymbol{\omega} + R_0^b \boldsymbol{\omega}_0)^\times (J(\boldsymbol{\omega} + R_0^b \boldsymbol{\omega}_0) + (BJ_s)\boldsymbol{\omega}_s) + \mathbf{M}_p \right] + \boldsymbol{\omega}^\times R_0^b \boldsymbol{\omega}_0 + J_2 \mathbf{M}_c, \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_s &= J_3 \left[ -(\boldsymbol{\omega} + R_0^b \boldsymbol{\omega}_0)^\times (J(\boldsymbol{\omega} + R_0^b \boldsymbol{\omega}_0) + (BJ_s)\boldsymbol{\omega}_s) + \mathbf{M}_p \right] + J_4 \mathbf{M}_c; \end{aligned} \quad (5.77)$$

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\omega}} &= J_1 \left[ -(\boldsymbol{\omega} - \omega_0 \mathbf{c}_2)^\times (J(\boldsymbol{\omega} - \omega_0 \mathbf{c}_2) + (BJ_s)\boldsymbol{\omega}_s) + \mathbf{M}_p \right] - \omega_0 \boldsymbol{\omega}^\times \mathbf{c}_2 + J_2 \mathbf{M}_c, \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_s &= J_3 \left[ -(\boldsymbol{\omega} - \omega_0 \mathbf{c}_2)^\times (J(\boldsymbol{\omega} - \omega_0 \mathbf{c}_2) + (BJ_s)\boldsymbol{\omega}_s) + \mathbf{M}_p \right] + J_4 \mathbf{M}_c;\end{aligned}\quad (5.78)$$

relațiile (5.48) ÷ (5.52) rămân valabile;

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{F}(\mathbf{q})(\boldsymbol{\Omega} + \omega_0 \mathbf{c}_2) \\ -J_1 \boldsymbol{\Omega}^\times (J\boldsymbol{\Omega} + (BJ_s)\boldsymbol{\omega}_s) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} \\ J_2 \end{bmatrix}, \mathbf{p}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} \\ J_1 \end{bmatrix};\end{aligned}\quad (5.79)$$

ecuația vectorului  $\boldsymbol{\omega}_s$  este a doua ecuație (5.78), adică ecuația

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_s = J_3 \left[ -\boldsymbol{\Omega}^\times (J\boldsymbol{\Omega} + (BJ_s)\boldsymbol{\omega}_s) + \mathbf{w} \right] + J_4 \mathbf{u}. \quad (5.80)$$

În varianta a doua, cu (5.55), conform celei de-a doua ecuații (5.76) și ecuației (5.7),

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} -J_3 \boldsymbol{\Omega}^\times (J\boldsymbol{\Omega} + (BJ_s)\boldsymbol{\omega}_s) + J_4 \mathbf{M}_c \\ k_c k_s \boldsymbol{\omega}_s - k_c R_c k_c^{-1} \mathbf{M}_c \end{bmatrix}, \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} \\ k_c L_c \end{bmatrix}, \mathbf{p}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} J_3 \\ 0_{3 \times 3} \end{bmatrix},\end{aligned}\quad (5.81)$$

cu  $k_c, k_s, R_c, L_c$  – matrice de formele (5.4) ÷ (5.6), dar de dimensiuni  $(4 \times 4)$ ; ecuația lui  $\boldsymbol{\Omega}$  este prima ecuație (5.76),

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = J_1 \left[ -\boldsymbol{\Omega}^\times (J\boldsymbol{\Omega} + (BJ_s)\boldsymbol{\omega}_s) + \mathbf{w} \right] + J_2 \mathbf{u}. \quad (5.82)$$

În varianta a treia, cu (5.58), conform ecuației (5.48) și primei ecuații (5.78),

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{F}(\mathbf{q})\boldsymbol{\omega} \\ -J_1 \left[ (\boldsymbol{\omega} - \omega_0 \mathbf{c}_2)^\times (J(\boldsymbol{\omega} - \omega_0 \mathbf{c}_2) + (BJ_s)\boldsymbol{\omega}_s) \right] - \omega_0 \boldsymbol{\omega}^\times \mathbf{c}_2 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} \\ J_2 \end{bmatrix}, \mathbf{p}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} \\ J_1 \end{bmatrix};\end{aligned}\quad (5.83)$$

ecuația vectorului  $\boldsymbol{\omega}_s$  este a doua ecuație (5.78), adică ecuația

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_s = J_3 \left[ -(\boldsymbol{\omega} - \omega_0 \mathbf{c}_2)^\times (J(\boldsymbol{\omega} - \omega_0 \mathbf{c}_2) + (BJ_s)\boldsymbol{\omega}_s) + \mathbf{w} \right] + J_4 \mathbf{u}. \quad (5.84)$$

În varianta a patra, cu (5.61), conform celei de-a doua ecuații (5.78) și ecuației (5.7),

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -J_3 (\boldsymbol{\omega} - \omega_0 \mathbf{c}_2)^\times (J(\boldsymbol{\omega} - \omega_0 \mathbf{c}_2) + (BJ_s) \boldsymbol{\omega}_s) + J_4 \mathbf{M}_c \\ k_c k_s \boldsymbol{\omega}_s - k_c R_c k_c^{-1} \mathbf{M}_c \end{bmatrix}, \quad (5.85)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} \\ k_c L_c \end{bmatrix}, \mathbf{p}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} J_3 \\ 0_{3 \times 3} \end{bmatrix};$$

ecuația vectorului  $\boldsymbol{\omega}$  este prima ecuație (5.78), adică ecuația

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = J_1 \left[ -(\boldsymbol{\omega} - \omega_0 \mathbf{c}_2)^\times (J(\boldsymbol{\omega} - \omega_0 \mathbf{c}_2) + (BJ_s) \boldsymbol{\omega}_s) + \mathbf{w} \right] - \omega_0 \boldsymbol{\omega}^\times \mathbf{c}_2 + J_2 \mathbf{u}. \quad (5.86)$$

#### 5.4. CONTROLUL AUTOMAT FOLOSIND METODA BACKSTEPPING

Fie sistemul neliniar descris de ecuațiile de stare

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1) \mathbf{x}_2, \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= \mathbf{f}_2(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (5.87)$$

cu vectorul de stare  $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1^T \quad \mathbf{x}_2^T]^T$  și vectorul de intrare  $\mathbf{u}$ . Se face o transformare de stare, prin care se trece de la variabilele de stare  $x_1, x_2$  la variabilele eroare de stare

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{x}_{1d} - \mathbf{x}_1, \mathbf{e}_2 = \mathbf{x}_{2c} - \mathbf{x}_2, \quad (5.88)$$

cu  $\mathbf{x}_{1d}$  – variabila de stare impusă (dorită) și  $\mathbf{x}_{2c}$  – variabila de stare calculată.

Se alege funcția Liapunov de formă pătratică

$$V_1 = \frac{1}{2} \mathbf{e}_1^T \mathbf{e}_1, \quad (5.89)$$

cu derivata în raport cu timpul

$$\dot{V}_1 = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{e}}_1^T \mathbf{e}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{e}_1^T \dot{\mathbf{e}}_1; \quad (5.90)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_1 &= \dot{\mathbf{x}}_{1d} - \dot{\mathbf{x}}_1 \stackrel{(5.87)}{=} \dot{\mathbf{x}}_{1d} - \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1) \mathbf{x}_2 \stackrel{(5.88)}{=} \dot{\mathbf{x}}_{1d} - \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1) (\mathbf{x}_{2c} - \mathbf{e}_2) = \dot{\mathbf{x}}_{1d} - \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1) \mathbf{x}_{2c} + \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1) \mathbf{e}_2, \\ \dot{\mathbf{e}}_1^T &= \dot{\mathbf{x}}_{1d}^T - \mathbf{x}_{2c}^T \mathbf{f}_1^T(\mathbf{x}_1) + \mathbf{e}_2^T \mathbf{f}_1^T(\mathbf{x}_1). \end{aligned} \quad (5.91)$$

Cu acestea, relația (5.90) devine succesiv

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \frac{1}{2} \left[ \dot{\mathbf{x}}_{1d}^T - \mathbf{x}_{2c}^T \mathbf{f}_1^T(\mathbf{x}_1) + \mathbf{e}_2^T \mathbf{f}_1^T(\mathbf{x}_1) \right] \mathbf{e}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{e}_1^T \left[ \dot{\mathbf{x}}_{1d} - \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1) \mathbf{x}_{2c} + \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1) \mathbf{e}_2 \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \dot{\mathbf{x}}_{1d}^T - \mathbf{x}_{2c}^T \mathbf{f}_1^T(\mathbf{x}_1) \right] \mathbf{e}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{e}_1^T \left[ \dot{\mathbf{x}}_{1d} - \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1) \mathbf{x}_{2c} \right] + \frac{1}{2} \mathbf{e}_2^T \mathbf{f}_1^T(\mathbf{x}_1) \mathbf{e}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{e}_1^T \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1) \mathbf{e}_2. \end{aligned} \quad (5.92)$$

Impunând ca

$$\dot{\mathbf{x}}_{1d}^T - \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1)\mathbf{x}_{2c} = -K_1\mathbf{e}_1, \quad (5.93)$$

cu  $K_1$  – matrice pătratică și pozitiv definită ( $K_1 = K_1^T$ ), (5.92) devine

$$\dot{V}_1 = -\mathbf{e}_1^T K_1 \mathbf{e}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{e}_2^T \mathbf{f}_1^T(\mathbf{x}_1) \mathbf{e}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{e}_1^T \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1) \mathbf{e}_2. \quad (5.94)$$

Se alege funcția Liapunov

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2} \mathbf{e}_2^T P \mathbf{e}_2, \quad (5.95)$$

cu  $P$  – matrice simetrică și pozitiv definită;

$$\dot{V}_2 = \dot{V}_1 + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{e}}_2^T P \mathbf{e}_2 + \frac{1}{2} \mathbf{e}_2^T P \dot{\mathbf{e}}_2, \quad (5.96)$$

cu

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_2 &= \dot{\mathbf{x}}_{2c} - \dot{\mathbf{x}}_2 \stackrel{(5.87)}{=} \dot{\mathbf{x}}_{2c} - \mathbf{f}_2(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \\ \dot{\mathbf{e}}_2^T &= \dot{\mathbf{x}}_{2c}^T - \dot{\mathbf{x}}_2^T = \dot{\mathbf{x}}_{2c}^T - \mathbf{f}_2^T(\mathbf{x}) - \mathbf{u}^T \mathbf{g}^T(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (5.97)$$

Cu acestea, relația (5.96) devine succesiv

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \dot{V}_1 + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{e}}_2^T P \mathbf{e}_2 + \frac{1}{2} \mathbf{e}_2^T P \dot{\mathbf{e}}_2 = \dot{V}_1 + \frac{1}{2} [\dot{\mathbf{x}}_{2c}^T - \mathbf{f}_2^T(\mathbf{x}) - \mathbf{u}^T \mathbf{g}^T(\mathbf{x})] P \mathbf{e}_2 + \\ &+ \frac{1}{2} \mathbf{e}_2^T P [\dot{\mathbf{x}}_{2c} - \mathbf{f}_2(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}] \stackrel{(1.94)}{=} -\mathbf{e}_1^T K_1 \mathbf{e}_1 + \frac{1}{2} [\dot{\mathbf{x}}_{2c}^T P - \mathbf{f}_2^T(\mathbf{x}) P - \mathbf{u}^T \mathbf{g}^T(\mathbf{x}) P + \mathbf{e}_1^T \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1)] \mathbf{e}_2 + \\ &+ \frac{1}{2} \mathbf{e}_2^T [P \dot{\mathbf{x}}_{2c} - P \mathbf{f}_2(\mathbf{x}) - P \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u} + \mathbf{f}_1^T(\mathbf{x}_1) \mathbf{e}_1]. \end{aligned} \quad (5.98)$$

Impunând ca

$$P \dot{\mathbf{x}}_{2c} - P \mathbf{f}_2(\mathbf{x}) - P \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u} + \mathbf{f}_1^T(\mathbf{x}_1) \mathbf{e}_1 = -K_2 \mathbf{e}_2, \quad (5.99)$$

cu  $K_2$  – matrice pătratică și pozitiv definită ( $K_2 = K_2^T$ ), (5.98) devine

$$\dot{V}_2 = -\mathbf{e}_1^T K_1 \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2^T K_2 \mathbf{e}_2 \leq 0, \quad (5.100)$$

care asigură faptul că sistemul în circuit închis este global asimptotic stabil.

Din (5.99) rezultă legea de comandă

$$\mathbf{u} = \mathbf{g}^{-1}(\mathbf{x}) P^{-1} [K_2 \mathbf{e}_2 + P \dot{\mathbf{x}}_{2c} - P \mathbf{f}_2(\mathbf{x}) + \mathbf{f}_1^T(\mathbf{x}_1) \mathbf{e}_1]. \quad (5.101)$$

Înlocuind (5.93) în prima ecuație (5.91) și (5.99) în a doua ecuație (5.97), se obțin ecuațiile



sistemului în circuit închis

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= -K_1 e_1 + f_1(x_1) e_2, \\ \dot{e}_2 &= -P^{-1} K_2^{-1} e_2 - P^{-1} f_1^T(x_1) e_1, \end{aligned} \quad (5.102)$$

formă care exprimă faptul că vectorul eroare  $e = [e_1^T \ e_2^T]^T$  tinde asimptotic la zero.

Schema bloc a sistemului în circuit închis este dată în fig. 5.6.

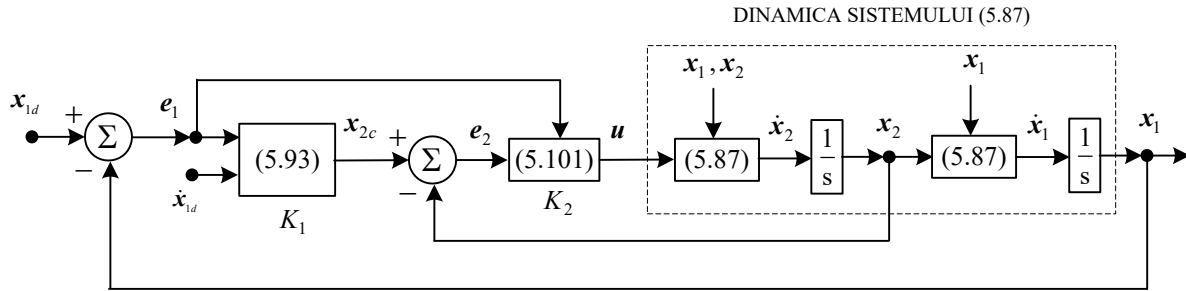


Fig. 5.6. Structura sistemului de control automat al sistemului neliniar (5.87) folosind metoda backstepping

## 5.5. CONTROLUL AUTOMAT AL ATITUDINII S CU ROȚI INERȚIALE FOLOSIND METODA BACKSTEPPING

Dinamica sistemului satelit-actuator cu roți inerțiale în configurație standard este descrisă de sistemul de ecuații (5.40) și (5.48), cu (5.49) și (5.50) sau (5.51), cu (5.52) și (5.53); pentru actuatore cu roți inerțiale în configurație piramidală sau de tip tetraedru se folosesc ecuațiile (5.76) și (5.48), cu (5.49) și (5.50) sau ecuația (5.51), cu (5.52), (5.79), (5.49) și (5.50).

În cadrul proiectării structurii de control automat se parcurg două etape: 1) calculul momentului generator (calculat); 2) proiectarea controllerului vectorului vitezelor unghiulare ale roților inerțiale [6].

### Calculul momentului generator ( $M_{cc}$ )

Se definesc variabilele de stare virtuale (variabilele eroare de stare)

$$e_1 = q_d - q, \quad (5.103)$$

$$e_2 = \omega_c - \omega, \quad (5.104)$$

unde  $q_d$  este vectorul quaternion dorit (impus),  $q$  – vectorul quaternion curent, iar  $\omega_c$  și  $\omega$  – viteza unghiulară calculată și curentă a S relativ la triedrul orbital;  $\omega_c$  reprezintă o intrare de control virtual.

Se alege funcția Liapunov pătratică

$$V_1 = \frac{1}{2} \mathbf{e}_1^T \mathbf{e}_1; \quad (5.105)$$

Derivata ei în raport cu timpul este

$$\dot{V}_1 = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{e}}_1^T \mathbf{e}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{e}_1^T \dot{\mathbf{e}}_1. \quad (5.106)$$

Derivând în raport cu timpul (5.103), cu  $\dot{\mathbf{q}}_d = 0$ , (5.48) și (5.104), se obține

$$\dot{\mathbf{e}}_1 = -\dot{\mathbf{q}} = -F(\mathbf{q})\boldsymbol{\omega} = F(\mathbf{q})(\mathbf{e}_2 - \boldsymbol{\omega}_c); \quad (5.107)$$

înlocuind aceasta în (5.106), rezultă

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \frac{1}{2} [\mathbf{e}_2^T F^T(\mathbf{q}) - \boldsymbol{\omega}_c^T F^T(\mathbf{q})] \mathbf{e}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{e}_1^T [F(\mathbf{q})\mathbf{e}_2 - F(\mathbf{q})\boldsymbol{\omega}_c] = \\ &= -\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_c^T F^T(\mathbf{q}) \mathbf{e}_1 - \frac{1}{2} \mathbf{e}_1^T F(\mathbf{q}) \boldsymbol{\omega}_c + \frac{1}{2} \mathbf{e}_2^T F^T(\mathbf{q}) \mathbf{e}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{e}_1^T F(\mathbf{q}) \mathbf{e}_2. \end{aligned} \quad (5.108)$$

Alegând intrarea de control virtual  $\boldsymbol{\omega}_c$  de forma

$$\boldsymbol{\omega}_c = F^T(\mathbf{q}) K_1 \mathbf{e}_1, \quad (5.109)$$

cu  $K_1$  – matrice diagonală pozitiv definită ( $K_1 = k_1 I_{3 \times 3}$ ,  $k_1 > 0$ ), relația (5.108) devine

$$\dot{V}_1 = -\frac{1}{2} \mathbf{e}_1^T [F(\mathbf{q}) F^T(\mathbf{q}) K_1 + K_1 F(\mathbf{q}) F^T(\mathbf{q})] \mathbf{e}_1 + \frac{1}{2} [\mathbf{e}_2^T F^T(\mathbf{q}) \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1^T F(\mathbf{q}) \mathbf{e}_2]; \quad (5.110)$$

prima paranteză este pozitiv definită (termenul quadratic care conține această paranteză este negativ definit), conform relației (5.118).

Se alege acum funcția Liapunov

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2} \mathbf{e}_2^T J_0 \mathbf{e}_2, \quad (5.111)$$

cu derivata în raport cu timpul

$$\dot{V}_2 = \dot{V}_1 + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{e}}_2^T J_0 \mathbf{e}_2 + \frac{1}{2} \mathbf{e}_2^T J_0 \dot{\mathbf{e}}_2. \quad (5.112)$$

Derivând (5.104) și ținând seama de a doua relație (5.48), se obține

$$\dot{\mathbf{e}}_2 = \dot{\boldsymbol{\omega}}_c - \dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_c - \dot{\boldsymbol{\Omega}} - \boldsymbol{\omega}_0 \dot{\mathbf{e}}_2 = \dot{\boldsymbol{\omega}}_c - \dot{\boldsymbol{\Omega}} - \boldsymbol{\omega}_0 \mathbf{e}_2^x \boldsymbol{\omega}; \quad (5.113)$$

s-a înlocuit  $\dot{c}_2 = c_2^\times \omega$  [27].

Multiplicând (5.113) cu  $J_0$  și ținând seama de prima relație (5.40), rezultă succesiv

$$J_0 \dot{e}_2 = -J_0 \dot{\Omega} + J_0 \dot{\omega}_c - \omega_0 J_0 c_2^\times \omega = \Omega^\times (J\Omega + J_s \omega_s) - M_p + M_{cc} + J_0 \dot{\omega}_c - \omega_0 J_0 c_2^\times \omega; \quad (5.114)$$

$M_{cc}$  este vectorul generator calculat al momentelor de comandă a roților inerțiale. Cu această relație și (5.110), (5.112) devine

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & -\frac{1}{2} e_1^T [F(q)F^T(q)K_1 + K_1F(q)F^T(q)]e_1 + \\ & + \frac{1}{2} [(J\Omega + J_s \omega_s)^T (\Omega^\times)^T + M_{cc}^T + \dot{\omega}_c^T J_0^T - \omega_0 \omega^T (c_2^\times)^T J_0^T + e_1^T F(q)]e_2 + \\ & + \frac{1}{2} e_2^T [\Omega^\times (J\Omega + J_s \omega_s) + M_{cc} + J_0 \dot{\omega}_c - \omega_0 J_0 c_2^\times \omega + F^T(q)e_1] - \frac{1}{2} M_p^T e_2 - \frac{1}{2} e_2^T M_p. \end{aligned} \quad (5.115)$$

Se impune ca a doua și a treia peranteză să fie egale respectiv cu  $-e_2^T K_2$  și  $-K_2 e_2$ ,  $K_2$  – matrice  $(3 \times 3)$  simetrică și pozitiv definită; în absența perturbațiilor exterioare ( $M_p = 0$ ), rezultă

$$M_{cc} = -K_2 e_2 - F^T(q)e_1 - \Omega^\times (J\Omega + J_s \omega_s) + \omega_0 J_0 c_2^\times \omega - J_0 \dot{\omega}_c. \quad (5.116)$$

Drept urmare,

$$\dot{V}_2 = -\frac{1}{2} e_1^T [G(q)K_1 + K_1G(q)]e_1 - e_2^T K_2 e_2 - M_p^T e_2, \quad (5.117)$$

unde

$$G(q) = F(q)F^T(q) = \frac{(1 + q^T q)^2}{16} I_{3 \times 3}. \quad (5.118)$$

$G(q)$  este pozitiv definită și, în absența perturbațiilor exterioare ( $M_p = 0$ ),  $\dot{V}_2 < 0$ . Deci sistemul neliniar în circuit închis este global stabil.

Expresia lui  $\dot{\omega}_c$  din (5.116) se obține prin derivarea relației (5.109);

$$\dot{\omega}_c = \dot{F}^T(q)K_1 e_1 + F^T(q)K_1 \dot{e}_1, \quad (5.119)$$

cu  $\dot{e}_1$  de forma (5.107),  $e_1$  de forma (5.103),  $e_2$  de forma (5.104) și  $\omega_c$  de forma (5.109);  $F(q)$  este de forma (5.49) și  $\dot{F}^T(q)$  se obține prin derivarea lui  $F(q)$ ;

$$\begin{aligned} \dot{F}(\mathbf{q}) = & -\frac{\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{q} + \mathbf{q}^T \dot{\mathbf{q}}}{4} I_{3 \times 3} + \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{q}} \mathbf{q}^T + \mathbf{q} \dot{\mathbf{q}}^T) + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^\times \stackrel{(1.48)}{=} -\frac{\boldsymbol{\omega}^T F^T(\mathbf{q}) \mathbf{q} + \mathbf{q}^T F(\mathbf{q}) \boldsymbol{\omega}}{4} I_{3 \times 3} + \\ & + \frac{1}{2} (F(\mathbf{q}) \boldsymbol{\omega} \mathbf{q}^T + \mathbf{q} \boldsymbol{\omega}^T F^T(\mathbf{q})) + \frac{1}{2} (F(\mathbf{q}) \boldsymbol{\omega})^\times. \end{aligned} \quad (5.120)$$

Vectorul vitezelor unghiulare ale roților inerțiale din (5.116) se obține prin calcul folosind a doua ecuație (5.40); pentru  $\mathbf{M}_p = 0$ ,

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{sc} = J_0^{-1} \boldsymbol{\Omega}^\times (J \boldsymbol{\Omega} + J_s \boldsymbol{\omega}_{sc}) + (J_0^{-1} + J_s^{-1}) \mathbf{M}_{cc}, \quad (5.121)$$

cu  $\mathbf{M}_{cc}$  de forma (5.116).

**Mențiune:** pentru aplicarea algoritmului backstepping în cazul utilizării actuatorilor constituite din roți inerțiale în configurații neregulate (piramidală sau de tip tetraedru), se folosesc relațiile de calcul de mai sus și următoarele, în care ecuațiile (5.40) se înlocuiesc cu ecuațiile (5.76),  $\boldsymbol{\omega}_s (4 \times 1)$ ,  $J_s (4 \times 4)$ ,  $J_s$  cu  $B J_s$ ,  $J_s \boldsymbol{\omega}_s$  cu  $(B J_s) \boldsymbol{\omega}_s$ ,  $\mathbf{M}_{cc}$  cu  $B \mathbf{M}_{cc}$ ,  $J_0^{-1}$  cu  $J_1$  (deci  $J_0$ , cu  $J_1^{-1}$ ) și termenul  $(J_0^{-1} + J_s^{-1})$  cu termenul  $J_4$ . De asemenea, se modifică dimensiunile matricelor  $R_c, k_s, L_c$  și  $k_c$  din ecuația (5.7); toate matricele devin  $(4 \times 4)$ .

### Proiectarea controllerului vectorului vitezelor unghiulare ale roților inerțiale

Se folosesc variabilele eroare

$$\mathbf{e}_3 = \boldsymbol{\omega}_{sc} - \boldsymbol{\omega}_s, \quad (5.122)$$

$$\mathbf{e}_4 = \mathbf{M}_{cv} - \mathbf{M}_c, \quad (5.123)$$

cu  $\mathbf{M}_{cv}$  – momentul de control virtual. Derivatele lor sunt

$$\dot{\mathbf{e}}_3 = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{sc} - \dot{\boldsymbol{\omega}}_s \stackrel{(5.40), (5.121)}{=} (J_0^{-1} + J_s^{-1}) (\mathbf{M}_{cc} - \mathbf{M}_c) + J_0^{-1} \mathbf{M}_p, \quad (5.124)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_4 = \dot{\mathbf{M}}_{cv} - \dot{\mathbf{M}}_c. \quad (5.125)$$

Se alege funcția Liapunov

$$V_3 = V_2 + \frac{1}{2} \mathbf{e}_3^T J_0 \mathbf{e}_3; \quad (5.126)$$

$$\dot{V}_3 = \dot{V}_2 + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{e}}_3^T J_0 \mathbf{e}_3 + \frac{1}{2} \mathbf{e}_3^T J_0 \dot{\mathbf{e}}_3. \quad (5.127)$$

Se multiplică (5.124) cu  $J_0$ ,

$$J_0 \dot{e}_3 = (I_{3 \times 3} + J_0 J_s^{-1})(M_{cc} - M_c) + M_p \quad (5.128)$$

și se introduce aceasta în  $\dot{V}_3$ ;

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 &= \dot{V}_2 + \frac{1}{2} \left[ M_{cc}^T (I_{3 \times 3} + J_0 J_s^{-1}) - M_{cc}^T (I_{3 \times 3} + J_0 J_s^{-1})^T \right] e_3 + \\ &+ \frac{1}{2} e_3^T \left[ (I_{3 \times 3} + J_0 J_s^{-1}) M_{cc} - (I_{3 \times 3} + J_0 J_s^{-1}) M_c \right] + M_p e_3 \stackrel{(5.123)}{=} \\ &= \frac{1}{2} \left[ (M_{cc}^T - M_{cv}^T) (I_{3 \times 3} + J_0 J_s^{-1}) \right] e_3 + \frac{1}{2} e_3^T \left[ (I_{3 \times 3} + J_0 J_s^{-1}) (M_{cc} - M_{cv}) \right] + \\ &+ e_4^T (I_{3 \times 3} + J_0 J_s^{-1})^T e_3 + e_3^T M_p. \end{aligned} \quad (5.129)$$

Se aleg termenii din parantezele drepte egale respectiv cu  $-e_3^T K_3$  și  $-K_3 e_3$ , cu  $K_3$  – matrice simetrică și pozitiv definită ( $K_3 = k_3 I_{3 \times 3}, k_3 > 0$ ), adică

$$M_{cv} = M_{cc} + (I_{3 \times 3} + J_0 J_s^{-1})^{-1} K_3 e_3; \quad (5.130)$$

$\dot{V}_3$  devine

$$\dot{V}_3 = \dot{V}_2 - e_3^T K_3 e_3 + e_4^T (I_{3 \times 3} + J_0 J_s^{-1}) e_3 + M_p^T e_3, \quad (5.131)$$

cu  $\dot{V}_2 < 0$  în absența perturbațiilor exterioare.

Se alege funcția Liapunov [6]

$$V_4 = V_3 + \frac{1}{2} e_4^T (k_c R_c^{-1} k_c^{-1}) e_4; \quad (5.132)$$

$$\dot{V}_4 = \dot{V}_3 + \frac{1}{2} \dot{e}_4^T (k_c R_c^{-1} k_c^{-1}) e_4 + \frac{1}{2} e_4^T (k_c R_c^{-1} k_c^{-1}) \dot{e}_4. \quad (5.133)$$

Multiplicând relația (5.125) cu  $k_c R_c^{-1} k_c^{-1}$  și ținând seama de ecuația (5.7), rezultă

$$k_c R_c^{-1} k_c^{-1} \dot{e}_4 = k_c R_c^{-1} k_c^{-1} \dot{M}_{cv} - k_c R_c^{-1} k_c^{-1} \dot{M}_c = k_c R_c^{-1} k_c^{-1} \dot{M}_{cv} + M_c - k_c R_c^{-1} k_s \omega_s - k_c R_c^{-1} L_c U_c. \quad (5.134)$$

Cu aceasta, relația (5.133) devine

$$\begin{aligned} \dot{V}_4 &= \dot{V}_2 + \frac{1}{2} \left[ \dot{M}_{cv}^T (k_c R_c^{-1} k_c^{-1}) + M_c^T - \omega_s^T (k_c R_c^{-1} k_s) - U_c^T (k_c R_c^{-1} L_c) + e_3^T (I_{3 \times 3} + J_0 J_s^{-1}) \right] e_4 - e_3^T K_3 e_3 + \\ &+ M_p^T e_3 + \frac{1}{2} e_4^T \left[ (k_c R_c^{-1} k_c^{-1}) \dot{M}_{cv} + M_c - (k_c R_c^{-1} k_s) \omega_s - (k_c R_c^{-1} L_c) U_c + (I_{3 \times 3} + J_0 J_s^{-1})^T e_3 \right]. \end{aligned} \quad (5.135)$$

Alegând termenii din parantezele mari respectiv de formele  $-e_4^T K_4$  și  $-K_4 \dot{e}_4$ , cu  $K_4$  – matrice simetrică și pozitiv definită ( $K_4 = k_4 I_{3 \times 3}, k_4 > 0$ ), adică

$$U_c = L_c^{-1} R_c k_c^{-1} \left[ K_4 e_4 + (I_{3 \times 3} + J_0 J_s^{-1})^T e_3 + M_c - (k_c R_c^{-1} k_s) \omega_s + (k_c R_c^{-1} k_c^{-1}) \dot{M}_{cv} \right], \quad (5.136)$$

relația (5.135) devine

$$\dot{V}_4 = \dot{V}_2 - \mathbf{e}_3^T K_3 \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4^T K_4 \mathbf{e}_4 + \mathbf{M}_p^T \mathbf{e}_3. \quad (5.137)$$

Relația de calcul a lui  $\dot{\mathbf{M}}_{cv}$  din (5.136) se obține prin derivarea relației (5.130); rezultă

$$\dot{\mathbf{M}}_{cv} = \dot{\mathbf{M}}_{cc} + (I_{3 \times 3} + J_0 J_s^{-1})^{-1} K_3 \dot{\mathbf{e}}_3, \quad (5.138)$$

cu  $\dot{\mathbf{e}}_3$  de forma (5.124);  $\dot{\mathbf{M}}_{cc}$  se obține prin derivarea relației (5.116);

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{M}}_{cc} = & -K_2 \dot{\mathbf{e}}_2 - \dot{F}^T(\mathbf{q}) \mathbf{e}_1 - F^T(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{e}}_1 - \dot{\boldsymbol{\Omega}}^\times (J\boldsymbol{\Omega} + J_s \boldsymbol{\omega}_s) - \boldsymbol{\Omega}^\times (J\dot{\boldsymbol{\Omega}} + J_s \dot{\boldsymbol{\omega}}_s) + \\ & + \omega_0 J_0 \dot{\mathbf{c}}_2^\times \boldsymbol{\omega} + \omega_0 J_0 \mathbf{c}_2^\times \dot{\boldsymbol{\omega}} - J_0 \dot{\boldsymbol{\omega}}_c, \end{aligned} \quad (5.139)$$

cu  $\dot{\mathbf{e}}_2$  de forma (5.113),  $\dot{\boldsymbol{\omega}}_c$  de forma (5.119),  $\dot{F}(\mathbf{q})$  de forma (5.120),  $\dot{\mathbf{e}}_1$  de forma (5.107),  $\boldsymbol{\omega}_c$  de forma (5.109),  $\dot{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{c}_2^\times \boldsymbol{\omega}$ ; expresia lui  $\dot{\boldsymbol{\omega}}_c$  se obține prin derivarea relației (5.119);

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\omega}}_c = & \dot{F}^T(\mathbf{q}) K_1 \mathbf{e}_1 + 2\dot{F}^T(\mathbf{q}) K_1 \dot{\mathbf{e}}_1 + F^T(\mathbf{q}) K_1 \ddot{\mathbf{e}}_1 \stackrel{(5.107)}{=} \dot{F}^T(\mathbf{q}) K_1 \mathbf{e}_1 + 2\dot{F}^T(\mathbf{q}) K_1 \dot{\mathbf{e}}_1 + \\ & + F^T(\mathbf{q}) K_1 [\dot{F}(\mathbf{q})(\mathbf{e}_2 - \boldsymbol{\omega}_c) + F(\mathbf{q})(\dot{\mathbf{e}}_2 - \dot{\boldsymbol{\omega}}_c)]; \end{aligned} \quad (5.140)$$

$\ddot{F}(\mathbf{q})$  se obține prin derivarea relației (5.120);

$$\begin{aligned} \ddot{F}^T(\mathbf{q}) = & -\frac{2\dot{\boldsymbol{\omega}} F^T(\mathbf{q}) \mathbf{q} + \boldsymbol{\omega}^T \dot{F}^T(\mathbf{q}) \mathbf{q} + 2\boldsymbol{\omega}^T F^T(\mathbf{q}) F(\mathbf{q}) \boldsymbol{\omega} + \mathbf{q}^T \dot{F}(\mathbf{q}) \boldsymbol{\omega}}{4} I_{3 \times 3} + \frac{1}{2} [\dot{F}(\mathbf{q}) \boldsymbol{\omega} + F(\mathbf{q}) \dot{\boldsymbol{\omega}}]^\times + \\ & + \frac{1}{2} [\dot{F}(\mathbf{q}) \boldsymbol{\omega} \mathbf{q}^T + F(\mathbf{q}) \dot{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{q}^T + 2F(\mathbf{q}) \boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\omega}^T F^T(\mathbf{q}) + \mathbf{q} \dot{\boldsymbol{\omega}}^T F^T(\mathbf{q}) + \mathbf{q} \boldsymbol{\omega}^T \dot{F}^T(\mathbf{q})] +. \end{aligned} \quad (5.141)$$

În fig. 5.7 este prezentată schema bloc a sistemului de control automat al atitudinii S, bazat pe metoda backstepping, folosind configurații cu roți inerțiale.

Condiția  $\dot{V}_4 \leq 0$  (sistem global asimptotic stabil) conduce la concluziile:  $\mathbf{e}_1 \rightarrow 0$  ( $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{q}_d$ ) și, conform (5.109),  $\boldsymbol{\omega}_c \rightarrow 0$ ;  $\mathbf{e}_2 \rightarrow 0$  ( $\boldsymbol{\omega}_c \rightarrow \boldsymbol{\omega} \rightarrow 0$ );  $\mathbf{e}_3 \rightarrow 0$  ( $\boldsymbol{\omega}_s \rightarrow \boldsymbol{\omega}_{sc}$ ) și, conform (5.130),  $\mathbf{M}_{cv} \rightarrow \mathbf{M}_{cc}$ ;  $\mathbf{e}_4 \rightarrow 0$  ( $\mathbf{M}_c \rightarrow \mathbf{M}_{cv} \rightarrow \mathbf{M}_{cc}$ ). Deci, în regim stabilizat, lucrurile se petrec ca și când s-ar cupla direct blocul care modelează ecuația (5.40)/(5.76) la ieșirile  $\mathbf{M}_{cc}$  și  $\boldsymbol{\omega}_{sc}$  ale blocurilor care modelează ecuațiile (5.116) și (5.121); sistemul de control automat al atitudinii S din fig. 5.7 este echivalent cu cel din fig. 5.6, cu  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{e}_1$  și  $\mathbf{x}_2 = \mathbf{e}_2$ .

În continuare se face o analiză a stabilității sistemului de control neliniar din fig. 5.7. Pentru aceasta, se parcurg două etape: 1) analiza stabilității sistemului cu controller de atitudine, cu legea de control  $\mathbf{M}_c = \mathbf{M}_{cc}$ ; 2) analiza stabilității subsistemului de control a vectorului  $\boldsymbol{\omega}_s$  (vectorul vitezelor unghiulare ale actuatorului constituit din roți inerțiale). În prima etapă se

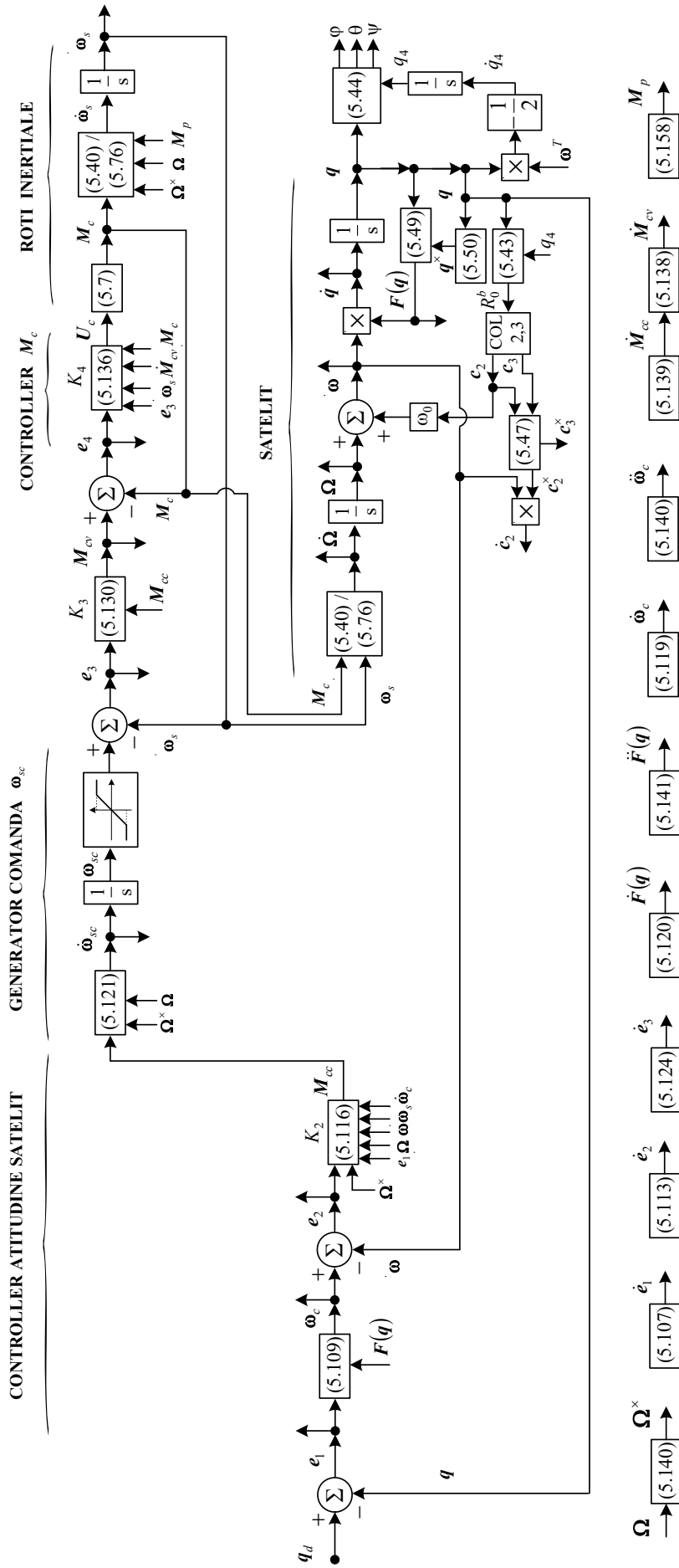


Fig. 5.7. Schema bloc a sistemului de control automat al atitudinii S, bazat pe metoda backstepping, folosind actuator de tip configurație cu roți inertiiale

utilizează  $\dot{V}_2$ , iar în a doua etapă  $\dot{V}_4$ .

$\dot{V}_2$  este de forma (5.117), cu (5.118);

$$\dot{V}_2 = -\frac{1}{16}(1 + \mathbf{q}^T \mathbf{q})^2 \mathbf{e}_1^T K_1 \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2^T K_2 \mathbf{e}_2 - \mathbf{M}_p^T \mathbf{e}_2, \quad (5.142)$$

care verifică inecuația

$$\dot{V}_2 \leq -\frac{1}{16}(1 + \mathbf{q}^T \mathbf{q})^2 \mathbf{e}_1^T K_1 \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2^T K_2 \mathbf{e}_2 + \|\mathbf{e}_2\|^2 + \|\mathbf{M}_p\|^2; \quad (5.143)$$

într-adevăr, deoarece

$$\|\mathbf{e}_2\|^2 + \|\mathbf{M}_p\|^2 + 2\mathbf{M}_p^T \mathbf{e}_2 = (\mathbf{e}_2 + \mathbf{M}_p)^T (\mathbf{e}_2 + \mathbf{M}_p) \geq 0, \quad (5.144)$$

$$\|\mathbf{e}_2\|^2 + \|\mathbf{M}_p\|^2 \geq -2\mathbf{M}_p^T \mathbf{e}_2 \geq -\mathbf{M}_p^T \mathbf{e}_2 \quad (5.145)$$

și, deci, se verifică relația (5.143).

Matricele  $K_1 = k_1 I_{3 \times 3}$  și  $K_2 = k_2 I_{3 \times 3}$  ( $k_1 > 0, k_2 > 0$ ) sunt, deci, simetrice și pozitiv definite, adică  $\text{tr}(K_i) = 3k_i > 0$  și  $\det(K_i) = k_i^3 > 0, i = \overline{1, 2}$ . Valorile proprii ale matricei  $K_1$  sunt  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  (cu  $\lambda_1 = \lambda_{\min}$  – cea mai mică valoare proprie dintre cele trei și  $\lambda_3 = \lambda_{\max}$  – cea mai mare valoare dintre acestea), iar valorile proprii ale matricei  $K_2$  sunt  $\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3$  (cu  $\lambda'_1 = \lambda'_{\min}$  și  $\lambda'_3 = \lambda'_{\max}$ ). Cu acestea, se verifică proprietatea [6]

$$\lambda_{\min}(K_i) \|\mathbf{e}_i\|^2 \leq \mathbf{e}_i^T K_i \mathbf{e}_i \leq \lambda_{\max}(K_i) \|\mathbf{e}_i\|^2, i = \overline{1, 2}. \quad (5.146)$$

Drept urmare, majorând termenii din membrul drept al inecuației (5.142), rezultă

$$\dot{V}_2 \leq -\frac{1}{16}(1 + \mathbf{q}^T \mathbf{q})^2 \lambda_{\min} \|\mathbf{e}_1\|^2 - \lambda'_{\min} \|\mathbf{e}_2\|^2 + \|\mathbf{e}_2\|^2 + \|\mathbf{M}_p\|^2 \quad (5.147)$$

sau, deoarece  $(1 + \mathbf{q}^T \mathbf{q})^2 \geq 1, \lambda_{\min} = k_1, \lambda'_{\min} = k_2$ ,

$$\dot{V}_2 \leq -\frac{1}{16} k_1 \|\mathbf{e}_1\|^2 - (k_2 - 1) \|\mathbf{e}_2\|^2 + \|\mathbf{M}_p\|^2. \quad (5.148)$$

Notând cu  $\mathbf{e} = [\mathbf{e}_1^T \quad \mathbf{e}_2^T]^T$  – vectorul eroare de stare al sistemului de control al atitudinii S prin vectorul de comandă  $\mathbf{M}_c = \mathbf{M}_{cc}$ , cu  $\|\mathbf{e}_1\|^2 + \|\mathbf{e}_2\|^2 = \|\mathbf{e}\|^2$  și cu

$$\eta_2 = \min \left[ \frac{1}{16} \lambda_{\min}, (\lambda'_{\min} - 1) \right] = \min \left[ \frac{1}{16} k_1, (k_2 - 1) \right], \quad (5.149)$$



se obține

$$\dot{V}_2 \leq -\eta_2 \|e\|^2 + \max \|M_p\|^2, \eta_2 > 0. \quad (5.150)$$

Deci, se aleg valori pentru  $k_1$  și  $k_2$ , astfel încât  $\dot{V}_2 \leq 0$ .

Pentru analiza stabilității subsistemului de control automat al vectorului  $\omega_s$ , se folosește derivata funcției  $V_4$ , de forma (5.137), cu  $\dot{V}_2 \leq 0$ ;  $\dot{V}_4$  verifică inecuația

$$\dot{V}_4 \leq -e_3^T K_3 e_3 - e_4^T K_4 e_4 + \|e_3\|^2 + \|M_p\|^2; \quad (5.151)$$

într-adevăr, deoarece

$$\|e_3\|^2 + \|M_p\|^2 - 2M_p^T e_3 = (e_3 - M_p)^T (e_3 - M_p) \geq 0, \quad (5.152)$$

rezultă

$$\|e_3\|^2 + \|M_p\|^2 \geq 2M_p^T e_3 \geq M_p^T e_3, \quad (5.153)$$

și, deci, se verifică relația (5.151).

Procedând ca mai sus, adică alegând

$$\eta_4 = \min[(\lambda_{\min} - 1), \lambda'_{\min}] > 0, \quad (5.154)$$

cu  $\lambda_{\min}$  – valoarea proprie minimă a matricei  $K_3 = k_3 I_{3 \times 3}$  ( $k_3 > 0$ ) și  $\lambda'_{\min}$  – valoarea proprie minimă a matricei  $K_4 = k_4 I_{3 \times 3}$  ( $k_4 > 0$ ),  $\lambda_{\min} = k_3$ ,  $\lambda'_{\min} = k_4$ , rezultă

$$\eta_4 = \min[(k_3 - 1), k_4] > 0, k_3 > 2, k_4 > 1 \quad (5.155)$$

și, implicit,

$$\dot{V}_4 \leq -\eta_4 \|e\|^2 + \max \|M_p\|^2, e' = [e_3^T \quad e_4^T]^T. \quad (5.156)$$

Deci, se aleg valori pentru  $k_3$  și  $k_4$ , astfel încât  $\dot{V}_4 \leq 0$ .

Conform ecuației (5.121), panta funcției  $\dot{\omega}_{sc}$  este

$$\frac{\partial \dot{\omega}_{sc}}{\partial \omega_{sc}} = J_0^{-1} \Omega^\times J_s. \quad (5.157)$$

Atâta timp cât matricea  $\Omega^\times$  are cel puțin o valoare proprie nulă, adică  $\Omega^\times$  este structural singulară [6], subsistemul (5.121) liniarizat trebuie considerat instabil în vecinătatea oricărui punct de

liniarizare; deci, sistemul liniar (5.121) trebuie considerat instabil. Acest lucru este normal, deoarece roțile inertiiale sunt structuri mecanice libere, ale căror viteze unghiulare sunt în concordanță cu cuplurile furnizate de către motoarele de antrenare. Generatorul comenzii  $\omega_{sc}$  este de fapt un sistem artificial (bloc de calcul) care produce  $\omega_{sc}$  în funcție de  $M_{cc}$ . De aceea, este necesar să se introducă un limitator de viteză pentru  $\omega_{sc}$ .

În fig. 5.8.a este prezentat modelul Matlab/Simulink al sistemului din fig. 5.7; acesta conține unsprezece subsisteme: „Subsistem Mcc” – fig. 5.8.b, „Subsistem omega\_sc\_p” – fig. 5.8.c, „Subsistem Uc” – fig. 5.8.d, „Subsistem omega\_s si Mp” – fig. 5.8.e, „Subsistem OM” – fig. 5.8.f, „Subsistem q si F\_q” – fig. 5.8.g, „Subsistem atitudine” – fig. 5.8.h, „Subsistem omega\_c\_s” – fig. 5.8.i, „Subsistem F\_p\_s” – fig. 5.8.j, „Subsistem F\_q\_p si Mcv\_p” – fig. 5.8.k, „Subsisteme\_x” – fig. 5.8.l.

S-a ales un satelit cu  $m = 100 \text{ Kg}$ ,  $\omega_0 = 0.001083 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $J = \text{diag}[8 \ 8 \ 6] \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$ . S-au ales roțile inertiiale în configurație standard cu  $J_s = \text{diag}[5 \ 5 \ 5] \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$ ,  $\omega_{si}^{\max} = 5000 \text{ rpm} \cong 524 \text{ grad} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $R_c = 131.5 \cdot I_{3 \times 3} [\Omega \cdot \text{H}^{-1}]$ ,  $L_c = 1900 \cdot I_{3 \times 3} [\text{H}^{-1}]$ ,  $k_c = 0.0351 \cdot I_{3 \times 3} [\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1}]$ ,  $k_s = 7.5 \cdot I_{3 \times 3} [\text{V} \cdot \text{rad}^{-1} \cdot \text{s}]$ . Se aleg matricele de amplificare  $K_1 = 20 \cdot I_{3 \times 3}$ ,  $K_2 = K_3 = 12 \cdot I_{3 \times 3}$ ,  $K_4 = 10 \cdot I_{3 \times 3}$ ,  $q_d = [0 \ 0 \ 0]^T$ ,  $q(0) = [0.45 \ 0.5 \ -0.5]^T$ ,  $q_4(0) = 0.5454$ ,  $\omega(0) = [0 \ 0 \ 0]^T \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $\Omega(0) = \omega(0) - \omega_0 c_2(0)$ ,  $\omega_{si}(0) = 3000 \text{ rpm} \cong 377 \text{ grad} \cdot \text{s}^{-1}$ . Momentul perturbator, datorat gravitației, se calculează cu formula [1]

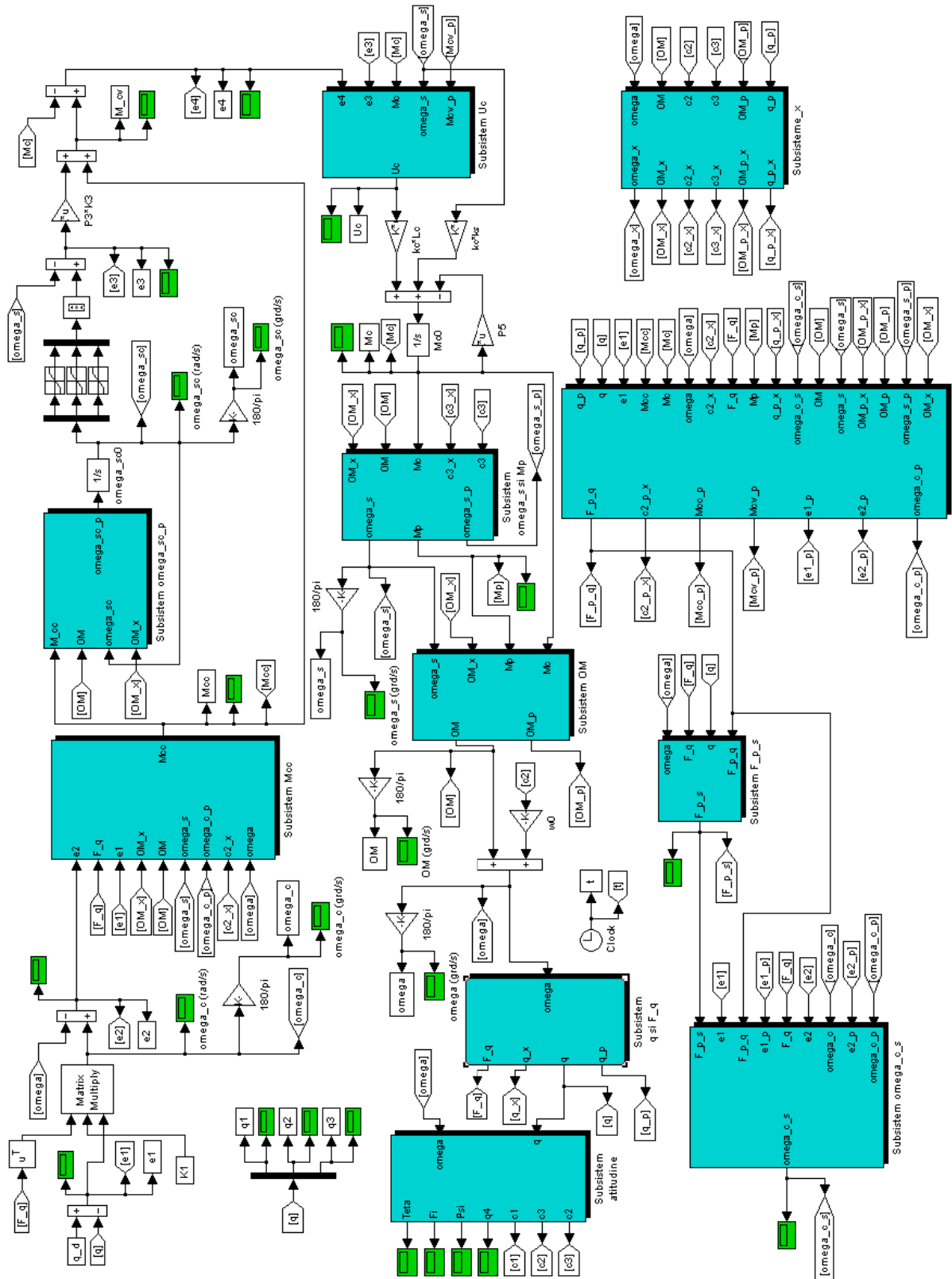
$$M_p = 3\omega_0^2 c_3^x J c_3, \quad (5.158)$$

unde  $c_3$  este al treilea vector coloană al matricei de rotație  $R_0^b$ . Pentru configurațiile de tip piramidal și de tip tetraedru, dimensiunile matricelor  $J_s, R_c, L_c, k_c, k_s, K_3$  și  $K_4$  sunt  $(4 \times 4)$ ; momentele după axele triedrului „satelit” se exprimă cu una din relațiile (5.10), (5.22), (5.25), (5.27).

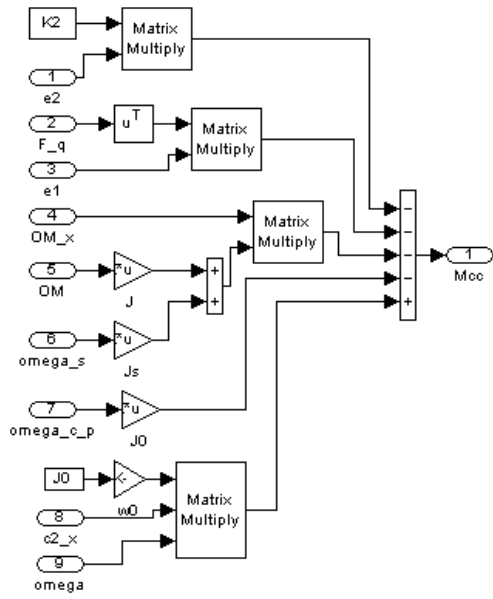
În fig. 5.9.a este prezentat modelul Matlab/Simulink al sistemului din fig. 5.7 pentru o configurație de tip piramidal sau de tip tetraedru; din cele 11 subsisteme prezentate în fig. 5.8.b-5.8.k, se modifică următoarele subsisteme: „Subsistem Mcc” – fig. 5.9.b, „Subsistem omega\_sc\_p” – fig. 5.9.c, „Subsistem Uc” – fig. 5.9.d, „Subsistem omega\_s si Mp” – fig. 5.9.e, „Subsistem OM” – fig. 5.9.f și „Subsistem F\_q\_p si Mcv\_p” – fig. 5.9.g.

În fig. 5.10 sunt reprezentate caracteristicile de timp ale sistemului din fig. 5.7, folosind roți inertiiale în configurație standard; pentru obținerea acestor caracteristici s-a conceput și utilizat programul Matlab din anexa A1. Caracteristicile de timp ale sistemului din fig. 5.7 folosind roți inertiiale în configurație piramidală sunt prezentate în fig. 5.11, iar cele asociate sistemului din fig. 5.7 folosind roți inertiiale în configurație tetraedrică sunt prezentate în fig. 5.12; pentru obținerea

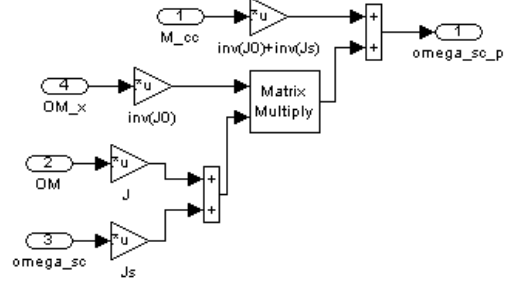
Ior s-au conceput și utilizat programele Matlab din anexele A2 și A3.



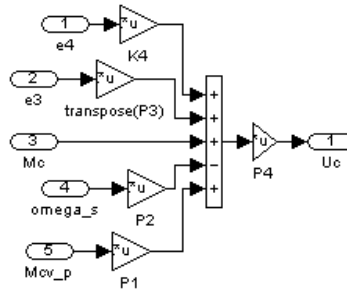
a.



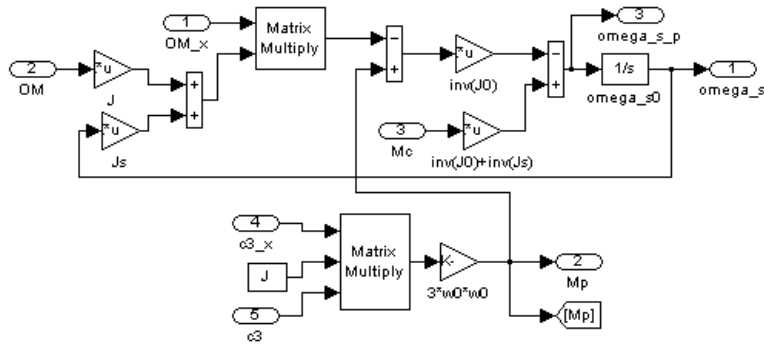
b.



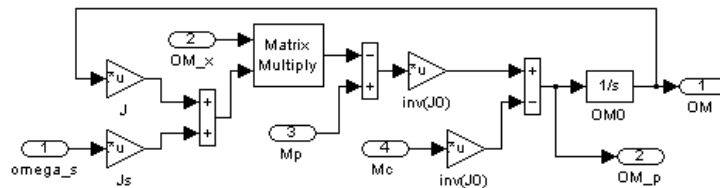
c.



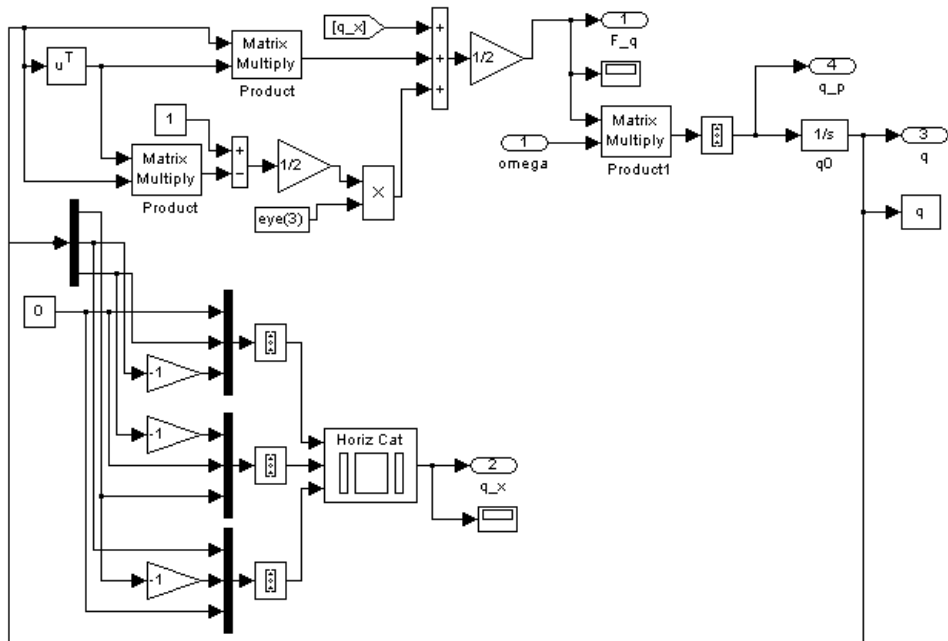
d.



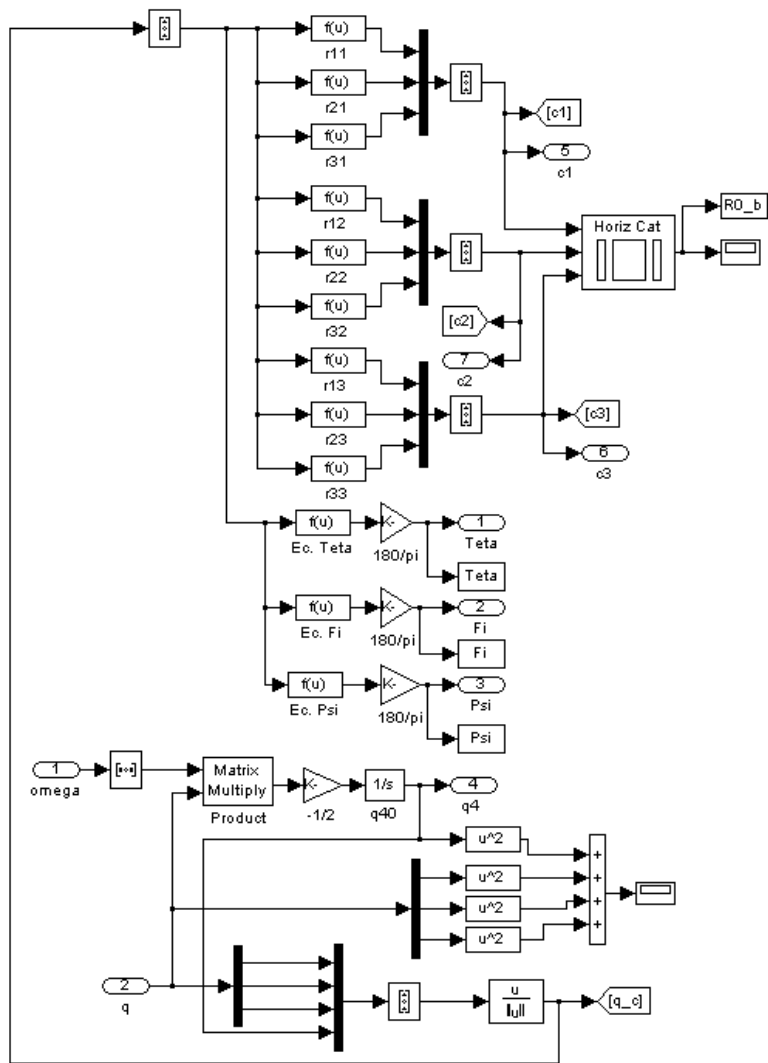
e.



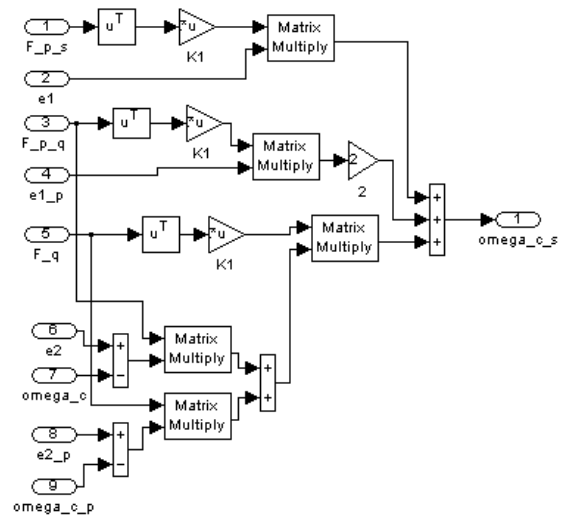
f.



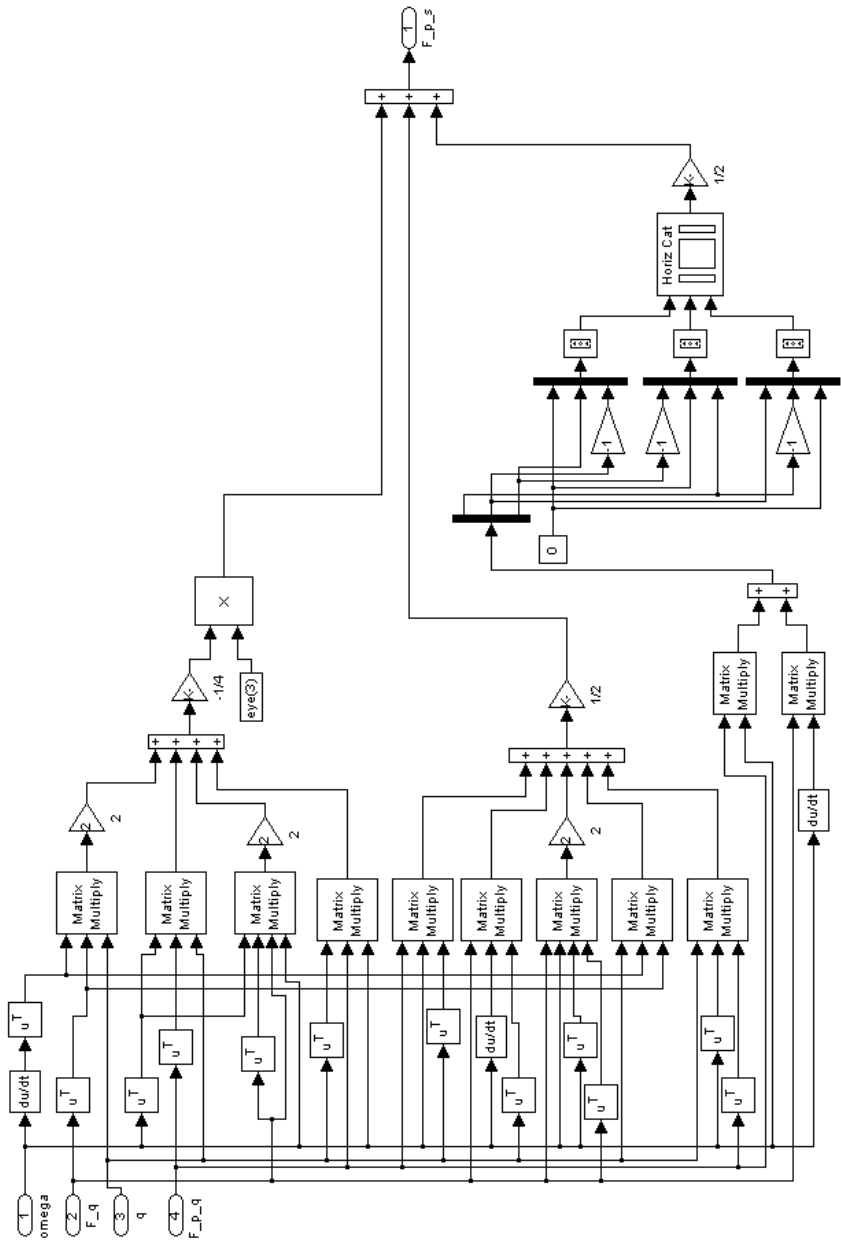
g.



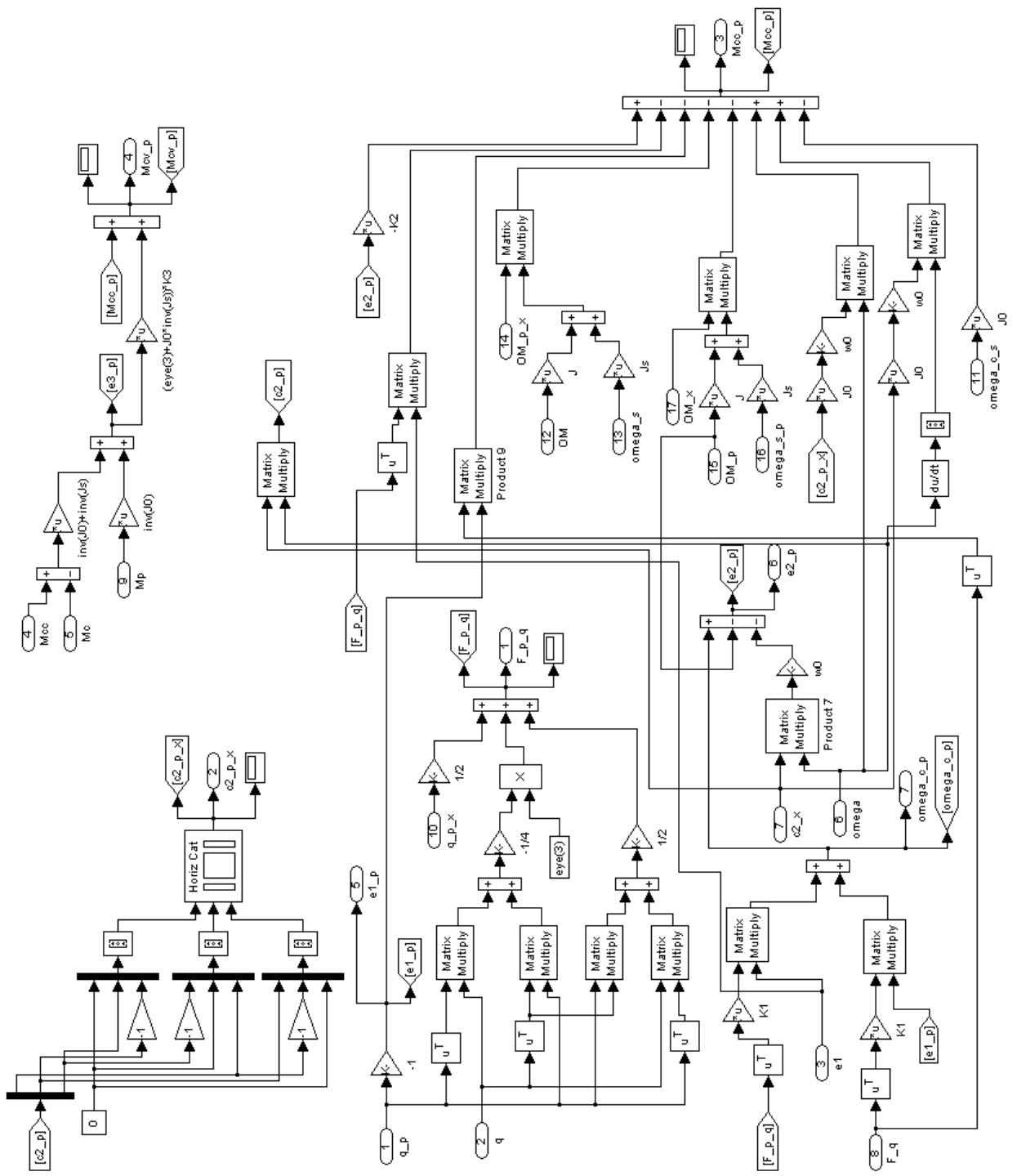
h.



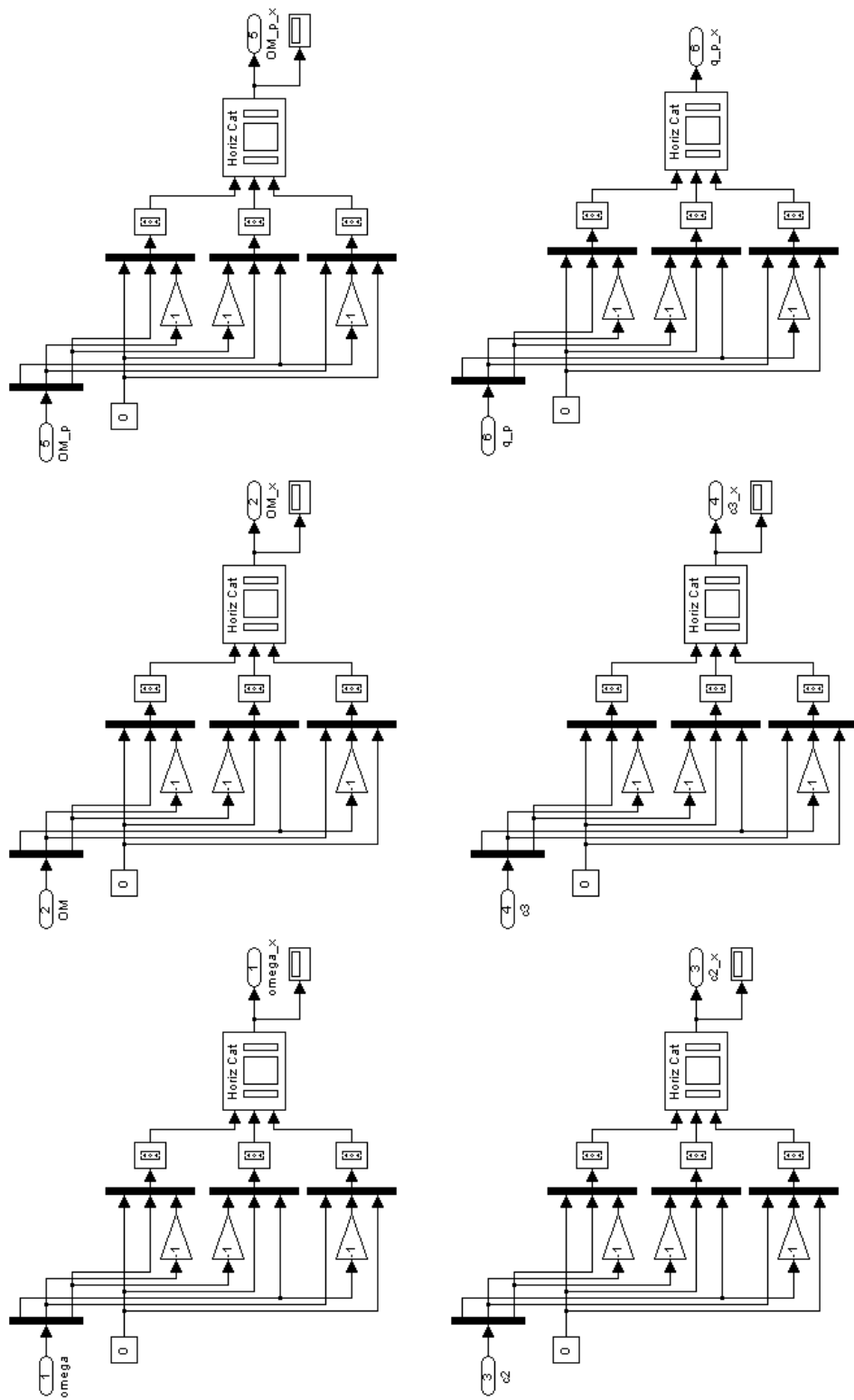
i.



j.



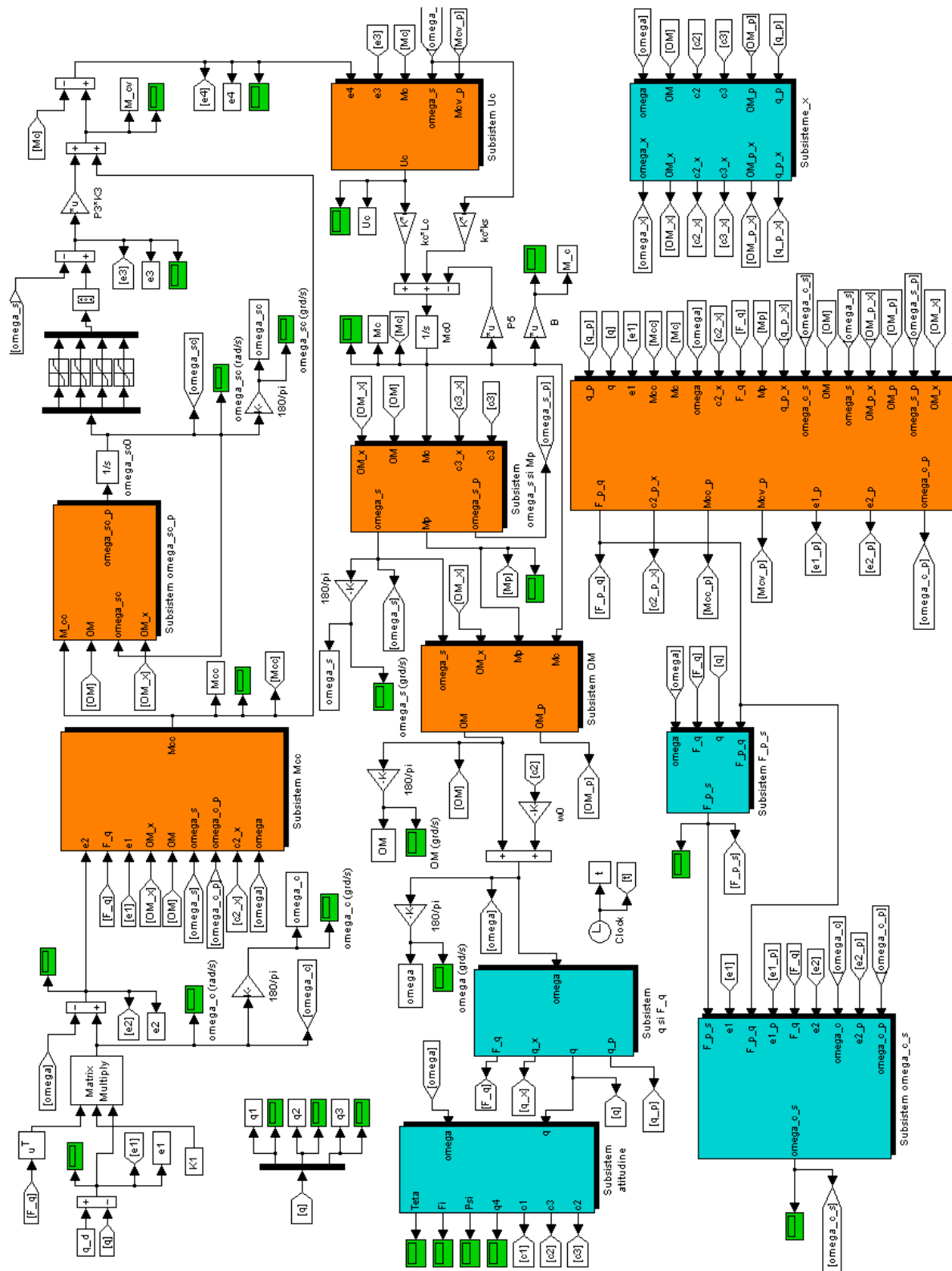
k.



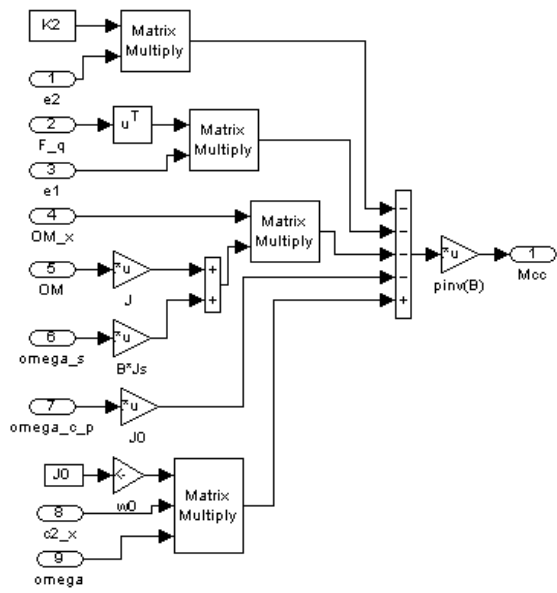
1.

Fig. 5.8. Modele Matlab/Simulink pentru sistemul din fig. 5.7 (configurație standard)

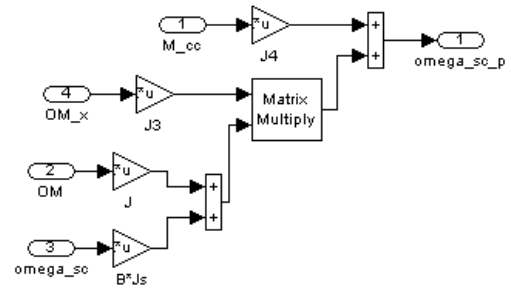




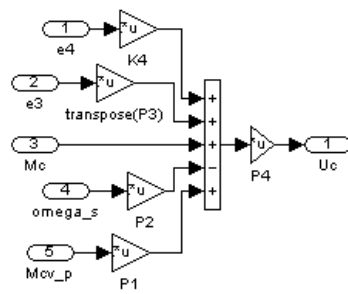
a.



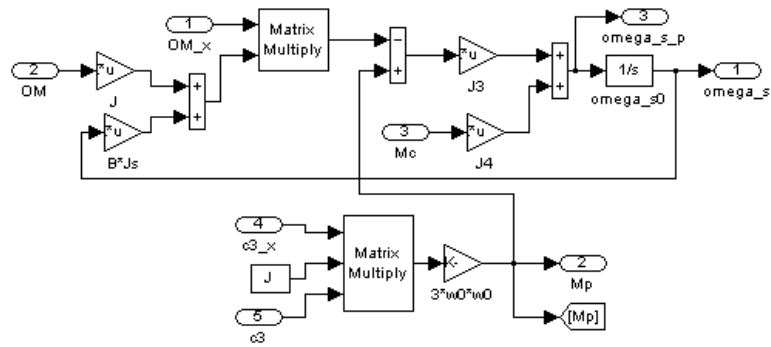
b.



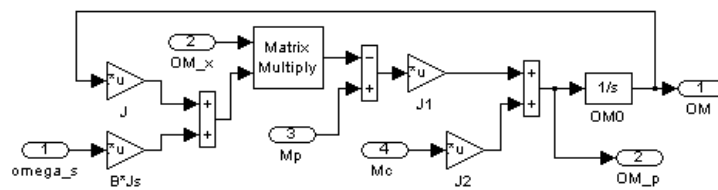
c.



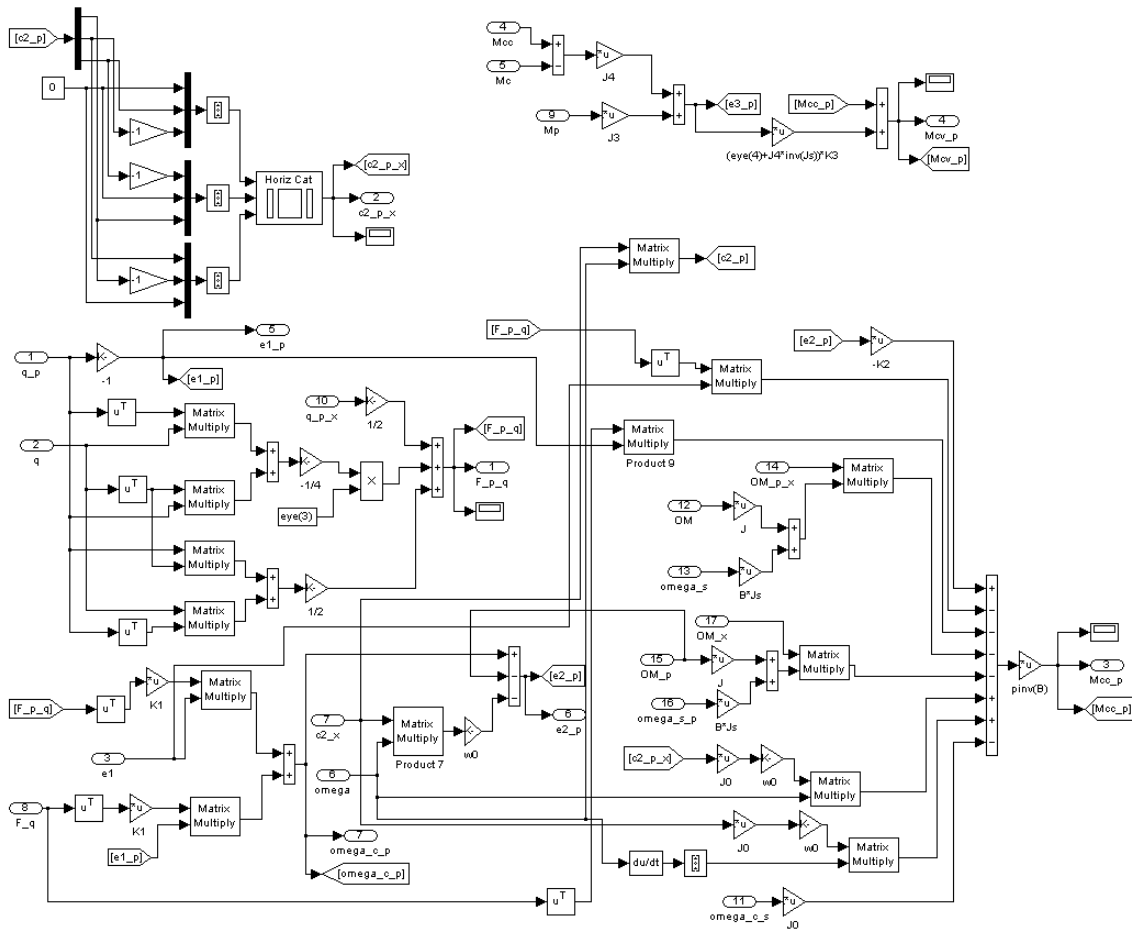
d.



e.

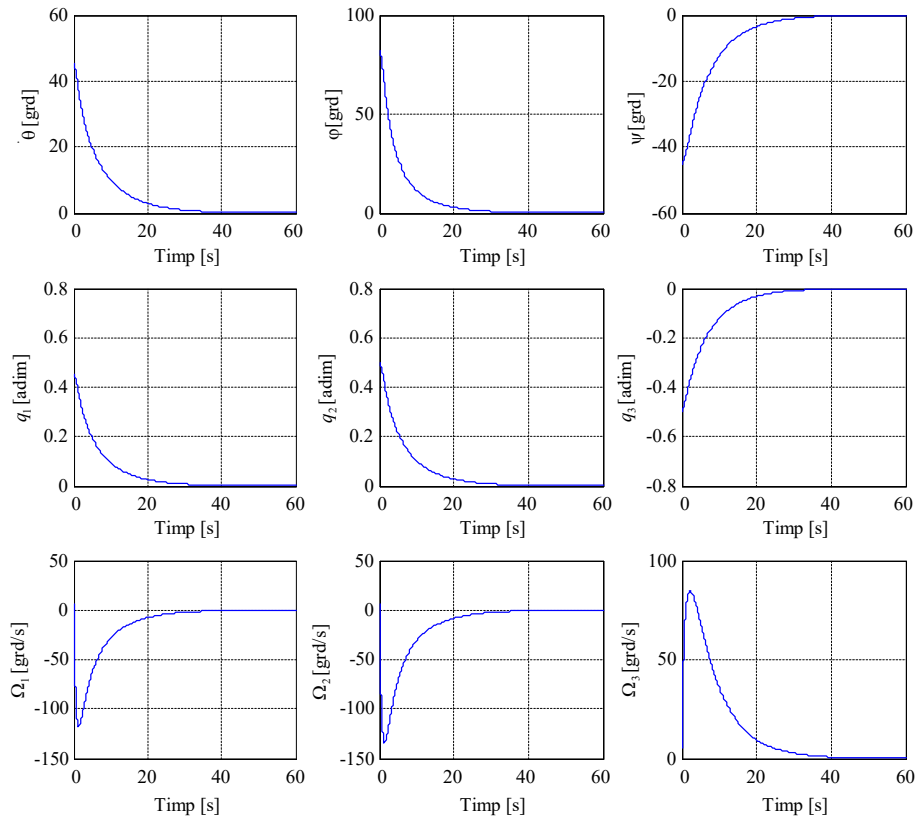


f.

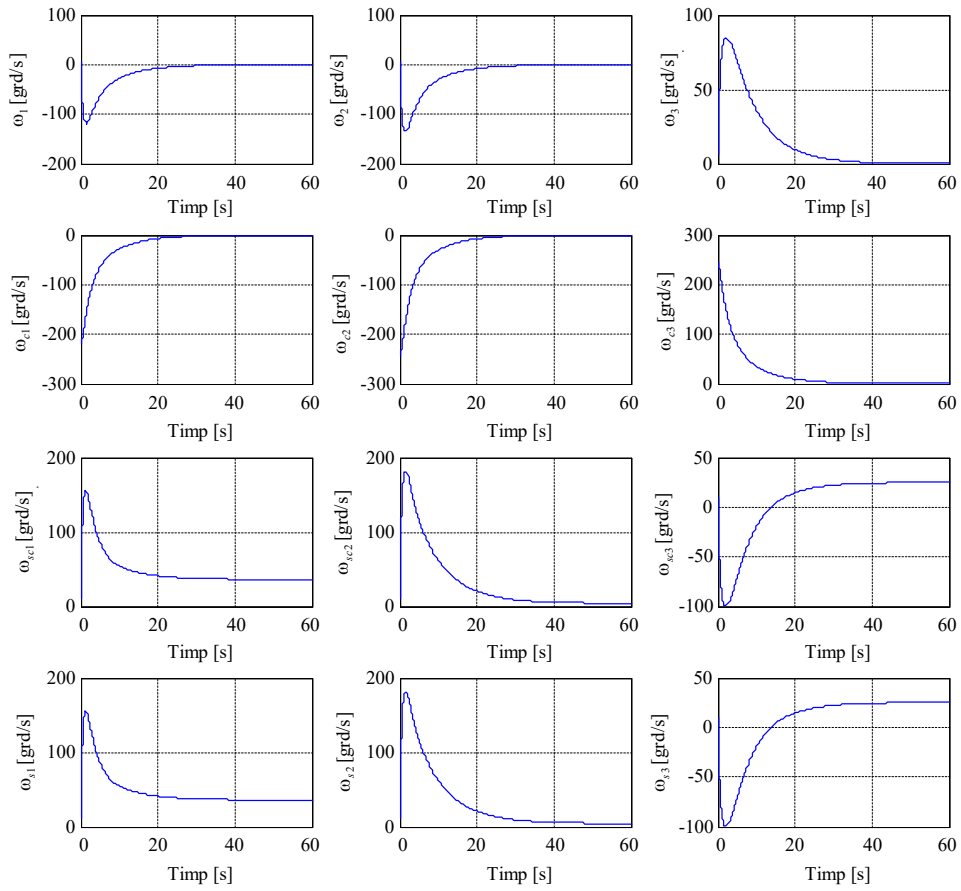


g.

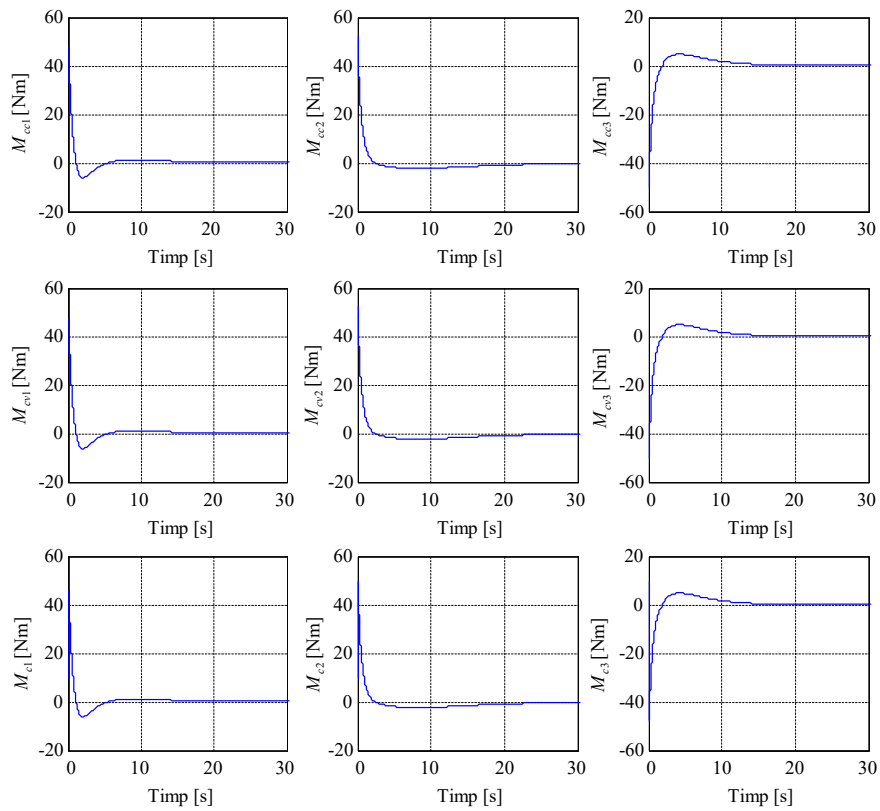
Fig. 5.9. Modele Matlab/Simulink pentru sistemul din fig. 5.7 (configurații piramidală și tetraedrică)



a.

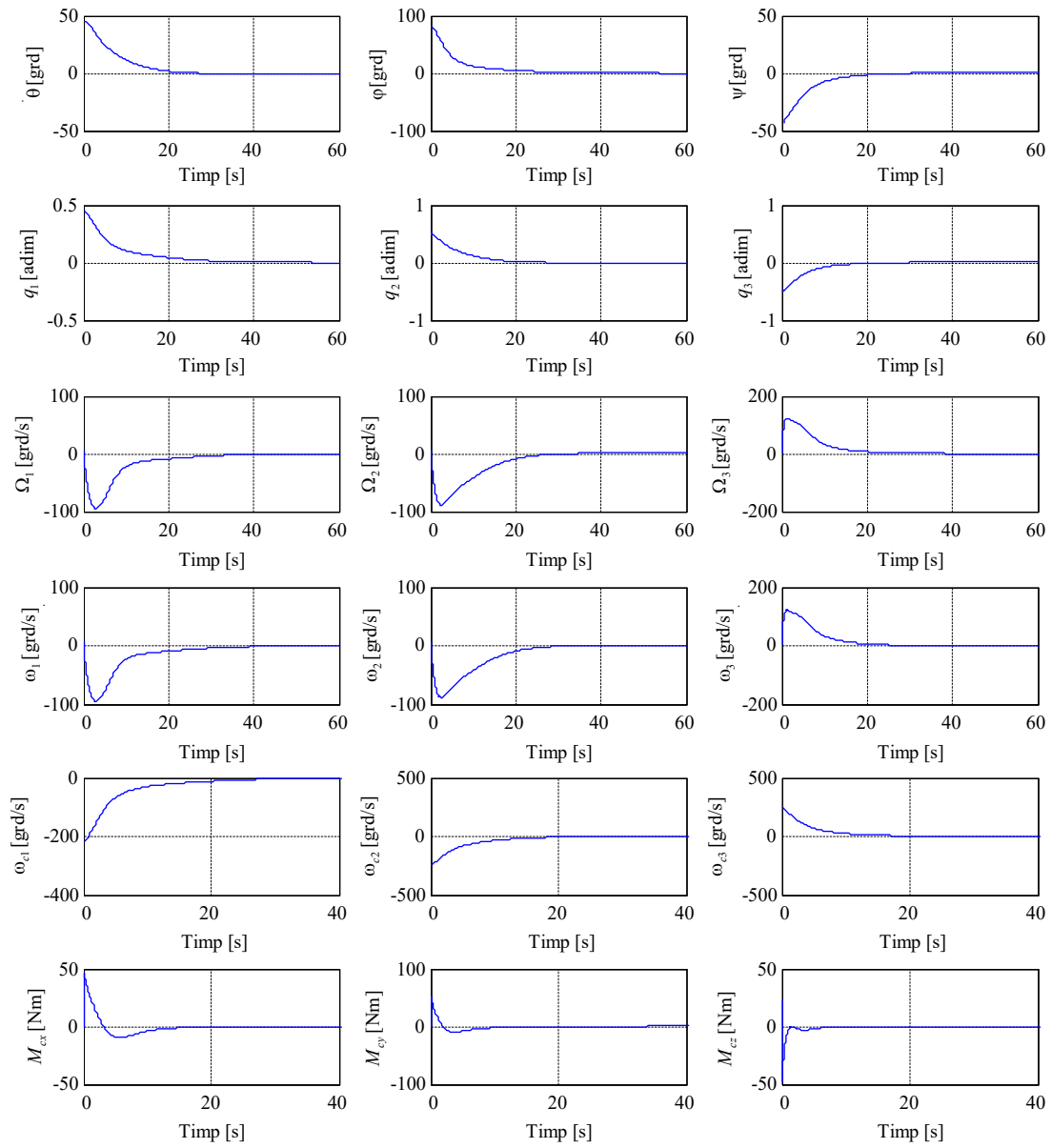


b.

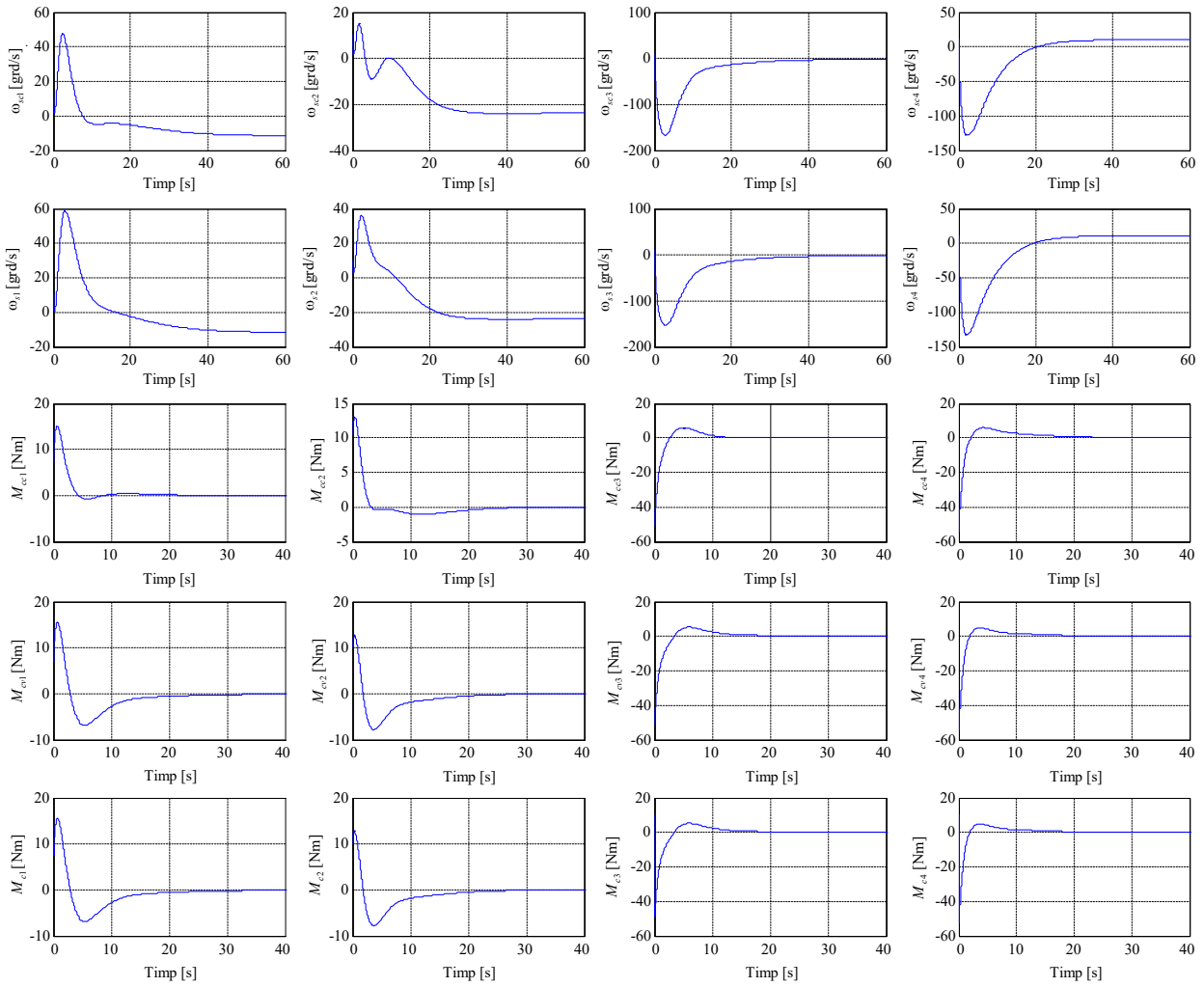


c.

Fig. 5.10. Caracteristicile de timp ale sistemului din fig. 5.7, folosind roți inerțiale în configurație standard

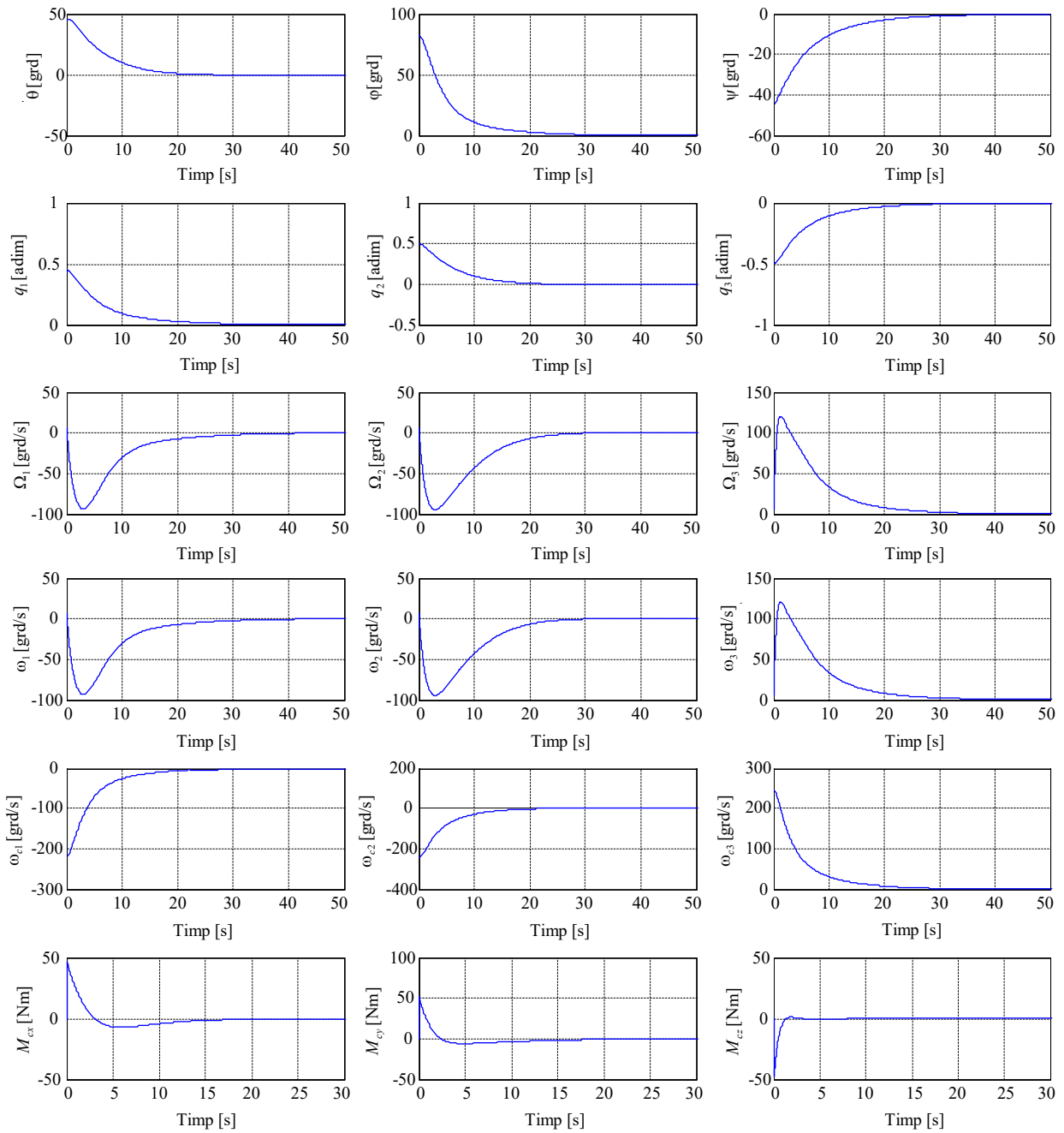


a.



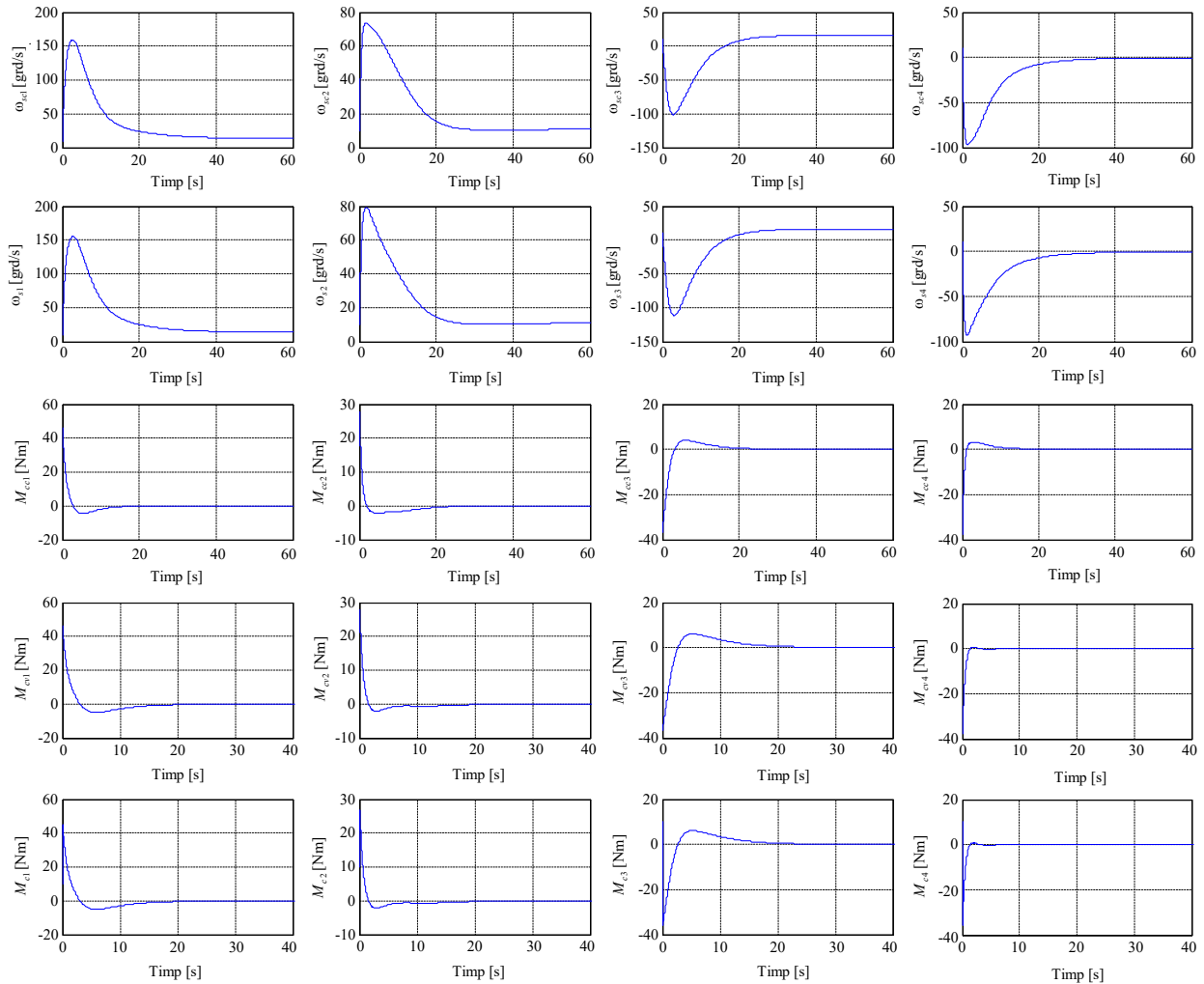
b.

Fig. 5.11. Caracteristicile de timp ale sistemului din fig. 5.7, folosind roți inertiiale în configurație piramidală



a.

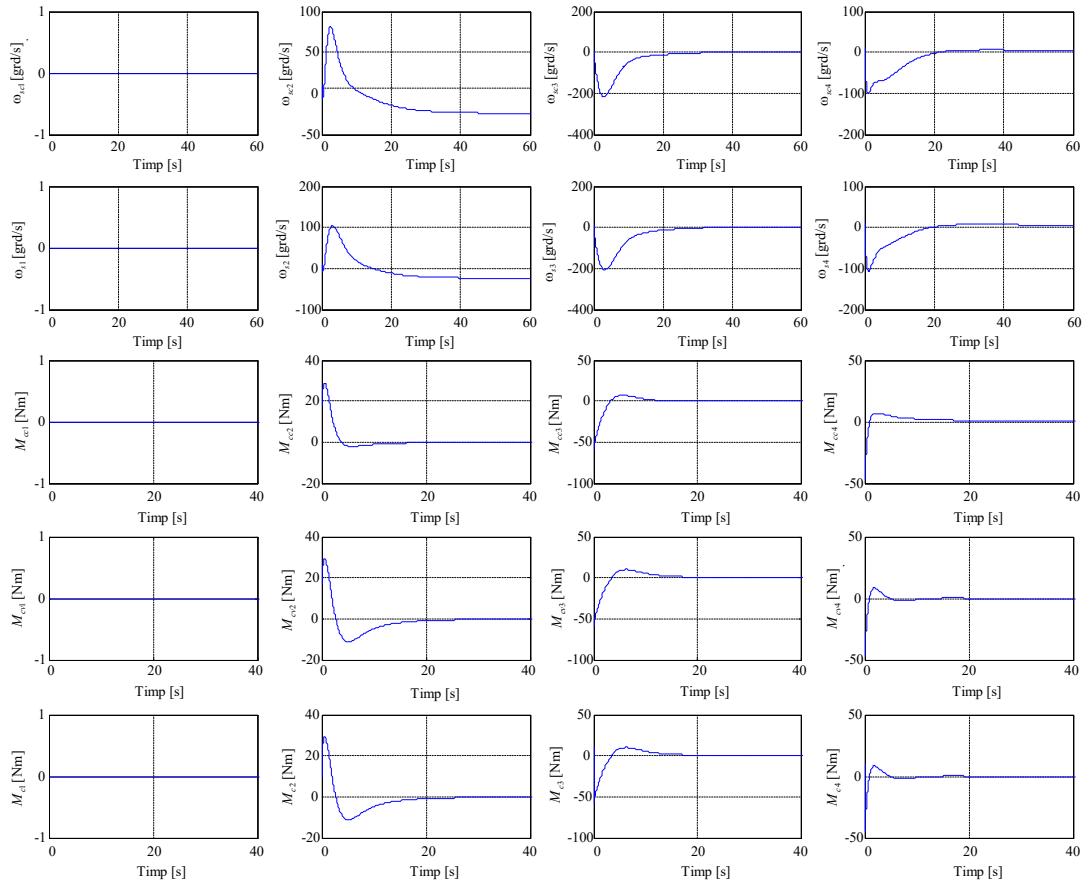




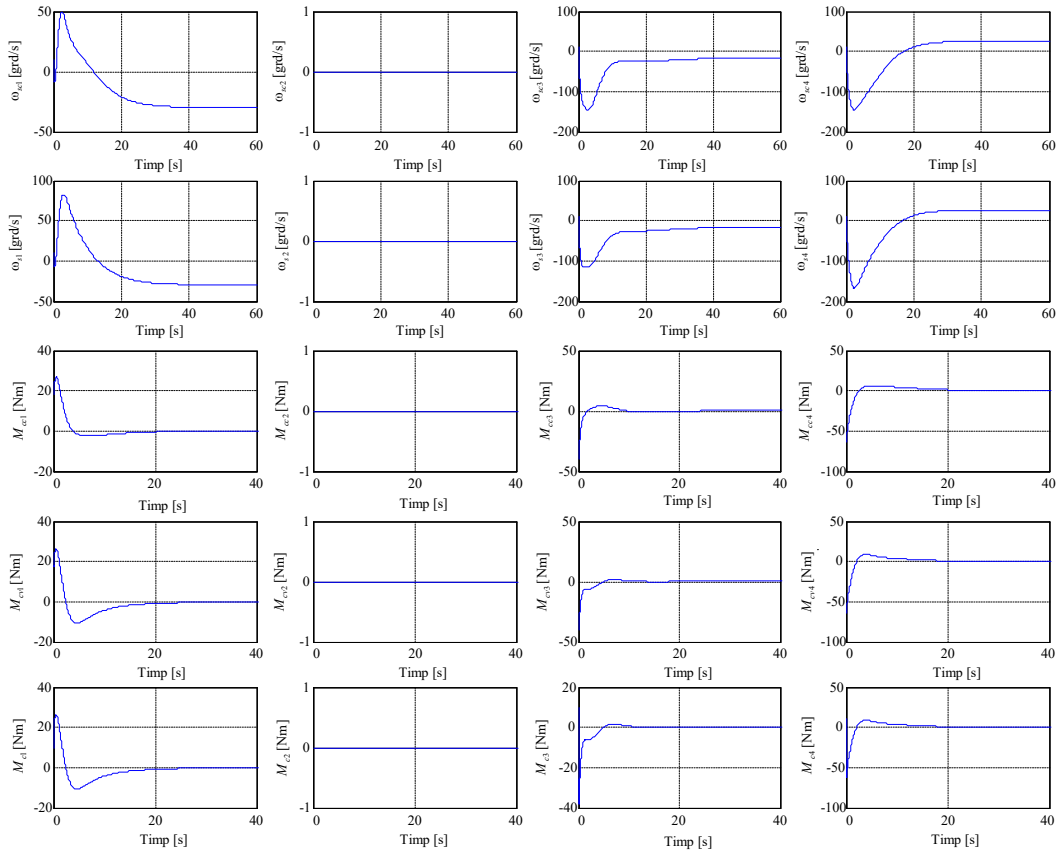
b.

Fig. 5.12. Caracteristicile de timp ale sistemului din fig. 5.7, folosind roți inertiale în configurație tetraedrică

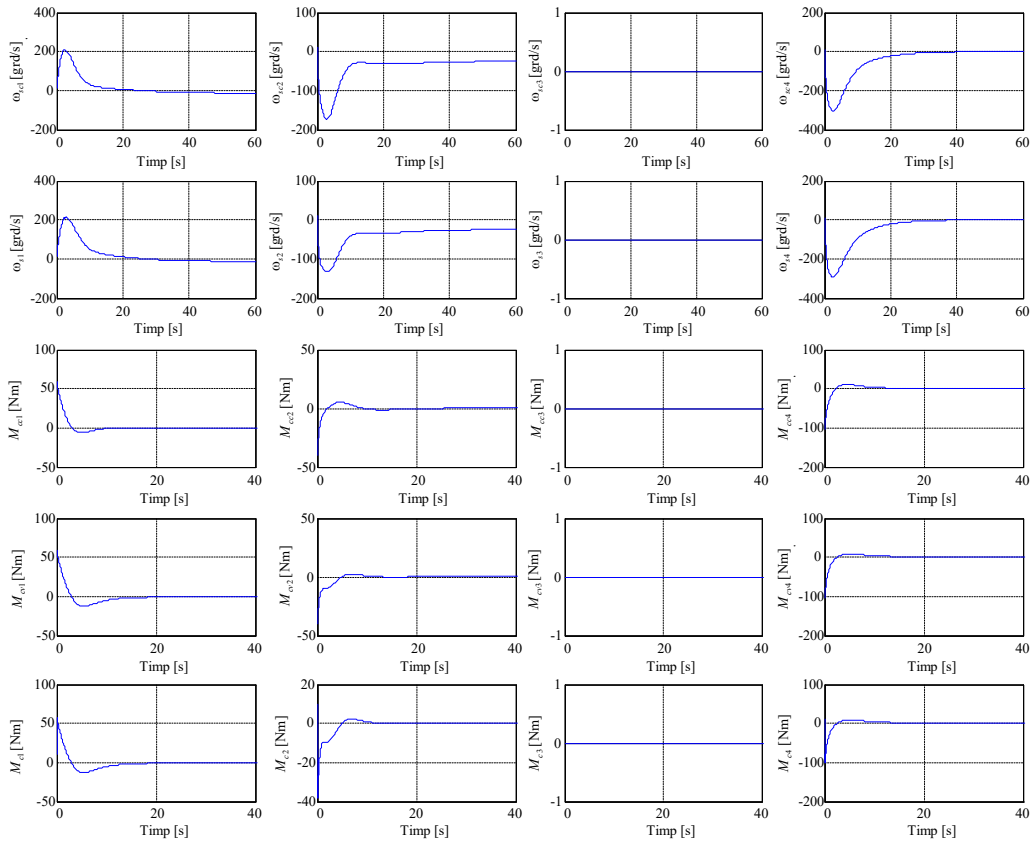
În cele ce urmează este analizată posibilitatea defectării uneia dintre cele patru roți inertiale ale configurației piramidale sau tetraedrice; în această situație, este interesant de văzut dacă sistemul de control automat din fig. 5.7 este în continuare unul viabil. Pentru simularea acestei situații nedorite (defectarea/blocarea roții inertiale „ $i$ ”,  $i = \overline{1,4}$ ), se folosesc tot modelele Matlab/ Simulink din fig. 5.8 și 5.9, soft-urile din anexele A2 și A3, modificarea constând în înlocuirea cu zerouri ale tuturor elementelor de pe coloana „ $i$ ” în matricea  $B$  (ecuația (5.22) – configurație piramidală sau (5.27) – configurație tetraedrică). Variațiile în timp ale parametrilor  $\varphi, \theta, \psi, q_i, \Omega_i, \omega_i, \omega_{ci}, i = \overline{1,3}$ , dar și a momentelor  $M_{cx}, M_{cy}, M_{cz}$  sunt similare celor din fig. 5.11.a și fig. 5.12.a. Pentru configurație piramidală, variațiile în timp ale celorlalți parametri sunt prezentate în fig. 5.13.a (cazul 1 – blocarea primei roți inertiale), fig. 5.13.b (cazul 2 – blocarea celei de-a doua roți inertiale), fig. 5.13.c (cazul 3 – blocarea celei de-a treia roți inertiale) și, respectiv, fig. 5.13.d (cazul 4 – blocarea celei de-a patra roți inertiale). Pentru configurația tetraedrică, variațiile în timp ale celorlalți parametri ce nu apar în fig. 5.12.a sunt prezentate în fig. 5.14.a (cazul 1 – blocarea primei roți inertiale), fig. 5.14.b (cazul 2 – blocarea celei de-a doua roți inertiale), fig. 5.14.c (cazul 3 – blocarea celei de-a treia roți inertiale) și, respectiv, fig. 5.14.d (cazul 4 – blocarea celei de-a patra roți inertiale).



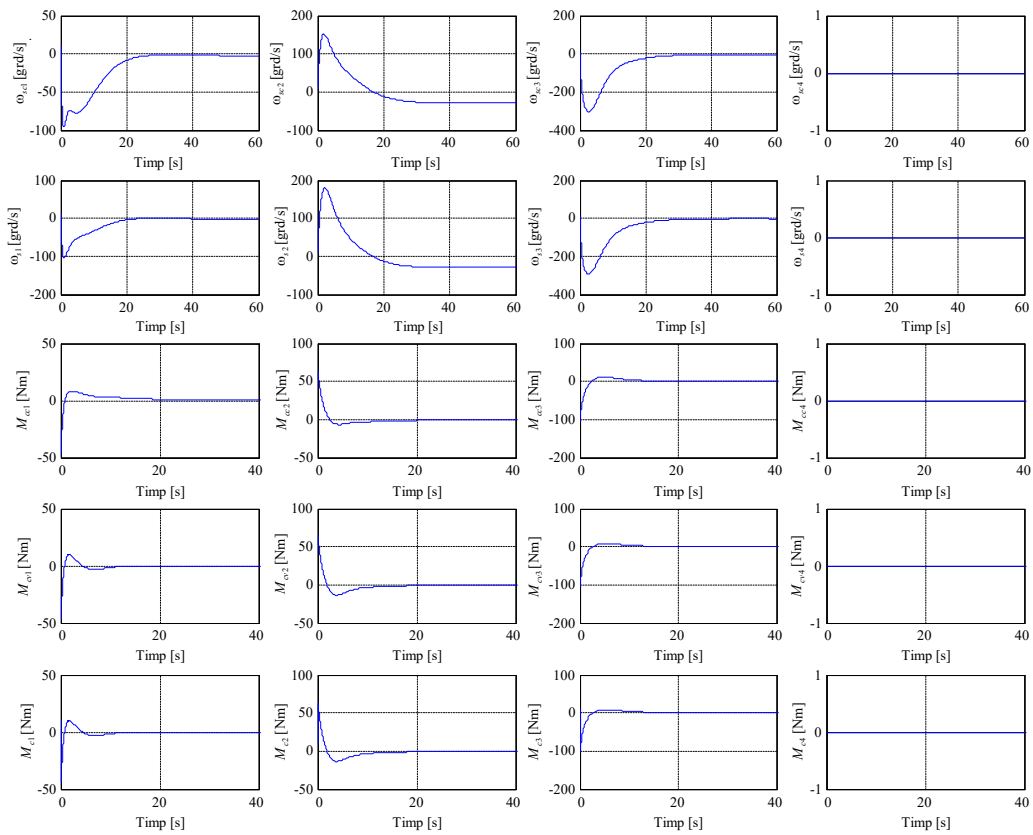
a.



b.

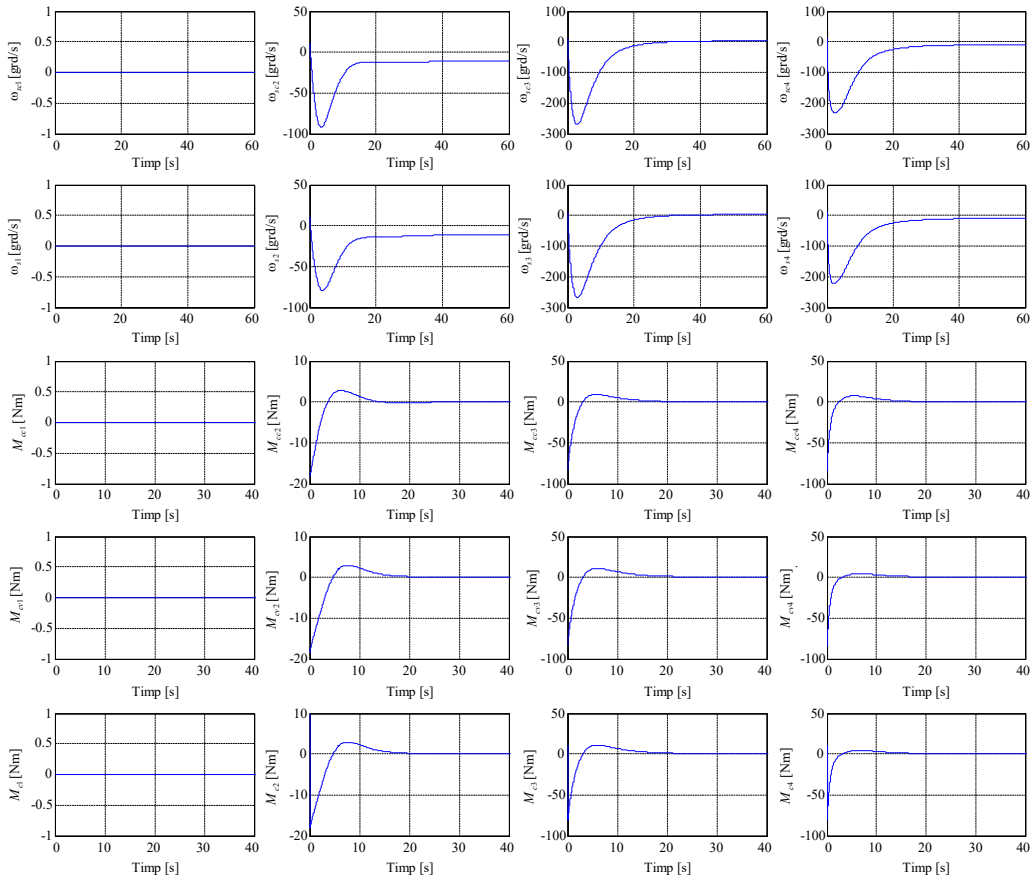


c.

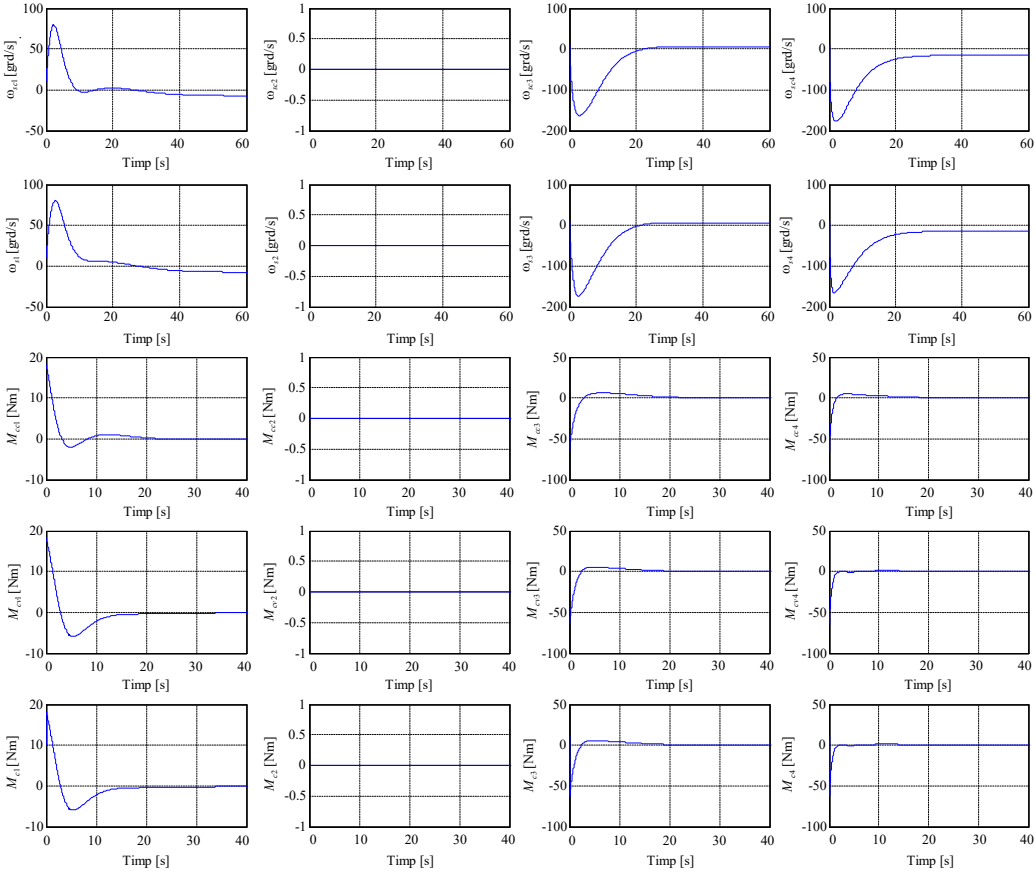


d.

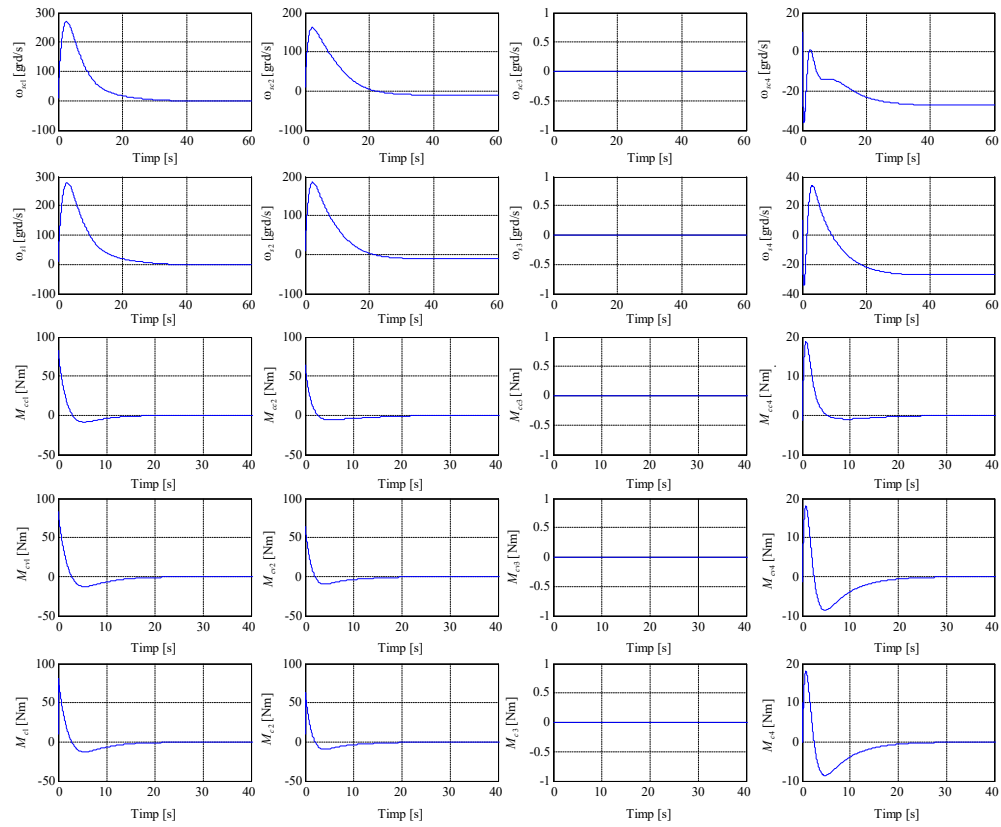
Fig. 5.13. Caracteristicile de timp ale sistemului din fig. 5.7 în cazul blocării uneia dintre cele patru roți ale configurației piramidale



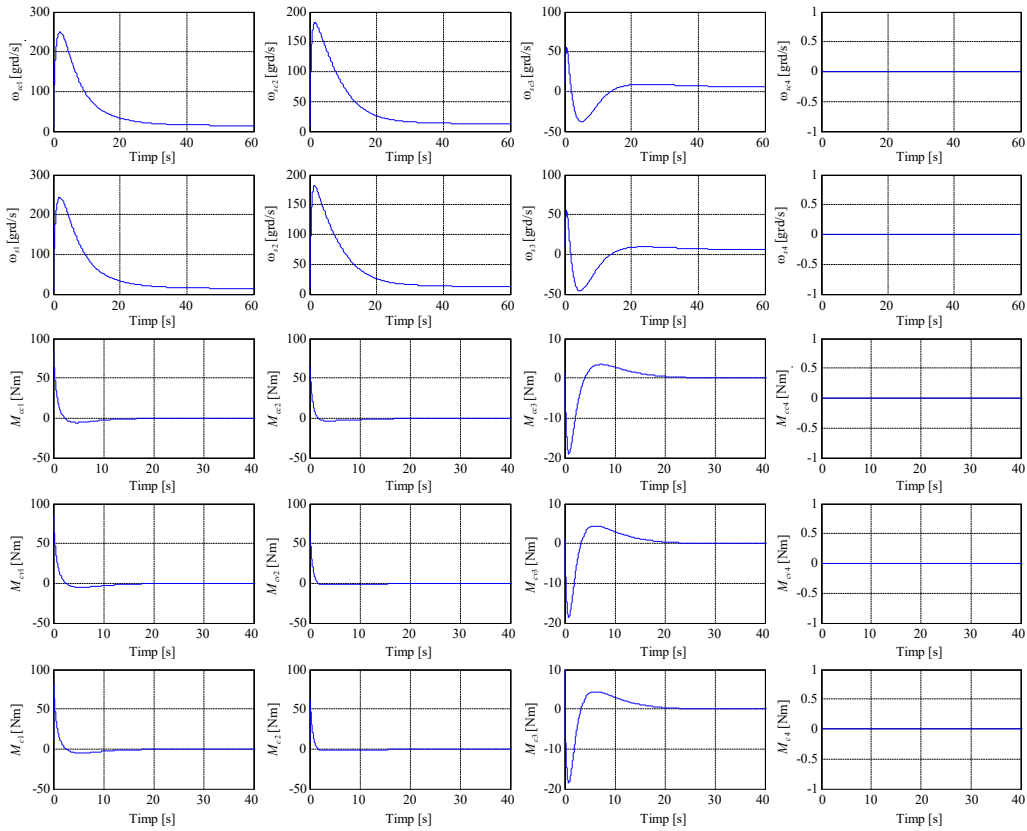
a.



b.



c.



d.

Fig. 5.14. Caracteristicile de timp ale sistemului din fig. 5.7 în cazul blocării uneia dintre cele patru roți ale configurației tetraedrice

## ANEXE

### Anexa A1

*% Sistem de control automat al atitudinii S cu metoda backstepping (roti inertiabile in configuratie standard)*

close all;clear all;

*% Date de calcul*

qc0=[0.45 0.5 -0.5 sqrt(1-0.45^2-0.5^2-0.5^2)];q0=[qc0(1) qc0(2) qc0(3)];

q10=q0(1);q20=q0(2);q30=q0(3);q40=qc0(4);q\_d=zeros(3,1);

qc0(1)^2+qc0(2)^2+qc0(3)^2+qc0(4)^2

J=2\*diag([4 4 3]);Js=5\*eye(3);

Rc=131.5\*eye(3);Lc=1900\*eye(3);kc=0.0351\*eye(3);ks=7.5\*eye(3);

K1=20\*eye(3);K2=12\*eye(3);K3=12\*eye(3);K4=10\*eye(3);omega\_0=zeros(3,1);

OM0=[0.1;0.1;0.1];omega\_s0=10\*(pi/180)\*[1;1;1];omega\_sc0=10\*(pi/180)\*[1;1;1];Mc0=10\*[1;1;1];

o\_sc\_max=100;o\_sc\_min=-100;J0=diag([1 1 2]);w0=0.001083;

P1=kc\*inv(Rc)\*inv(kc);P2=kc\*inv(Rc)\*ks;

P3=eye(3)+J0\*inv(Js);P4=inv(Lc)\*Rc\*inv(kc);P5=kc\*Rc\*inv(kc);

*% Caracteristici grafice*

sim('Sch\_caz\_1');

for i=1:length(Teta)

Teta\_(i,1)=Teta(:,i);Fi\_(i,1)=Fi(:,i);Psi\_(i,1)=Psi(:,i);

q1\_(i,1)=q1(:,i);q2\_(i,1)=q2(:,i);q3\_(i,1)=q3(:,i);

OM\_1(i,1)=OM(1,:,i);OM\_2(i,1)=OM(2,:,i);OM\_3(i,1)=OM(3,:,i);

omega1(i,1)=omega(1,:,i);omega2(i,1)=omega(2,:,i);omega3(i,1)=omega(3,:,i);

omega\_c1(i,1)=omega\_c(1,:,i);omega\_c2(i,1)=omega\_c(2,:,i);omega\_c3(i,1)=omega\_c(3,:,i);

omega\_sc1(i,1)=omega\_sc(1,:,i);omega\_sc2(i,1)=omega\_sc(2,:,i);omega\_sc3(i,1)=omega\_sc(3,:,i);

omega\_s1(i,1)=omega\_s(1,:,i);omega\_s2(i,1)=omega\_s(2,:,i);omega\_s3(i,1)=omega\_s(3,:,i);

Mcc\_1(i,1)=Mcc(1,:,i);Mcc\_2(i,1)=Mcc(2,:,i);Mcc\_3(i,1)=Mcc(3,:,i);

M\_cv\_1(i,1)=M\_cv(1,:,i);M\_cv\_2(i,1)=M\_cv(2,:,i);M\_cv\_3(i,1)=M\_cv(3,:,i);

Mc\_1(i,1)=Mc(1,:,i);Mc\_2(i,1)=Mc(2,:,i);Mc\_3(i,1)=Mc(3,:,i);

end

figure(1);

subplot(3,3,1);plot(t,Teta\_);grid;ylabel('Teta [grd]');xlabel('Timp [s]');

subplot(3,3,2);plot(t,Fi\_);grid;ylabel('Fi [grd]');xlabel('Timp [s]');

subplot(3,3,3);plot(t,Psi\_);grid;ylabel('Psi [grd]');xlabel('Timp [s]');

subplot(3,3,4);plot(t,q1\_);grid;ylabel('q1 [adim]');xlabel('Timp [s]');

```

subplot(3,3,5);plot(t,q2_);grid;ylabel('q2 [adim]');xlabel('Timp [s]');
subplot(3,3,6);plot(t,q3_);grid;ylabel('q3 [adim]');xlabel('Timp [s]');
subplot(3,3,7);plot(t,OM_1);grid;ylabel('OM_1 [grd/s]');xlabel('Timp [s]');
subplot(3,3,8);plot(t,OM_2);grid;ylabel('OM_2 [grd/s]');xlabel('Timp [s]');
subplot(3,3,9);plot(t,OM_3);grid;ylabel('OM_3 [grd/s]');xlabel('Timp [s]');
figure(2);
subplot(4,3,1);plot(t,omega1);grid;ylabel('omega1 [grd/s]');xlabel('Timp [s]');
subplot(4,3,2);plot(t,omega2);grid;ylabel('omega2 [grd/s]');xlabel('Timp [s]');
subplot(4,3,3);plot(t,omega3);grid;ylabel('omega3 [grd/s]');xlabel('Timp [s]');
subplot(4,3,4);plot(t,omega_c1);grid;ylabel('omega_c1 [grd/s]');xlabel('Timp [s]');
subplot(4,3,5);plot(t,omega_c2);grid;ylabel('omega_c2 [grd/s]');xlabel('Timp [s]');
subplot(4,3,6);plot(t,omega_c3);grid;ylabel('omega_c3 [grd/s]');xlabel('Timp [s]');
subplot(4,3,7);plot(t,omega_sc1);grid;ylabel('omega_sc1 [grd/s]');xlabel('Timp [s]');
subplot(4,3,8);plot(t,omega_sc2);grid;ylabel('omega_sc2 [grd/s]');xlabel('Timp [s]');
subplot(4,3,9);plot(t,omega_sc3);grid;ylabel('omega_sc3 [grd/s]');xlabel('Timp [s]');
subplot(4,3,10);plot(t,omega_s1);grid;ylabel('omega_s1 [grd/s]');xlabel('Timp [s]');
subplot(4,3,11);plot(t,omega_s2);grid;ylabel('omega_s2 [grd/s]');xlabel('Timp [s]');
subplot(4,3,12);plot(t,omega_s3);grid;ylabel('omega_s3 [grd/s]');xlabel('Timp [s]');
figure(3);
subplot(3,3,1);plot(t,Mcc_1);grid;ylabel('Mcc_1 [Nm]');xlabel('Timp [s]');
subplot(3,3,2);plot(t,Mcc_2);grid;ylabel('Mcc_2 [Nm]');xlabel('Timp [s]');
subplot(3,3,3);plot(t,Mcc_3);grid;ylabel('Mcc_3 [Nm]');xlabel('Timp [s]');
subplot(3,3,4);plot(t,M_cv_1);grid;ylabel('M_cv_1 [Nm]');xlabel('Timp [s]');
subplot(3,3,5);plot(t,M_cv_2);grid;ylabel('M_cv_2 [Nm]');xlabel('Timp [s]');
subplot(3,3,6);plot(t,M_cv_3);grid;ylabel('M_cv_3 [Nm]');xlabel('Timp [s]');
subplot(3,3,7);plot(t,Mc_1);grid;ylabel('Mc_1 [Nm]');xlabel('Timp [s]');
subplot(3,3,8);plot(t,Mc_2);grid;ylabel('Mc_2 [Nm]');xlabel('Timp [s]');
subplot(3,3,9);plot(t,Mc_3);grid;ylabel('Mc_3 [Nm]');xlabel('Timp [s]');

```

## Anexa A2

*% Sistem de control automat al atitudinii S cu metoda backstepping (roti inertiabile in configuratie piramidala)*

close all;clear all;

*% Date de calcul*

qc0=[0.45 0.5 -0.5 sqrt(1-0.45^2-0.5^2-0.5^2)];q0=[qc0(1) qc0(2) qc0(3)];

q10=q0(1);q20=q0(2);q30=q0(3);q40=q0(4);q\_d=zeros(3,1);

qc0(1)^2+qc0(2)^2+qc0(3)^2+qc0(4)^2

J=2\*diag([4 4 3]);Js=5\*eye(4);beta=35.26\*(pi/180);

```

Rc=131.5*eye(4);Lc=1900*eye(4);kc=0.0351*eye(4);ks=7.5*eye(4);
K1=1*diag([20 20 20]);K2=diag([12 12 12]);
K3=diag([12 12 12 12]);K4=diag([10 10 10 10]);omega_0=zeros(3,1);
OM0=[0.1;0.1;0.1];omega_s0=10*(pi/180)*[1;1;1];omega_sc0=10*(pi/180)*[1;1;1];Mc0=10*[1;1;1];
o_sc_max=100;o_sc_min=-100;J0=diag([1 1 2]);w0=0.001083;
B1=[cos(beta) 0 -cos(beta) 0; 0 cos(beta) 0 -cos(beta); sin(beta) sin(beta) sin(beta) sin(beta)];
B2=[(sqrt(3))/3 -(sqrt(3))/3 -(sqrt(3))/3 (sqrt(3))/3; (sqrt(3))/3 (sqrt(3))/3 -(sqrt(3))/3 -(sqrt(3))/3;
(sqrt(3))/3 (sqrt(3))/3 (sqrt(3))/3 (sqrt(3))/3];
B=B1;JJ=pinv([J B*Js;Js*pinv(B) Js]);J1=JJ(1:3,1:3);J2=JJ(1:3,4:7);J3=JJ(4:7,1:3);J4=JJ(4:7,4:7);
P1=kc*inv(Rc)*inv(kc);P2=kc*inv(Rc)*ks;
P3=eye(4)+J4*inv(Js);P4=inv(Lc)*Rc*inv(kc);P5=kc*Rc*inv(kc);
% Caratteristiche grafice
sim('Sch_caz_2');
for i=1:length(Teta)
    Teta_(i,1)=Teta(:,i);Fi_(i,1)=Fi(:,i);Psi_(i,1)=Psi(:,i);
    q1_(i,1)=q1(:,i);q2_(i,1)=q2(:,i);q3_(i,1)=q3(:,i);
    OM_1(i,1)=OM(1,:,i);OM_2(i,1)=OM(2,:,i);OM_3(i,1)=OM(3,:,i);
    omega1(i,1)=omega(1,:,i);omega2(i,1)=omega(2,:,i);omega3(i,1)=omega(3,:,i);
    omega_c1(i,1)=omega_c(1,:,i);omega_c2(i,1)=omega_c(2,:,i);omega_c3(i,1)=omega_c(3,:,i);
    M_cx(i,1)=M_c(1,:,i);M_cy(i,1)=M_c(2,:,i);M_cz(i,1)=M_c(3,:,i);
    omega_sc1(i,1)=omega_sc(1,:,i);omega_sc2(i,1)=omega_sc(2,:,i);
    omega_sc3(i,1)=omega_sc(3,:,i);omega_sc4(i,1)=omega_sc(4,:,i);
    omega_s1(i,1)=omega_s(1,:,i);omega_s2(i,1)=omega_s(2,:,i);
    omega_s3(i,1)=omega_s(3,:,i);omega_s4(i,1)=omega_s(4,:,i);
    Mcc_1(i,1)=Mcc(1,:,i);Mcc_2(i,1)=Mcc(2,:,i);Mcc_3(i,1)=Mcc(3,:,i); Mcc_4(i,1)=Mcc(4,:,i);
    M_cv_1(i,1)=M_cv(1,:,i);M_cv_2(i,1)=M_cv(2,:,i);M_cv_3(i,1)=M_cv(3,:,i);M_cv_4(i,1)=M_cv(4,:,i);
    Mc_1(i,1)=Mc(1,:,i);Mc_2(i,1)=Mc(2,:,i);Mc_3(i,1)=Mc(3,:,i);Mc_4(i,1)=Mc(4,:,i);
end
figure(1);
subplot(6,3,1);plot(t,Teta_);grid;ylabel('Teta [grd]');xlabel('Timp [s]');
subplot(6,3,2);plot(t,Fi_);grid;ylabel('Fi [grd]');xlabel('Timp [s]');
subplot(6,3,3);plot(t,Psi_);grid;ylabel('Psi [grd]');xlabel('Timp [s]');
subplot(6,3,4);plot(t,q1_);grid;ylabel('q1 [adim]');xlabel('Timp [s]');
subplot(6,3,5);plot(t,q2_);grid;ylabel('q2 [adim]');xlabel('Timp [s]');
subplot(6,3,6);plot(t,q3_);grid;ylabel('q3 [adim]');xlabel('Timp [s]');
subplot(6,3,7);plot(t,OM_1);grid;ylabel('OM_1 [grd/s]');xlabel('Timp [s]');
subplot(6,3,8);plot(t,OM_2);grid;ylabel('OM_2 [grd/s]');xlabel('Timp [s]');

```



```

subplot(6,3,9);plot(t,OM_3);grid;ylabel('OM_3 [grd/s]');xlabel('Timp [s]');
subplot(6,3,10);plot(t,omega1);grid;ylabel('omega1 [grd/s]');xlabel('Timp [s]');
subplot(6,3,11);plot(t,omega2);grid;ylabel('omega2 [grd/s]');xlabel('Timp [s]');
subplot(6,3,12);plot(t,omega3);grid;ylabel('omega3 [grd/s]');xlabel('Timp [s]');
subplot(6,3,13);plot(t,omega_c1);grid;ylabel('omega_c1 [grd/s]');xlabel('Timp [s]');
subplot(6,3,14);plot(t,omega_c2);grid;ylabel('omega_c2 [grd/s]');xlabel('Timp [s]');
subplot(6,3,15);plot(t,omega_c3);grid;ylabel('omega_c3 [grd/s]');xlabel('Timp [s]');
subplot(6,3,16);plot(t,M_cx);grid;ylabel('M_cx [Nm]');xlabel('Timp [s]');
subplot(6,3,17);plot(t,M_cy);grid;ylabel('M_cy [Nm]');xlabel('Timp [s]');
subplot(6,3,18);plot(t,M_cz);grid;ylabel('M_cz [Nm]');xlabel('Timp [s]');
figure(2);
subplot(5,4,1);plot(t,omega_sc1);grid;ylabel('omega_sc1 [grd/s]');xlabel('Timp [s]');
subplot(5,4,2);plot(t,omega_sc2);grid;ylabel('omega_sc2 [grd/s]');xlabel('Timp [s]');
subplot(5,4,3);plot(t,omega_sc3);grid;ylabel('omega_sc3 [grd/s]');xlabel('Timp [s]');
subplot(5,4,4);plot(t,omega_sc4);grid;ylabel('omega_sc4 [grd/s]');xlabel('Timp [s]');
subplot(5,4,5);plot(t,omega_s1);grid;ylabel('omega_s1 [grd/s]');xlabel('Timp [s]');
subplot(5,4,6);plot(t,omega_s2);grid;ylabel('omega_s2 [grd/s]');xlabel('Timp [s]');
subplot(5,4,7);plot(t,omega_s3);grid;ylabel('omega_s3 [grd/s]');xlabel('Timp [s]');
subplot(5,4,8);plot(t,omega_s4);grid;ylabel('omega_s4 [grd/s]');xlabel('Timp [s]');
subplot(5,4,9);plot(t,Mcc_1);grid;ylabel('Mcc_1 [Nm]');xlabel('Timp [s]');
subplot(5,4,10);plot(t,Mcc_2);grid;ylabel('Mcc_2 [Nm]');xlabel('Timp [s]');
subplot(5,4,11);plot(t,Mcc_3);grid;ylabel('Mcc_3 [Nm]');xlabel('Timp [s]');
subplot(5,4,12);plot(t,Mcc_4);grid;ylabel('Mcc_4 [Nm]');xlabel('Timp [s]');
subplot(5,4,13);plot(t,M_cv_1);grid;ylabel('M_cv_1 [Nm]');xlabel('Timp [s]');
subplot(5,4,14);plot(t,M_cv_2);grid;ylabel('M_cv_2 [Nm]');xlabel('Timp [s]');
subplot(5,4,15);plot(t,M_cv_3);grid;ylabel('M_cv_3 [Nm]');xlabel('Timp [s]');
subplot(5,4,16);plot(t,M_cv_4);grid;ylabel('M_cv_4 [Nm]');xlabel('Timp [s]');
subplot(5,4,17);plot(t,Mc_1);grid;ylabel('Mc_1 [Nm]');xlabel('Timp [s]');
subplot(5,4,18);plot(t,Mc_2);grid;ylabel('Mc_2 [Nm]');xlabel('Timp [s]');
subplot(5,4,19);plot(t,Mc_3);grid;ylabel('Mc_3 [Nm]');xlabel('Timp [s]');
subplot(5,4,20);plot(t,Mc_4);grid;ylabel('Mc_4 [Nm]');xlabel('Timp [s]');

```

### Anexa A3

*% Sistem de control automat al atitudinii S cu metoda backstepping (roti inertiiale in configuratie piramidala)*

close all;clear all;

*% Date de calcul*

qc0=[0.45 0.5 -0.5 sqrt(1-0.45^2-0.5^2-0.5^2)];q0=[qc0(1) qc0(2)

```

qc0(3)'];q10=q0(1);q20=q0(2);q30=q0(3);q40=qc0(4);q_d=zeros(3,1);
qc0(1)^2+qc0(2)^2+qc0(3)^2+qc0(4)^2
J=2*diag([4 4 3]);Js=5*eye(4);beta=19.47*(pi/180);alfa=30*(pi/180);
Rc=131.5*eye(4);Lc=1900*eye(4);kc=0.0351*eye(4);ks=7.5*eye(4);
K1=1*diag([20 20 20]);K2=diag([12 12 12]);K3=diag([12 12 12 12]);K4=diag([10 10 10
10]);omega_0=zeros(3,1);
OM0=[0.1;0.1;0.1];omega_s0=10*(pi/180)*[1;1;1;1];omega_sc0=10*(pi/180)*[1;1;1;1];Mc0=10*[1;1;1;1];
o_sc_max=100;o_sc_min=-100;J0=diag([1 1 2]);w0=0.001083;
B=[cos(beta) -cos(beta)*sin(alfa) -cos(beta)*sin(alfa) 0;0 cos(beta)*cos(alfa) -cos(beta)*cos(alfa) 0;-
sin(beta) -sin(beta) -sin(beta) 1];
JJ=pinv([J B*Js;Js*pinv(B) Js]);J1=JJ(1:3,1:3);J2=JJ(1:3,4:7);J3=JJ(4:7,1:3);J4=JJ(4:7,4:7);
P1=kc*inv(Rc)*inv(kc);P2=kc*inv(Rc)*ks;P3=eye(4)+J4*inv(Js);
P4=inv(Lc)*Rc*inv(kc);P5=kc*Rc*inv(kc);
% Caratteristiche grafice
sim('Sch_caz_3');
for i=1:length(Teta)
    Teta_(i,1)=Teta(:,i);Fi_(i,1)=Fi(:,i);Psi_(i,1)=Psi(:,i);
    q1_(i,1)=q1(:,i);q2_(i,1)=q2(:,i);q3_(i,1)=q3(:,i);
    OM_1(i,1)=OM(1,:,i);OM_2(i,1)=OM(2,:,i);OM_3(i,1)=OM(3,:,i);
    omega1(i,1)=omega(1,:,i);omega2(i,1)=omega(2,:,i);omega3(i,1)=omega(3,:,i);
    omega_c1(i,1)=omega_c(1,:,i);omega_c2(i,1)=omega_c(2,:,i);omega_c3(i,1)=omega_c(3,:,i);
    M_cx(i,1)=M_c(1,:,i);M_cy(i,1)=M_c(2,:,i);M_cz(i,1)=M_c(3,:,i);
    omega_sc1(i,1)=omega_sc(1,:,i);omega_sc2(i,1)=omega_sc(2,:,i);
    omega_sc3(i,1)=omega_sc(3,:,i);omega_sc4(i,1)=omega_sc(4,:,i);
    omega_s1(i,1)=omega_s(1,:,i);omega_s2(i,1)=omega_s(2,:,i);
    omega_s3(i,1)=omega_s(3,:,i);omega_s4(i,1)=omega_s(4,:,i);
    Mcc_1(i,1)=Mcc(1,:,i);Mcc_2(i,1)=Mcc(2,:,i);Mcc_3(i,1)=Mcc(3,:,i); Mcc_4(i,1)=Mcc(4,:,i);
    M_cv_1(i,1)=M_cv(1,:,i);M_cv_2(i,1)=M_cv(2,:,i);M_cv_3(i,1)=M_cv(3,:,i);M_cv_4(i,1)=M_cv(4,:,i);
    Mc_1(i,1)=Mc(1,:,i);Mc_2(i,1)=Mc(2,:,i);Mc_3(i,1)=Mc(3,:,i);Mc_4(i,1)=Mc(4,:,i);
end
figure(1);
subplot(6,3,1);plot(t,Teta_);grid;ylabel('Teta [grd]');xlabel('Timp [s]');
subplot(6,3,2);plot(t,Fi_);grid;ylabel('Fi [grd]');xlabel('Timp [s]');
subplot(6,3,3);plot(t,Psi_);grid;ylabel('Psi [grd]');xlabel('Timp [s]');
subplot(6,3,4);plot(t,q1_);grid;ylabel('q1 [adim]');xlabel('Timp [s]');
subplot(6,3,5);plot(t,q2_);grid;ylabel('q2 [adim]');xlabel('Timp [s]');
subplot(6,3,6);plot(t,q3_);grid;ylabel('q3 [adim]');xlabel('Timp [s]');

```

```

subplot(6,3,7);plot(t,OM_1);grid;ylabel('OM_1 [grd/s]');xlabel('Timp [s]');
subplot(6,3,8);plot(t,OM_2);grid;ylabel('OM_2 [grd/s]');xlabel('Timp [s]');
subplot(6,3,9);plot(t,OM_3);grid;ylabel('OM_3 [grd/s]');xlabel('Timp [s]');
subplot(6,3,10);plot(t,omega1);grid;ylabel('omega1 [grd/s]');xlabel('Timp [s]');
subplot(6,3,11);plot(t,omega2);grid;ylabel('omega2 [grd/s]');xlabel('Timp [s]');
subplot(6,3,12);plot(t,omega3);grid;ylabel('omega3 [grd/s]');xlabel('Timp [s]');
subplot(6,3,13);plot(t,omega_c1);grid;ylabel('omega_c1 [grd/s]');xlabel('Timp [s]');
subplot(6,3,14);plot(t,omega_c2);grid;ylabel('omega_c2 [grd/s]');xlabel('Timp [s]');
subplot(6,3,15);plot(t,omega_c3);grid;ylabel('omega_c3 [grd/s]');xlabel('Timp [s]');
subplot(6,3,16);plot(t,M_cx);grid;ylabel('M_cx [Nm]');xlabel('Timp [s]');
subplot(6,3,17);plot(t,M_cy);grid;ylabel('M_cy [Nm]');xlabel('Timp [s]');
subplot(6,3,18);plot(t,M_cz);grid;ylabel('M_cz [Nm]');xlabel('Timp [s]');
figure(2);
subplot(5,4,1);plot(t,omega_sc1);grid;ylabel('omega_sc1 [grd/s]');xlabel('Timp [s]');
subplot(5,4,2);plot(t,omega_sc2);grid;ylabel('omega_sc2 [grd/s]');xlabel('Timp [s]');
subplot(5,4,3);plot(t,omega_sc3);grid;ylabel('omega_sc3 [grd/s]');xlabel('Timp [s]');
subplot(5,4,4);plot(t,omega_sc4);grid;ylabel('omega_sc4 [grd/s]');xlabel('Timp [s]');
subplot(5,4,5);plot(t,omega_s1);grid;ylabel('omega_s1 [grd/s]');xlabel('Timp [s]');
subplot(5,4,6);plot(t,omega_s2);grid;ylabel('omega_s2 [grd/s]');xlabel('Timp [s]');
subplot(5,4,7);plot(t,omega_s3);grid;ylabel('omega_s3 [grd/s]');xlabel('Timp [s]');
subplot(5,4,8);plot(t,omega_s4);grid;ylabel('omega_s4 [grd/s]');xlabel('Timp [s]');
subplot(5,4,9);plot(t,Mcc_1);grid;ylabel('Mcc_1 [Nm]');xlabel('Timp [s]');
subplot(5,4,10);plot(t,Mcc_2);grid;ylabel('Mcc_2 [Nm]');xlabel('Timp [s]');
subplot(5,4,11);plot(t,Mcc_3);grid;ylabel('Mcc_3 [Nm]');xlabel('Timp [s]');
subplot(5,4,12);plot(t,Mcc_4);grid;ylabel('Mcc_4 [Nm]');xlabel('Timp [s]');
subplot(5,4,13);plot(t,M_cv_1);grid;ylabel('M_cv_1 [Nm]');xlabel('Timp [s]');
subplot(5,4,14);plot(t,M_cv_2);grid;ylabel('M_cv_2 [Nm]');xlabel('Timp [s]');
subplot(5,4,15);plot(t,M_cv_3);grid;ylabel('M_cv_3 [Nm]');xlabel('Timp [s]');
subplot(5,4,16);plot(t,M_cv_4);grid;ylabel('M_cv_4 [Nm]');xlabel('Timp [s]');
subplot(5,4,17);plot(t,Mc_1);grid;ylabel('Mc_1 [Nm]');xlabel('Timp [s]');
subplot(5,4,18);plot(t,Mc_2);grid;ylabel('Mc_2 [Nm]');xlabel('Timp [s]');
subplot(5,4,19);plot(t,Mc_3);grid;ylabel('Mc_3 [Nm]');xlabel('Timp [s]');
subplot(5,4,20);plot(t,Mc_4);grid;ylabel('Mc_4 [Nm]');xlabel('Timp [s]');

```

## BIBLIOGRAFIE

1. Kok, I. *Comparison and Analysis of Attitude Control Systems of a Satellite using Reaction wheel Actuators*. Master Thesis. University of Wurzburg, 2012.
2. Halelani, H.B. *Sun-Tracking Commands and Reaction Wheel Sizing with Configuration Optimization*. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, vol. 17, nr. 4, July-August, 1994.
3. Karatas, S. *LEO Satellites: Dynamic, Modeling, Simulations and Some Nonlinear Attitude Control Techniques*. Master Thesis. Middle East Technical University, 2006.
4. Kristinasen, R. *Attitude Control of Microsatellite*. Master Thesis. Department of Engineering Cybermetrics, NTNU, 2000.
5. Sidi, M. *Spacecraft Dynamics and Control*. Cambridge University Press, 1997.
6. Doruk, R.O. *Nonlinear Controller Design for a Reaction Wheel Actuated Observatory Satellite*. PhD. Thesis. Middle East Technical University, 2008.
7. Obispo, S.L. *Control and Sensor Development on a Four Wheel Pyramidal Reaction Wheel Platform*. Master Thesis. California Polytechnic University, 2008.
8. Pedersen, M. *Nonlinear Attitude Control of the Microsatellite ESEO*. Master Thesis. Norwegian University Science and Technology, 2003.
9. Johansen, S. *ESMO ADCS Redundancy Management*. Master Thesis. Narvik University College, 2006.
10. Shirazi, A., Mirsharus, M. *Pyramidal Reaction Wheel Arrangement Optimization of Satellite Attitude Control Subsystem for Minimizing Power Consumption*. Journal of Aeronautical and Space. Sci 15 (2), pag.190-198, 2014.
11. Hall, C.D., Tsiostras, P., Shen, H. *Tracking Rigid Body Motion using Thrusters and Momentum Wheels*. Journal of Astronautical Sciences, vol. 50, nr. 3, pag. 311-323, 2003.
12. Kim, B.J., Lee, H. *Three-axis Reaction Wheel Attitude Control System for KITSAT-3 Microsatellite*, 2008.
13. Wang, Q., Yang, J. *The Application of error Quaternion and PID Control Method in Earth Observation Satellite's Attitude Control System*. Systems and Control in Aerospace and Aeronautics, pag. 128-131, 2006.
14. Ives, N.E. *The Effect of Solar Radiation Pressure on the Attitude Control of an Artificial Satellite*. Aeronautical Research Council Reports and Memoranda, 1963.
15. Circi, C. *Three-axis Attitude Control using Combined Gravity-Gradient and Solar Pressure*. Journal of Aerospace Engineering, 2007.
16. Kristiansen, R., Nicklasson, P.J. *Satellite Attitude Control by Quaternion-Based Backstepping*.

- American Control Conference, June 8-10, Portland, USA, 2005.
17. Mackunis, W., Dupre, K., Fitz-Coy, N. *Adaptive Satellite Control in the Presence of Inertia and CMG Gimbal Friction Uncertainties*. Journal of Astronautical Science, vol. 56, 2008.
  18. Pinheiro, E.R., Gadelca de Souza, L.C. *Design of the Microsatellite Attitude Control System using the Mixed  $H_2/H_\infty$  Method via LMI Optimization*. Mathematical Problems in Engineering, 2013.
  19. Tregouet, J.F., Arzelier, D., Peaucelle, D., Pittet, C. *Reaction Wheels Desaturation using Magnetorquers and Static Input allocation*. Journal Control Systems Technology, 2013.
  20. Chen, X., Sun, H., Zhang, J. *Reaction Wheels Momentum Dumping by Hybrid Control of Magnetorquers and Thrusters*. AIAA Guidance, Navigation and Control Conference, 2010.
  21. Bang, H., Ha, C.K., Kim, J.H. *Flexible Spacecraft Attitude Maneuver by application of Sliding Mode Control*. Acta Astronautica, vol. 57, pag. 841-850, 2005.
  22. Kim, K.S., Kim, Y. *Robust Backstepping Control for Slew Maneuver using Nonlinear Tracking Function*. Journal of Control Systems Technology. IEEE Transactions, vol. 11, pag. 822-829, 2003.
  23. Li, C., Ma, G., Song, B. *Spacecraft Attitude Determination and Control on Nonlinear  $H_\infty$  Control*. IEEE Conference on 1<sup>st</sup> International Symposium on Systems and Control in Aeronautics and Astronautics ISSCAA, pag. 395-399, 2006.
  24. Luo, W., Chy, Y.C., Ling, K.V. *Inverse Optimal Adaptive Control for Attitude Tracking of Spacecraft*. Journal of Automatic Control, IEEE Transactions, vol. 50, pag. 1639-1654, 2005.
  25. Skelton, C.E., Hall, C.D. *Mixed Control Moment Gyro and Moemntum Wheel Attitude Control Strategies*. American Astronautics Society, 2003.
  26. Tsiotras, P., Shen, H., Hall, C. *Satellite Attitude Control and Power Tracking with Momentum Wheels*. AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics, vol. 24, nr. 1, pag. 23-34, 2001.
  27. Skjetne, R., Fossen, T.I. *On Control in Backstepping Analysis of Different Techniques*. In Proceedings of the 2004 American Control Conference, Boston, Massachusetts, pag. 1899-1904, 2004.
  28. Behal, A., Dawson, D., Zergheroglu, E., Fang, Y. *Nonlinear Tracking Control of an Underactuated Spacecraft*. Journal of Guidance, Control and Dynamics, vol. 25, nr. 5, pag. 979-985, 2002.