SISTEME DE ESTIMARE A STARII APARATELOR DE ZBOR

pentru

SPECIALIZAREA: SISTEME COMPLEXE DE INGINERIE AEROSPAŢIALĂ

TITULAR CURS: S.L. DR. ING. MIHAI LUNGU

UNIVERSITATEA DIN CRAIOVA

CAPITOLUL 1

ESTIMAREA STĂRII APARATELOR DE ZBOR UTILIZÂND OBSERVERE DE STARE

1.1. INTRODUCERE

Observerele sunt folosite pentru estimarea vectorului de stare al sistemului condus (aparatului de zbor) folosind semnalele de intrare şi de ieşire ale acestuia. Prin măsurarea unor componente ale vectorului de stare (componentele vectorului de ieşire), se reduce numărul senzorilor din sistemul de conducere, mai ales al celor pentru măsurarea unor variabile de stare greu accesibile sau greu măsurabile, cum este, de exemplu, cazul deformărilor elastice [51], [213], [242].

Primele structuri de observere au fost descoperite de Luenbergher în anii 1966, 1971. Observerele sunt folosite atât pentru sisteme cu intrări cunoscute, cât şi pentru sisteme cu intrări necunoscute, proiectarea lor aparţinând mai multor cercetători (Bhatta-Charyya, 1978; Chen şi Patton, 1999; Chorless şi Tu, 1998; Darouach, 1994; Hostetter şi Meditch, 1973; Hou şi Müller, 1992; Hui şi Zak, 1993 şi 2005; Kudva, 1980; Kurek, 1983; Wang, 1975; Yang şi Wilde, 1988; Krzminski şi Kakzorek, 2005 ş.a.).

Observerele recente sunt dedicate sistemelor cu o parte din intrări necunoscute, respectiv sistemelor cu subsisteme a căror dinamică este necunoscută. Pentru astfel de sisteme se proiectează observere cu ordin redus; intrările necunoscute pot fi perturbaţii, erori etc.

Dintre observerele pentru estimarea stării sistemelor stochastice, cel mai cunoscut este estimatorul (filtrul) Kalman-Bucy [80], [125], [142]. În cazul sistemelor neliniare cu intrări parţial necunoscute sau cu subsisteme necunoscute, se construiesc observere adaptive care utilizează reţele neuronale [86], [110], [123], [146], [159].

Cercetări mai recente se referă la proiectarea observerelor pentru sisteme cu întârziere internă [48], [61], [85], [236], bazate pe teoria lui Lyapunov; proiectarea observerelor presupune rezolvarea unor inegalităţi matriceale.

Observerele de stare liniare sunt folosite pentru estimarea stării x a sistemelor liniare pe baza vectorului y al variabilelor măsurate şi al vectorului de intrare sau a unor componente ale acestuia.

1.2. PROIECTAREA OBSERVERELOR LINIARE

1.2.1. OBSERVERE LUENBERGER

Se dă sistemul

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \tag{1.1}$$

şi se doreşte construirea unui nou sistem de forma

$$\begin{cases} \dot{w}(t) = Jw(t) + Hy(t) + Mu(t), \\ \hat{x}(t) = Lw(t) + Ny(t) + Pu(t), \end{cases} \tag{1.2}$$

sistem cu intrările $u(t), y(t)$ şi ieşirile: starea estimată $\hat{x}(t)$ şi mărimea de stare $w(t)$ [184].

Sistemul rezultant trebuie să fie stabil (matricea J să aibă valorile proprii în semiplanul stâng complex $\Leftrightarrow \Lambda(J) \subset \mathrm{C}_-$ şi $\lim\limits_{t\to\infty}(\hat{x}(t) - x(t)) = 0$ (vectorul de stare estimat $\hat{x}(t)$ să aproximeze starea sistemului) [184].

Deoarece $x(t) \neq \hat{x}(t)$, se evaluează w-Vx, unde V - matrice de fidelizare. Această matrice evaluează modul în care starea estimatorului (w) urmăreşte starea sistemului iniţial (x).

Se calculează $(w - Vx)' = (w - Vx)^T$ şi se obţine [184]

$$\begin{aligned} &\dot{w} - V\dot{x} = Jw + Hy + Mu - VAx - VBu + JVx - JVx \Leftrightarrow \\ &(w - Vx)' = J(w - Vx) + JVx + H(Cx + Du) + (M - VB)u - VAx = \\ &= J(w - Vx) + JVx + HCx + HDu - VAx + (M - VB)u = \\ &= J(w - Vx) + (JV + HC - VA)x + (M - VB + HD)u . \end{aligned} \tag{1.3}$$

Se calculează, de asemenea, şi eroarea de estimare a observerului $\hat{x} - x$

$$\begin{aligned} &e = \hat{x} - x = Kw + Ny + Pu - x = L(w - Vx) + LVx + NCx + \\ &+ NDu + Pu - x = L(w - Vx) + (LV + NC - I)x + (P + ND)u . \end{aligned} \tag{1.4}$$

Alăturând ecuaţiile (1.3) şi (1.4) se obţine

$$\begin{cases} (w - Vx)' = J(w - Vx) + (JV + HC - VA)x + (M - VB + HD)u , \\ \hat{x} - x = L(w - Vx) + (LV + NC - I)x + (P + ND)u . \end{cases} \tag{1.5}$$

Pentru ca $\hat{x}(t) \to x(t)$ trebuie ca ieşirea sistemului de mai sus să tindă asimptotic la zero (ieşirea sistemului (1.5) este $\hat{x} - x$). Acest lucru se realizează dacă sunt satisfăcute simultan condiţiile [184]

$$\begin{cases} a)\ \Lambda(J) \subset \mathrm{C}_{-}, \\ b)\ JV + HC - VA = 0, \\ c)\ M - VB + HD = 0, \\ d)\ LV + NC - I = 0, \\ e)\ P + ND = 0 . \end{cases} \tag{1.6}$$

Dacă aceste condiţii sunt simultan satisfăcute, sistemul de ecuaţii (1.5) devine

$$\begin{cases} (w - Vx)' = J(w - Vx), \\ \hat{x} - x = L(w - Vx). \end{cases} \tag{1.7}$$

Din prima ecuaţie rezultă $w - Vx \to 0$ şi, în aceste condiţii, $\Rightarrow \hat{x} - x \to 0$, indiferent de iniţializarea sistemului sau a observerului [184]. Aşadar, proiectarea estimatorului de stare se reduce la rezolvarea sistemului de ecuaţii (1.6). Acesta este un sistem cu 4 ecuaţii şi o condiţie legată de localizarea valorilor proprii; sistemul are 7 necunoscute: *J*, *V*, *H*, *M*, *L*, *N*, *P*.

Caz particular

Presupunem că estimatorul nu are transfer direct I/O, adică $N = 0$ [184]. Sistemul (1.6) devine

$$\begin{cases} \Lambda(J) \subset \mathrm{C}_{-}, \\ JV + HC - VA = 0, \\ M - VB + HD = 0, \\ LV - I = 0, \\ P = 0. \end{cases} \tag{1.8}$$

Alegând *V*=*I*, rezultă *L*=*I*, *P*=0, iar sistemul (1.8) devine

$$\begin{cases} \Lambda(J) \subset \mathrm{C}_{-}, \\ J = A - HC, \\ M = B - HD. \end{cases} \tag{1.9}$$

Impunând valori proprii dorite (în semiplanul stâng complex) pentru matricea *J*=*A*-*HC* se determină atât matricea *H* cât şi matricea *J*. Pentru aceasta este nevoie ca perechea (*C*, *A*) să fie detectabilă. Dacă în plus (*C*, *A*) - observabilă, rezultă ca spectrul matricei de stare *J* poate fi alocat arbitrar [184]. În acest moment s-au determinat toate matricele din ecuaţia (1.6). Aşadar, estimatorul de stare obţinut este descris de următoarele ecuaţiile [184]:

$$\begin{cases} \dot{w}(t) = (A - HC)w(t) + Bu(t) + Hy(t) - HDu(t), \\ \hat{x}(t) = w(t), \end{cases} \tag{1.10}$$

sistem echivalent cu [184]

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - HC)\hat{x}(t) + (B - HD)u(t) + Hy(t). \tag{1.11}$$

Deci, pentru determinarea vectorului de stare estimat sunt necesare semnalele u şi y.

Observerul obţinut se numeşte estimator Luenberger. Pentru ca estimatorul să aibă coeficienţi reali, spectrul matricei $J = A - HC$ se alege simetric [184]. Dacă însă perechea (C, A) este observabilă, spectrul matricei de stare a estimatorului $(A - HC)$ poate fi ales arbitrar [184].

Condiţia de observabilitate a perechii (C, A) este necesară şi suficientă pentru a putea construi un observer Luenberger [184]. Estimatorul Luenberger are dimensiunea *n* (numărul de linii şi de coloane ale matricei *A*). De aceea, el se mai numeşte estimator cu ordin întreg [184].

1.2.2. ESTIMAREA STĂRII SISTEMELOR LINIARE ŞI CONTINUE CU DINAMICĂ PARŢIAL CUNOSCUTĂ

Operaţiunea de proiectare a observerelor este mai dificilă în cazul în care dinamica liniară asociată sistemului este parţial cunoscută. De altfel, în practică, cunoaşterea exactă a dinamicii unui avion este importantă, fiind nevoie de luarea în calcul a necunoscutelor ce afectează dinamica sistemului [198]. Proiectarea unui observer se poate face doar dacă se cunosc complet matricele din ecuaţia de stare. Totuşi, aşa cum se va arăta în continuare, există posibilitatea construirii unui observer Luenberger şi în cazul în care matricea sistemului are o parte cunoscută şi alta necunoscută. În anumite condiţii [198], elementele necunoscute se vor înlocui cu zerouri şi se va lucra cu matricea rezultantă. Dinamica sistemului, caracterizată în principal de matricea din ecuaţia de stare, poate avea un element necunoscut sau mai multe elemente necunoscute aşezate fie pe aceiaşi linie sau coloană, fie aşezate aleator.

Se consideră un sistem continuu şi liniar descris de ecuaţiile de stare

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \mathcal{A}x(t), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \tag{1.12}$$

unde $x(t) \in \mathcal{M}^{n\times 1}$ este vectorul de stare, $y(t) \in \mathcal{M}^{p\times 1}$ – vectorul măsurătorilor sistemului, $\mathcal{A} \in \mathcal{M}^{n\times n}(R)$ şi $C \in \mathcal{M}^{p\times n}(R)$ sunt matricele sistemului. Obiectivul este acela de a vedea în ce condiţii se poate construi un estimator Luenberger pentru estimarea stării sistemului, în condiţiile în care nu toate elementele matricei $\mathcal{A}$ sunt cunoscute [198]. Matricea $\mathcal{A}$ se poate scrie $\mathcal{A} = A + F,$ unde A este o matrice cunoscută, iar F – partea necunoscută a dinamicii sistemului.

Cazul 1: *Dinamica sistemului are un singur element necunoscut*

Se presupune că [198]

$$\mathcal{A} = A + \alpha F, \tag{1.13}$$

unde $|\alpha| < 1$ şi

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{x} & \cdots & \mathrm{x} \\ \mathrm{x} & \mathrm{x} & \cdots & \mathrm{x} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{x} & \mathrm{x} & \cdots & \mathrm{x} \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.14}$$

Astfel, sistemul (1.12) se poate scrie

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + \alpha Fx(t), \\ y(t) = Cx(t). \end{cases} \tag{1.15}$$

Estimatorul Luenberger ce va fi proiectat este descris de ecuaţiile

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + L[y(t) - \hat{y}(t)], \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t), \end{cases} \tag{1.16}$$

în care L (matricea de amplificare a observerului) se alege (determină) astfel încât matricea $(A - LC)$ să fie stabilă [198]. Determinarea matricei L este o operaţiune relativ simplă. Problema este determinarea unor condiţii necesare şi suficiente astfel încât proiectarea estimatorului să se facă utilizând din matricea sistemului $\mathcal{A}$ doar partea cunoscută (matricea A). Pentru aceasta se alege eroarea

$$e(t) = \hat{x}(t) - Tx(t), \tag{1.17}$$

în care matricea T se alege în majoritatea cazurilor ca fiind matricea unitate. Se calculează $\dot{e}(t)$, ţinându-se seama de ecuaţiile (1.12), (1.16) şi (1.17) şi se obţine

$$\begin{aligned}\dot{e}(t) &= \dot{\hat{x}}(t) - T\dot{x}(t) = A\hat{x}(t) + L[y(t) - \hat{y}(t)] - TAx(t) = \\ &= A\hat{x}(t) + L[Cx(t) - C\hat{x}(t)] - T(A + \alpha F)x(t) = \\ &= (A - LC)e(t) + [(A - LC)T + LC - TA - \alpha TF]x(t).\end{aligned} \tag{1.18}$$

Se introduce vectorul

$$X(t) = [e(t)\ x(t)]^T \tag{1.19}$$

şi ecuaţiile (1.12) şi (1.18) conduc la [198]

$$\dot{X}(t) = \begin{bmatrix}(A - LC) & ((A - LC)T + LC - TA) \\ 0 & (A - LC)\end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix}0 & -\alpha TF \\ 0 & (LC + \alpha F)\end{bmatrix} X(t). \tag{1.20}$$

Se remarcă valabilitatea relaţiei [198]

$$\begin{bmatrix}0 & -\alpha TF \\ 0 & (LC + \alpha F)\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}0 & -T \\ LC & I\end{bmatrix}}_{D_1} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix}I & 0 \\ 0 & \alpha F\end{bmatrix}}_{D_2} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix}0 & I \\ 0 & I\end{bmatrix}}_{D_3} \tag{1.21}$$

şi, cu aceasta, ecuaţia (1.20) se scrie

$$\dot{X}(t) = \overline{A}X(t) + D_1 D_2 D_3 X(t), \tag{1.22}$$

unde

$$\overline{A} = \begin{bmatrix}(A - LC) & ((A - LC)T + LC - TA) \\ 0 & (A - LC)\end{bmatrix}. \tag{1.23}$$

Deoarece s-a ales $|\alpha| < 1$ se poate demonstra că $D_2^T D_2 \le I$ şi sistemul (1.22) este cuadratic stabil dacă şi numai dacă inegalitatea liniar matriceală

$$\overline{A}^T P + P\overline{A} + PD_1 D_1^T P + D_3^T D_3 < 0 \tag{1.24}$$

are ca soluţie o matrice P simetrică şi pozitiv definită [198].

Cazul 2: *Dinamica sistemului are o coloană cu termeni necunoscuţi*

Şi în acest caz $\mathcal{A} = A + F$, unde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \text{x} & \cdots & \text{x} \\ 0 & \text{x} & \cdots & \text{x} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \text{x} & \cdots & \text{x} \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.25}$$

Raţionamentul este analog celui de mai sus, ajungându-se tot la ecuaţia (1.22). Pentru a se putea însă proiecta estimatorul de stare este nevoie de satisfacerea simultană a două condiţii [198]:

1) $1 - \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geq 0$;

2) inegalitatea matriceală (1.24) are ca soluţie o matrice P simetrică şi pozitiv definită.

Cazul 3: *Dinamica sistemului are o diagonală cu termeni necunoscuţi*

În acest caz $\mathcal{A} = A + F$, unde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \text{x} & \cdots & \text{x} \\ \text{x} & 0 & \cdots & \text{x} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{x} & \text{x} & \cdots & 0 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}. \tag{1.26}$$

Ecuaţia estimatorului este şi în acest caz ecuaţia (1.16), echivalentă cu (1.20) sau (1.22). Proiectarea observerului Luenberger, utilizând din matricea cu o coloană necunoscută $\mathcal{A}$ doar partea cunoscută A, este posibilă doar dacă sunt îndeplinite simultan condiţiile [198]:

1) $1 - a_i^2 \geq 0, i = \overline{1, r}$;

2) inegalitatea liniar matriceală (1.24) are ca soluţie o matrice P simetrică şi pozitiv definită.

Cazul 4: *Dinamica sistemului are câteva elemente necunoscute dispuse aleator*

$$\mathcal{A} = A + F, A = \begin{bmatrix} 0 & \text{x} & \cdots & \text{x} \\ \text{x} & \text{x} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{x} & 0 & \cdots & \text{x} \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_r & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.27}$$

Matricea F se scrie

$$F = \sum_{i=1}^{r} F_i \,, \tag{1.28}$$

unde F_i – matrice formate doar din zerouri cu excepţia unui singur element a_i (pe coloana i). Se ajunge tot la ecuaţia (1.22), în care, de această dată, [198]

$$D_1 = \begin{bmatrix} D_{1,1} & D_{1,2} & \cdots & D_{1,r} \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} D_{2,1} & & & \\ & D_{2,2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & D_{2,r} \end{bmatrix}, D_3 = \begin{bmatrix} D_{3,1} & D_{3,2} & \cdots & D_{3,r} \end{bmatrix}^T. \tag{1.29}$$

Condiţiile necesare şi suficiente pentru proiectarea estimatorului de stare Luenberger sunt, în acest caz, aceleaşi cu cele de la cazul anterior [198].

1.2.3. PROIECTAREA OBSERVERELOR LINIARE UTILIZÂND FORMULA BASS-GURA

Se consideră sistemul descris de ecuaţiile (1.1) cu $D = 0$. Notând cu $\hat{x}$ vectorul de stare estimat, se construieşte un observer descris de ecuaţia [60]

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}\hat{x}(t) + Ly(t) + Hu(t). \tag{1.30}$$

Matricele $\hat{A}, L$ şi H se calculează astfel încât, în regim staţionar, $\hat{x}(t) \to x(t)$. Se consideră eroarea observerului $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$; derivând în timp eroarea $e(t)$ se obţine

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= Ax(t) + Bu(t) - \hat{A}(x(t) - e(t)) - LCx(t) - Hu(t) = \\ &= \hat{A}e(t) + \left(-\hat{A} + A - LC\right)x(t) + (B - H)u(t). \end{aligned} \tag{1.31}$$

Trebuie îndeplinite simultan condiţiile

$$\begin{cases} B - H = 0 \Leftrightarrow B = H\,, \\ -\hat{A} + A - LC = 0 \Leftrightarrow \hat{A} = A - LC\,. \end{cases} \tag{1.32}$$

În aceste condiţii, eroarea de estimare devine [60]

$$\dot{e}(t) = \hat{A}e(t); \tag{1.33}$$

în acest caz, eroarea converge la zero $(e(t) \to 0)$ dacă $\hat{A}$ este o matrice stabilă.

Având în vedere ecuaţia (1.32), ecuaţia (1.30) a estimatorului de stare se scrie

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - C\hat{x}y(t)), \tag{1.34}$$

adică forma generală Luenberger

Făcând notaţia [60]

$$r(t) = y(t) - \hat{y}(t) = y(t) - C\hat{x}(t), \tag{1.35}$$

ecuaţia (1.34) devine

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + Lr(t), \tag{1.36}$$

în care $r(t)$ se numeşte reziduul estimatorului de stare.

Există o multitudine de metode pentru determinarea matricei de amplificare a observerului L. Cum estimatorul de stare are forma filtrului Kalman, matricea L poate fi determinată prin rezolvarea unei probleme optimale. O altă variantă ar fi determinarea matricei prin metoda poziţionării polilor. Metoda Bass-Gura reprezintă o alternativă la metoda poziţionării polilor. Pentru descrierea metodei se consideră $a(\mathrm{s})$ şi $\hat{a}(\mathrm{s})-$ polinoamele caracteristice ale matricelor A, respectiv $\hat{A}$

$$a(\mathrm{s}) = \det(\mathrm{s}I\text{-}A), \hat{a}(\mathrm{s}) = \det(\mathrm{s}I\text{-}\hat{A}). \tag{1.37}$$

Cele două polinoame caracteristice se pot scrie

$$a(\mathrm{s}) = \mathrm{s}^n + \sum_{i=1}^{n} a_i \mathrm{s}^{n-i}, \hat{a}(\mathrm{s}) = \mathrm{s}^n + \sum_{i=1}^{n} \hat{a}_i \mathrm{s}^{n-i}, \tag{1.38}$$

unde n este numărul de linii şi de coloane ale matricei A. Dependenţa între cele două polinoame caracteristice este [60]

$$\hat{a}(\mathrm{s}) - a(\mathrm{s}) = a(\mathrm{s})C(\mathrm{s}I_n - A)^{-1}L \tag{1.39}$$

şi, utilizând formula Leverreim-Souriau,

$$(\mathrm{s}I_n - A)^{-1} = \frac{\mathrm{s}^{n-1}I_n + \mathrm{s}^{n-2}(A + a_1 I_n) + \mathrm{s}^{n-3}(A^2 + a_1 A + a_2 I_n) + \cdots + (A^{n-1} + a_1 A^{n-2} + \cdots + a_{n-1}I_n)}{a(\mathrm{s})}, \quad (1.40)$$

ecuaţia (1.39) conduce la

$$\begin{cases} \hat{a}_1 - a_1 = CL, \\ \hat{a}_2 - a_2 = CAL + a_1 CL, \\ \hat{a}_3 - a_3 = CA^2 L + a_1 CAL + a_2 CL, \\ \vdots \\ \hat{a}_n - a_n = CA^{n-1}L + a_1 CA^{n-2}L + \cdots + a_{n-1}CL. \end{cases} \quad (1.41)$$

Sistemul de ecuaţii (1.41), considerându-se vectorii

$$a = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n]^T, \hat{a} = [\hat{a}_1 \ \hat{a}_2 \ \cdots \ \hat{a}_n]^T, \quad (1.42)$$

se scrie

$$\hat{a} - a = T_a O_{A,C} L, \quad (1.43)$$

în care $O_{A,C}$ este matricea de observabilitate asociată sistemului (1.1), adică

$$O_{A,C} = [C \ CA \ CA^2 \ \cdots \ CA^{n-1}]^T, \quad (1.44)$$

iar T_a este o matrice inferior triunghiulară având forma

$$T_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.45)$$

Matricea de amplificare a observerului (L) se determină din ecuaţia (1.43) astfel [60]

$$L = (T_a O_{A,C})^{-1}(\hat{a} - a), \quad (1.46)$$

după ce, în prealabil, s-au determinat matricele $O_{A,C}$ şi T_a. Deoarece T_a este o matrice inferior triunghiulară $\Rightarrow \det(T_a) = 1 \Rightarrow T_a$ – matrice nesingulară. Pentru ca formula Bass-Gura să poată fi aplicată, matricea $O_{A,C}$ trebuie să fie inversabilă, deci $rang(O_{A,C}) = n$ (sistemul descris de ecuaţiile (1.1) trebuie să fie observabil).

<u>*Observaţii*</u>

1. În Matlab/Simulink polinomul caracteristic asociat unei matrice se determină cu ajutorul comenzii *poly* [67];
2. În (1.46), vectorul $\hat{a}$ se determină impunând valori proprii dorite pentru observer;
3. Considerând A – matrice pătratică de ordinal $n \Leftrightarrow A \in \mathcal{M}^{n \times n}$ şi că sistemul (1.1) are s ieşiri $\Leftrightarrow C \in \mathcal{M}_{s \times n}$, dimensiunile matricelor T_a şi $O_{A,C}$ sunt, respectiv, $T_a \in \mathcal{M}^{n \times n}, O_{A,C} \in \mathcal{M}^{(s \cdot n) \times n}$. Pentru a putea efectua produsul matricelor T_a şi $O_{A,C}$ din ecuaţia (1.46) este nevoie ca $s \cdot n = n \Leftrightarrow s = 1$ (sistemul trebuie să aibă o singură ieşire). Cu alte cuvinte, o condiţie necesară a metodei Bass-Gura pentru proiectarea observerelor este ca sistemul descris de ecuaţiile de stare (1.1) să aibă o singură ieşire.

Aşadar, algoritmul Bass-Gura pentru proiectarea observerului este [60]:

Algoritmul Bass-Gura

Pasul 1: Cunoscându-se matricea A a sistemului, se determină polinomul caracteristic $a(\mathrm{s})$ asociat acestei matrice.

Pasul 2: Se impun valori proprii dorite pentru observer şi se determină polinomul caracteristic $\hat{a}(\mathrm{s})$ asociat matricei $\hat{A} = A - LC$.

Pasul 3: Se calculează matricea T_a cu formula (1.45) şi matricea de observabilitate a sistemului $O_{A,C}$ utilizând ecuaţia (1.44).

Pasul 4: Se calculează matricea de amplificare a estimatorului de stare cu ecuaţia (1.46) şi se proiectează observerul descris de ecuaţia (1.34).

În cele ce urmează se validează algoritmul Bass-Gura de proiectare a observerelor liniare pentru două cazuri concrete ale mişcărilor longitudinală, respectiv laterală ale aeronavelor. Pentru început, se consideră mişcarea longitudinală a unei aeronave descrisă de ecuaţia de stare

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{V}_x \\ \Delta\dot{\alpha} \\ \Delta\dot{\theta} \\ \Delta\dot{\omega}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.007 & 0.012 & -9.81 & 0 \\ -0.128 & -0.54 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.065 & 0.96 & 0 & -0.99 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta V_x \\ \Delta\alpha \\ \Delta\theta \\ \Delta\omega_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -0.04 \\ 0 \\ -12.5 \end{bmatrix} \delta_p \tag{1.47}$$

şi de ecuaţia de ieşire $y = Cx$ cu $C = [0\ 0\ 1\ 0]$. Pentru observer se impun valorile proprii dorite -1, -2, -3 şi -4. Se obţin succesiv, conform algoritmului de mai sus,

$$a(\mathrm{s}) = \mathrm{s}^4 + 1.537\mathrm{s}^3 - 0.413\mathrm{s}^2 + 0.635\mathrm{s} - 0.861,\ \hat{a}(\mathrm{s}) = \mathrm{s}^4 + 10\mathrm{s}^3 + 69\mathrm{s}^2 + 50\mathrm{s} + 24,$$

$$T_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1.537 & 1 & 0 & 0 \\ -0.413 & 1.537 & 1 & 0 \\ 0.635 & -0.413 & 1.537 & 1 \end{bmatrix},\ O_{A,C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.065 & 0.96 & 0 & -0.99 \\ -0.187 & -1.468 & -0.637 & 1.94 \end{bmatrix}, \tag{1.48}$$

$$L = [-276.462\quad 41.643\quad 8.463\quad 56.405]^T.$$

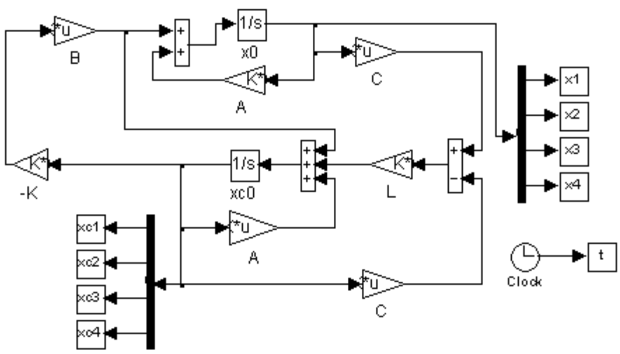

Fig. 1.1. Modelul Matlab/Simulink al observerului Bass-Gura

Programul Matlab din anexa A1.1 reprezintă implementarea software a procedurii de construcţie a estimatorului Bass-Gura. Modelul Matlab/Simulink din fig. 1.1 este utilizat în cadrul programului din anexă pentru obţinerea caracteristicilor de timp din fig. 1.2 (erorile de estimare a variabilelor de stare cu estimatorul de stare Bass-Gura pentru $u = 0$) şi caracteristicile de timp din fig. 1.3 pentru legea de comandă $u = -K\hat{x}$ (K calculată cu algoritmul ALGLX [157]); caracteristicile exprimă variabilele de stare $x_i(t)-$ cu linie continuă şi $\hat{x}_i(t)-$ cu linie întreruptă.

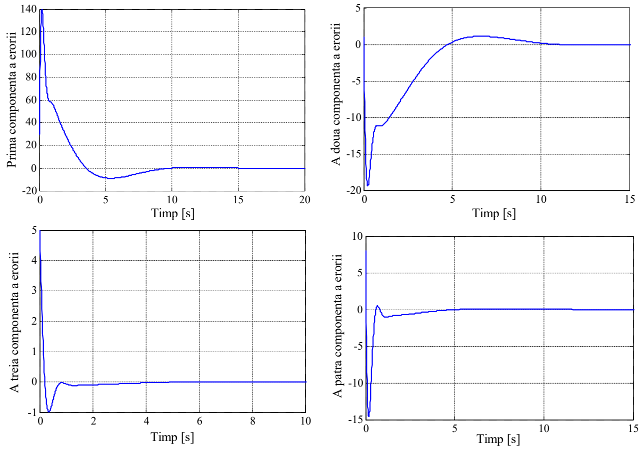

Fig. 1.2. Erorile de estimare a stării estimatorului Bass-Gura $(K = 0)$

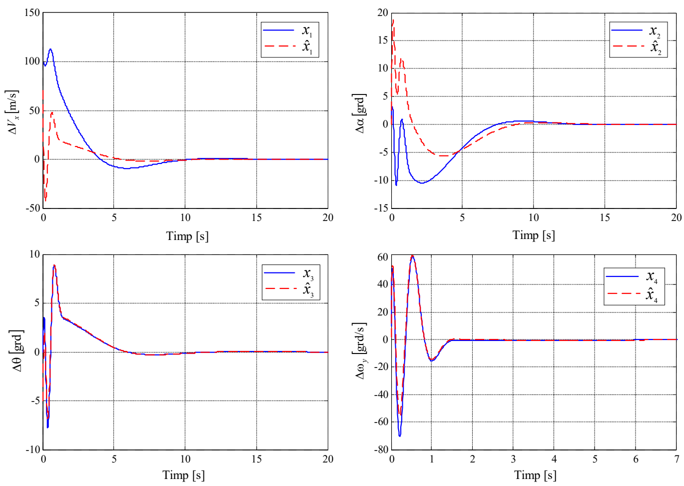

Fig. 1.3. Variabilele de stare $x_i(t)$ şi $\hat{x}_i(t)$ - mişcarea longitudinală $(K \neq 0)$

Se implementează software observerul Bass-Gura şi pentru cazul mişcării laterale a unei aeronave Boeing 747, care zboară cu $M = 0.8$ la $H = 40000$ ft; ecuaţia de stare a mişcării laterale este

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{\beta} \\ \Delta\dot{\omega}_z \\ \Delta\dot{\omega}_x \\ \Delta\dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0558 & -0.9968 & 0.0802 & 0.0415 \\ 0.598 & -0.115 & -0.0318 & 0 \\ 0.305 & 0.388 & -0.465 & 0 \\ 0 & 0.0805 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\beta \\ \Delta\omega_z \\ \Delta\omega_x \\ \Delta\varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0073 & 0 \\ -0.475 & 0.123 \\ 0.153 & 1.063 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_d \\ \delta_e \end{bmatrix}. \quad (1.49)$$

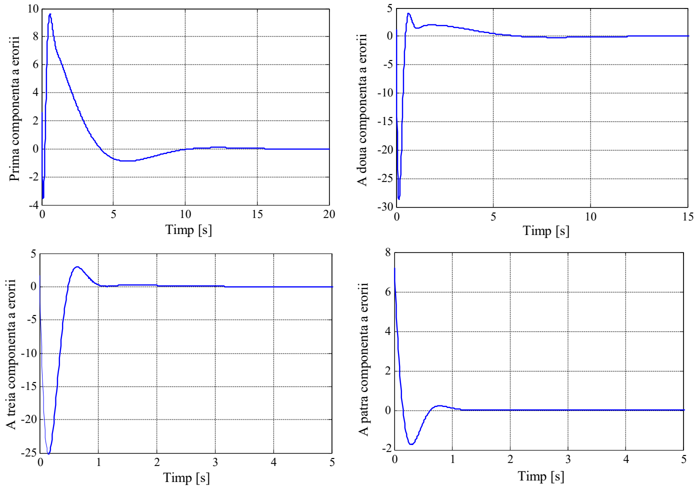

Fig. 1.4. Erorile de estimare a stării estimatorului Bass-Gura $(K = 0)$

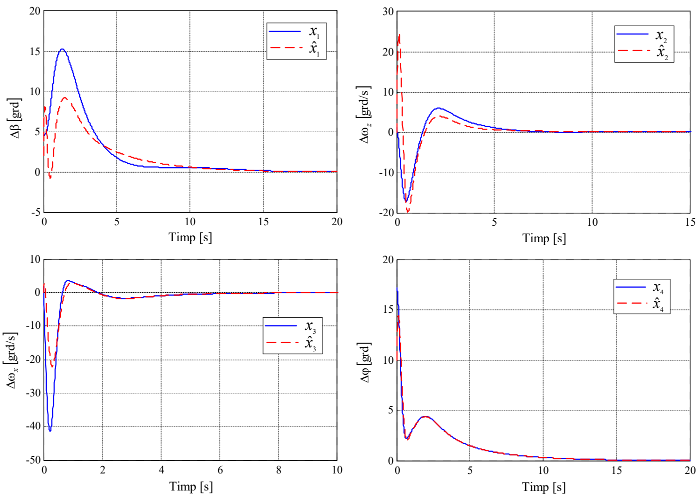

Fig. 1.5. Variabilele de stare $x_i(t)$ şi $\hat{x}_i(t)$ - mişcarea laterală $(K \neq 0)$

S-au impus aceleaşi valori proprii dorite ca şi în cazul mişcării longitudinale şi se obţin

$$a(s) = s^4 + 0.635s^3 + 0.669s^2 + 0.234s - 0.0127, \; \hat{a}(s) = s^4 + 10s^3 + 69s^2 + 50s + 24,$$

$$T_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.635 & 1 & 0 & 0 \\ 0.669 & 0.635 & 1 & 0 \\ 0.234 & 0.669 & 0.635 & 1 \end{bmatrix}, O_{A,C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.065 & 0.96 & 0 & -0.99 \\ -0.187 & -1.468 & -0.637 & 1.94 \end{bmatrix}, \tag{1.50}$$

$$L = \begin{bmatrix} 17.73 & 64.215 & 57.207 & 9.364 \end{bmatrix}^T.$$

Erorile de estimare a variabilelor de stare sunt prezentate în fig. 1.4 (pentru $K = 0$), iar variabilele de stare $x_i(t)$ şi $\hat{x}_i(t)$ pentru K calculat cu algoritmul ALGLX [157] sunt prezentate în fig. 1.5. Programul Matlab utilizat este similar celui din anexa A1.1, iar modelul Matlab/Simulink este identic cu cel din fig. 1.1.

1.2.4. ESTIMATOARE DE STARE CU ORDIN REDUS

Se consideră sistemul (1.1) cu m intrări, p ieşiri şi ordinul n (numărul variabilelor de stare = n). Nu este neapărat nevoie să se construiască un observer care să estimeze direct toate cele n variabile de stare, întrucât o parte dintre ele (p dintre cele n) sunt direct măsurabile. Se presupune că matricea C este epică, adică

$$\operatorname{rang}(C) = p. \tag{1.51}$$

Se vor estima doar $n - p$ variabile de stare; un estimator de acest tip se numeşte estimator cu ordin redus [34], [157]. Se face presupunerea că $\operatorname{rang}(C) = p$ (ipoteză fără de care nu se poate construi estimatorul cu ordin redus) şi se presupune, prin alegerea directă a variabilelor de stare direct măsurabile, că

$$C = \begin{bmatrix} 0 & I_p \end{bmatrix}. \tag{1.52}$$

În aceste condiţii, a doua ecuaţie de stare (1.1) devine

$$y = Cx + Du = \begin{bmatrix} 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + Du = x_2 + Du, \tag{1.53}$$

unde x_2 - vectorul format din cele p variabile de stare direct măsurabile, iar x_1 - vectorul format din cele n-p variabile de stare ce urmează a fi estimate. Se partiţionează matricele A, B, V, L, N astfel [34]

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ A_2 & A_4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}. \tag{1.54}$$

Ecuaţiile a doua şi a patra din sistemul de ecuaţii (1.6) devin

$$\begin{cases} J\begin{bmatrix} V_1 & V_2 \end{bmatrix} + H\begin{bmatrix} 0 & I_p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ A_2 & A_4 \end{bmatrix} = 0, \\ \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 & V_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & I_p \end{bmatrix} = I, \end{cases} \tag{1.55}$$

sistem echivalent cu

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} JV_1 & JV_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & H \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} V_1A_1 + V_2A_2 & V_1A_3 + V_2A_4 \end{bmatrix} = 0, \\ \begin{bmatrix} L_1V_1 & L_1V_2 \\ L_2V_1 & L_2V_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & N_1 \\ 0 & N_2 \end{bmatrix} = I \end{cases} \tag{1.56}$$

sau

$$\begin{gathered} JV_1 - V_1A_1 - V_2A_2 = 0, JV_2 + H - V_1A_3 - V_2A_4 = 0, \\ L_1V_1 = I, L_1V_2 + N_1 = 0, L_2V_1 = 0, L_2V_2 + N_2 = I. \end{gathered} \tag{1.57}$$

Se alege [34]

$$L_1 = I_{n-p} \tag{1.58}$$

şi se obţin

$$V_1 = I_{n-p}, L_2 = 0, N_2 = I_p, N_1 = -V_2. \tag{1.59}$$

Sistemul de ecuaţii devine

$$\begin{cases} J - A_1 - V_2A_2 = 0, \\ JV_2 + H - A_3 - V_2A_4 = 0, \\ N_1 = -V_2. \end{cases} \tag{1.60}$$

Din prima ecuaţie (1.60) rezultă

$$J = A_1 + V_2A_2. \tag{1.61}$$

Dacă perechea (A_1, A_2) – observabilă, având în vedere că $\Lambda(J) \subset \mathbb{C}_-$, prin impunerea (alegerea) valorilor proprii ale matricei $J = A_1 + V_2A_2$ se determină V_2 şi, implicit, N_1 [34]. Se determină, de asemenea, şi J, din cea de-a doua ecuaţie (1.60) obţinându-se apoi matricea H

$$H = A_3 + V_2 A_4 - \left(A_1 + V_2 A_2\right) V_2. \tag{1.62}$$

În [34] se demonstrează că perechea $\left(A_1, A_2\right)$ este observabilă dacă perechea $\left(C, A\right)$ este observabilă. Aşadar, algoritmul pentru proiectarea observerului este [34]:

Algoritmul 1

Pasul 1: Se face transformarea sistemului $\left(A, B, C, D\right)$ într-unul $\left(\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}, \widetilde{D}\right)$, unde

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ A_2 & A_4 \end{bmatrix}, \widetilde{B} = TB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \widetilde{C} = \begin{bmatrix} 0 & I_p \end{bmatrix} \; \widetilde{D} = D; \tag{1.63}$$

$A_1 \in \mathcal{M}^{(n-p)\times(n-p)}$, $A_2 \in \mathcal{M}^{p\times(n-p)}$, $A_3 \in \mathcal{M}^{(n-p)\times p}$, $A_4 \in \mathcal{M}^{p\times p}$, $B_1 \in \mathcal{M}^{(n-p)\times m}$, $B_2 \in \mathcal{M}^{p\times m}$. Transformarea se face prin intermediul matricei de transformare T.

Pasul 2: Se verifică dacă perechea $\left(A_1, A_2\right)-$ observabilă. În caz contrar, observerul nu poate fi construit.

Pasul 3: Se alege $L_1 = I_{n-p}$ şi rezultă $V_1 = N_2 = I_{n-p}, L_2 = 0$.

Pasul 4: Se impun valori proprii pentru matricea $J = A_1 + V_2 A_2$ şi se determină V_2, rezultând apoi matricele J şi $N_1 = -V_2$.

Pasul 5: Se calculează matricea H cu ecuaţia (1.62).

Pasul 6: Se calculează matricele M şi P

$$M = VB - HD \Leftrightarrow M = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} - HD = B_1 + V_2 B_2 - HD; \tag{1.64}$$

$$P = -ND \Leftrightarrow P = -\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} D = \begin{bmatrix} V_2 D \\ -D \end{bmatrix}. \tag{1.65}$$

Pasul 7: Ecuaţiile (1.2), ce descriu estimatorul de stare, devin

$$\begin{cases} \dot{w} = (A_1 + V_2)A_2 w + Hy + (B_1 + V_2 B_2 - HD)u, \\ \hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n-p} \\ 0 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} -V_2 \\ I_p \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} V_2 D \\ -D \end{bmatrix} u. \end{cases} \tag{1.66}$$

<u>*Observaţii*</u>

1) estimatorul cu ordin redus are ordinul $n - p$ (dimensiunea stării $w(t)$);

2) a doua ecuaţie (1.66) est echivalentă cu

$$\hat{x}_1 = w - V_2 y + V_2 D u. \tag{1.67}$$

Această ecuaţie este asociată variabilelor de stare ce vor fi estimate (cele din vectorul $\hat{x}_1$). De asemenea, $\hat{x}_2$ (vectorul ce conţine variabilele de stare direct măsurabile) se obţine cu expresia [34]

$$\hat{x}_2 = x_2 = y - Du. \tag{1.68}$$

Aşadar,

$$\begin{cases} \hat{x}_1 = w - V_2 y + V_2 D u, \\ \hat{x}_2 = x_2 = y - Du. \end{cases} \tag{1.69}$$

În cele ce urmează este prezentat un alt algoritm de proiectare a observerelor cu ordin redus (observer cu ordin redus de tip Luenberger).

Se consideră sistemul descris de ecuaţiile de stare (1.1), în care $A \in \mathcal{M}^{p\times n}$, $B \in \mathcal{M}^{n\times m}, C \in \mathcal{M}^{p\times n}, D = 0$ şi $\mathrm{rang}(C) = p$. În acest caz observerul cu ordin redus va avea ordinul $(n - p)$. Primul pas este acela de partiţionare a matricelor A, B, C şi a vectorului de stare $x(t)$ [231]

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}, x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \tag{1.70}$$

unde $A_{11} \in \mathcal{M}^{p\times p}, A_{12} \in \mathcal{M}^{p\times(n-p)}, A_{21} \in \mathcal{M}^{(n-p)\times p}, A_{22} \in \mathcal{M}^{(n-p)\times(n-p)}, B_1 \in \mathcal{M}^{p\times m}, B_2 \in \mathcal{M}^{(n-p)\times m}$, $C_1 \in \mathcal{M}^{p\times p}, C_2 \in \mathcal{M}^{p\times(n-p)}, x_1(t) \in \mathcal{M}^{p\times 1}, x_2(t) \in \mathcal{M}^{(n-p)\times 1}$.

Se face schimbarea de variabilă

$$\overline{x} = Tx\,, \tag{1.71}$$

în care $T = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ 0 & I_{n-p} \end{bmatrix}$ şi sistemul (1.1) devine [231]

$$\begin{cases} \dot{\overline{x}}(t) = \overline{A}\overline{x}(t) + \overline{B}u(t), \\ y(t) = \overline{C}\overline{x}(t), \end{cases} \tag{1.72}$$

unde

$$\overline{x}(t) = \begin{bmatrix} \overline{x}_1(t) \\ \overline{x}_2(t) \end{bmatrix}, \overline{A} = \begin{bmatrix} \overline{A}_{11} & \overline{A}_{12} \\ \overline{A}_{21} & \overline{A}_{22} \end{bmatrix}, \overline{B} = \begin{bmatrix} \overline{B}_1 \\ \overline{B}_2 \end{bmatrix}, \overline{C} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \end{bmatrix} \tag{1.73}$$

şi

$$\begin{aligned} &\overline{A}_{11} = \left[C_1 A_{11} + C_2 A_{21}\right] C_1^{-1}, \overline{A}_{12} = -\overline{A}_{11} C_2 + C_1 A_{12} + C_2 A_{22}\,, \\ &\overline{A}_{21} = A_{21} C_1^{-1}\,, \overline{A}_{22} = A_{22} - A_{21} C_1^{-1} C_2\,, \overline{B}_1 = C_1 B_1 + C_2 B_2\,, \overline{B}_2 = B_2\,. \end{aligned} \tag{1.74}$$

Primele p variabile de stare (cele cuprinse în vectorul $\overline{x}_1(t)$) sunt măsurate prin intermediul senzorilor şi nu mai este nevoie să fie estimate, iar următoarele $(n-p)$ variabile de stare (cele cuprinse în vectorul $\overline{x}_2(t)$) vor fi estimate.

Ecuaţia de stare (1.72) se scrie sub forma

$$\begin{cases} \dot{\overline{x}}_1(t) = \overline{A}_{11}\overline{x}_1(t) + \overline{A}_{12}\overline{x}_2(t) + \overline{B}_1 u(t), \\ \dot{\overline{x}}_2(t) = \overline{A}_{21}\overline{x}_1(t) + \overline{A}_{22}\overline{x}_2(t) + \overline{B}_2 u(t), \\ y(t) = \overline{x}_1(t). \end{cases} \tag{1.75}$$

Prima ecuaţie (1.75) exprimă faptul că $\dot{\overline{x}}_1(t) = \dot{y}(t)$ conţine informaţii despre $\overline{x}_2(t)$. De aceea, se introduce notaţia [231]

$$\xi(t) = \dot{\overline{x}}_1(t) - \overline{A}_{11}\overline{x}_1(t) \overset{(1.75)}{=} \overline{A}_{12}\overline{x}_2(t) + \overline{B}_1 u(t). \tag{1.76}$$

Estimarea variabilei $\xi(t)$ va depinde de estimarea vectorului $\overline{x}_2(t)$, adică $\hat{\overline{x}}_2(t)$; rezultă

$$\hat{\xi}(t) = \overline{A}_{12}\hat{\overline{x}}_2(t) + \overline{B}_1 u(t). \tag{1.77}$$

Se construieşte observerul cu ordin redus de tip Luenberger având forma [231]

$$\dot{\hat{\overline{x}}}_2(t) = \overline{A}_{21}\overline{x}_1(t) + \overline{A}_{22}\hat{\overline{x}}_2(t) + \overline{B}_2 u(t) + L\left[\xi(t) - \hat{\xi}(t)\right]. \tag{1.78}$$

Dezavantajul metodei este că, pentru obţinerea variabilei $\xi(t)$, este nevoie de derivarea lui $\dot{\overline{x}}_1(t)$. Pentru eliminarea acestui dezavantaj se introduce variabila

$$\hat{z}(t) = \hat{\overline{x}}_2(t) - Ly(t) \tag{1.79}$$

şi rezultă

$$\begin{aligned}
&\dot{\hat{z}}(t) = \dot{\hat{\overline{x}}}_2(t) - L\dot{y}(t) = \overline{A}_{21}\overline{x}_1(t) + \overline{A}_{22}\hat{\overline{x}}_2(t) + \overline{B}_2 u(t) + L\left[\xi(t) - \hat{\xi}(t)\right] - \\
&\quad - L\left[\overline{A}_{11}\overline{x}_1(t) + \overline{A}_{12}\overline{x}_2(t) + \overline{B}_1 u(t)\right] \Leftrightarrow \\
&\dot{\hat{z}}(t) = \overline{A}_{21}\overline{x}_1(t) + \overline{A}_{22}\hat{z}(t) + \overline{A}_{22}L\overline{x}_1(t) + \overline{B}_2 u(t) + L\underbrace{\left[\xi(t) - \hat{\xi}(t)\right]}_{\cong 0} - L\overline{A}_{11}\overline{x}_1(t) - \\
&\quad - L\overline{A}_{12}\hat{z}(t) - L\overline{A}_{12}L\overline{x}_1(t) - L\overline{B}_1 u(t) \Leftrightarrow \\
&\dot{\hat{z}}(t) = \left(\overline{A}_{22} - L\overline{A}_{12}\right)\hat{z}(t) + \left(\overline{B}_2 - L\overline{B}_1\right)u(t) + \left(\overline{A}_{21} + \overline{A}_{22}L - L\overline{A}_{11} - L\overline{A}_{12}L\right)\overline{x}_1(t)
\end{aligned} \tag{1.80}$$

echivalentă cu

$$\dot{\hat{z}}(t) = \overline{M}\hat{z}(t) + \overline{N}u(t) + \overline{P}y(t), \tag{1.81}$$

unde [231]

$$\overline{M} = \overline{A}_{22} - L\overline{A}_{12}\,,\ \overline{N} = \overline{B}_2 - L\overline{B}_1\,,\ \overline{P} = \overline{A}_{21} + \overline{A}_{22}L - L\overline{A}_{11} - L\overline{A}_{12}L\,. \tag{1.82}$$

Notând cu

$$e(t) = \overline{x}_2(t) - \hat{\overline{x}}_2(t) \tag{1.83}$$

şi calculând derivata erorii $(\dot{e}(t))$, se obţine [231]

$$\dot{e}(t) = \overline{M}e(t) = \left(\overline{A}_{22} - L\overline{A}_{12}\right)e(t). \tag{1.84}$$

Conform teoremei de observabilitate Popov-Bellevith [65], dacă sistemul original descris de perechea (A, C) este observabil, atunci şi sistemul descris de perechea $(\overline{A}_{22}, \overline{A}_{12})$ este observabil. Pentru stabilitatea sistemului, matricea $\overline{M}$ trebuie să fie stabilă. Matricea de amplificare L se calculează impunând valori proprii pentru matricea $\overline{M} = \overline{A}_{22} - L\overline{A}_{12}$; în Matlab se utilizează instrucţiunea *place.*

Determinarea vectorului $\hat{z}(t)$ se face rezolvând ecuaţia diferenţială (1.81). Apoi, se determină estimarea vectorului $\overline{x}_2$, adică $\hat{\overline{x}}_2$, cu formula (1.79).

Algoritmul de proiectare a observerului cu ordin redus este cel de mai jos.

Algoritmul 2

Pasul 1: Se calculează $p = \text{rang}(C)$ şi se partiţionează marticele A, B, C şi vectorul de stare $x(t)$ conform ecuaţiei (1.70).

Pasul 2: Se calculează matricea T, ea trebuind să fie nesingulară. În cazul în care T este singulară, se alege o nouă matrice C şi se reia algoritmul începând cu primul pas.

Pasul 3: Se calculează $\overline{A}_{11}, \overline{A}_{12}, \overline{A}_{21}, \overline{A}_{22}, \overline{B}_1, \overline{B}_2$ cu ecuaţia (1.74) şi apoi se formează matricele $\overline{A}, \overline{B}$ şi $\overline{C}$ utilizând ecuaţia (1.73).

Pasul 4: Se verifică dacă perechea $(\overline{A}_{22}, \overline{A}_{12})$ este observabilă. În caz contrar, estimatorul de stare cu ordin redus nu poate fi construit. Se calculează apoi matricea L impunând valori proprii dorite pentru matricea $\overline{M} = \overline{A}_{22} - L\overline{A}_{12}$.

Pasul 5: Se calculează matricele $\overline{M}, \overline{N}$ şi $\overline{P}$ cu formula (1.82).

Pasul 6: Se construieşte observerul descris de ecuaţiile (1.72), a treia ecuaţie (1.75), ecuaţia (1.81) şi ecuaţia (1.79). Au rezultat vectorii $\overline{x}_1(t)$, vector obţinut prin măsurători, $\hat{\overline{x}}_2(t)$ – estimarea vectorului $\overline{x}_2(t)$ şi, implicit, $\hat{\overline{x}} = \begin{bmatrix}\overline{x}_1 & \hat{\overline{x}}_2\end{bmatrix}^T$.

Pasul 7: Se obţine vectorul de stare estimat $\hat{x}$ astfel $\hat{x} = T^{-1}\hat{\overline{x}}$.

În fig. 1.6 este prezentată structura sistemului de comandă optimală a mişcării aparatelor de zbor, ce are în componenţă un observer cu ordin redus de tip Luenberger.

În cele ce urmează, se validează algoritmul 2 de proiectare a observerelor cu ordin redus pentru două cazuri concrete ale mişcărilor longitudinală, respectiv laterală ale aeronavelor. Pentru început, se consideră mişcarea longitudinală a unei aeronave descrisă de ecuaţia de stare (1.47) şi de ecuaţia de ieşire $y = Cx$ cu $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Pentru determinarea matricei L s-au impus valorile proprii dorite $s_1 = s_2 = -0.7$. Se obţin succesiv, conform algoritmului de mai sus,

$$p = 2, T = I_4, \overline{M} = \begin{bmatrix} -0.7 & 0 \\ 0 & -0.7 \end{bmatrix}, \overline{N} = \begin{bmatrix} 0.04 \\ -12.51 \end{bmatrix}, \overline{P} = \begin{bmatrix} 0.177 & -0.159 \\ 0.028 & 1 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} -0.071 & 1 \\ 0 & -0.29 \end{bmatrix}. \quad (1.85)$$

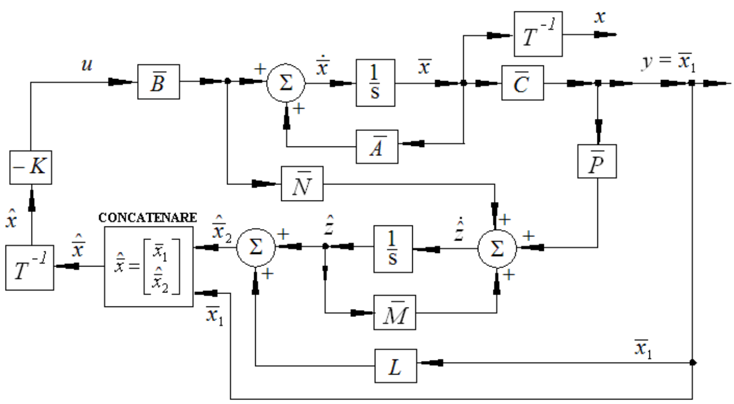

Fig. 1.6. Schema bloc de modelare a observerului cu ordin redus

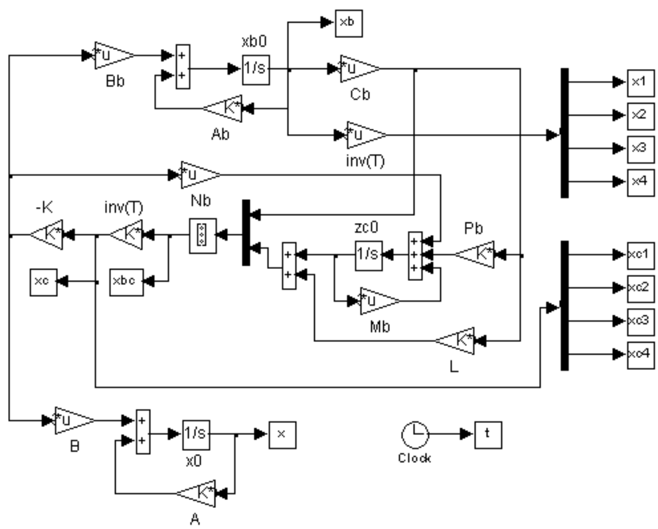

Fig. 1.7. Modelul Matlab/Simulink al observerului cu ordin redus de tip Luenberger

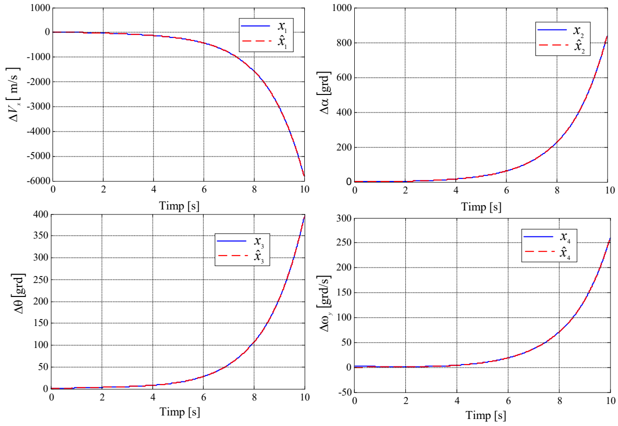

Fig. 1.8. Variabilele de stare $x_i(t)$ şi $\hat{x}_i(t)$ - mişcarea longitudinală $(K = 0)$

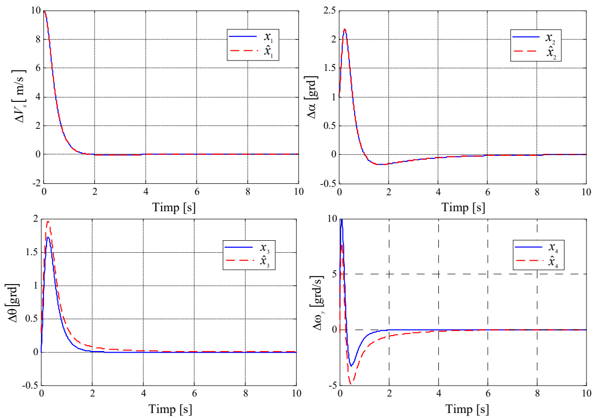

Fig. 1.9. Variabilele de stare $x_i(t)$ şi $\hat{x}_i(t)$ - mişcarea longitudinală $(K \neq 0)$

Programul Matlab din anexa A1.2 reprezintă implementarea software a procedurii de construcţie a estimatorului cu ordin redus de tip Luenberger. Modelul Matlab/ Simulink din fig. 1.7 este utilizat în cadrul programului din anexă pentru obţinerea caracteristicilor de timp din fig. 1.8 $(u = 0)$ şi din fig. 1.9 (pentru legea de comandă $u = -K\hat{x}$; K este calculată cu algoritmul ALGLX [157]); aceste caracteristici exprimă variabilele de stare $x_i(t)$ – cu linie continuă şi $\hat{x}_i(t)$ – cu linie întreruptă.

Se implementează software algoritmul 2 de proiectare a observerelor cu ordin redus şi pentru cazul mişcării laterale a unei aeronave Boeing 747, care zboară cu M=0.8 la $H = 40000$ ft; ecuaţia de stare a mişcării laterale este (1.49).

Pentru determinarea matricei L s-au impus valorile proprii dorite $s_1 = s_2 = -0.4$. Se obţin succesiv, conform algoritmului de mai sus,

$$p = 2, T = I_4, \overline{M} = \begin{bmatrix} -0.4 & 0 \\ 0 & -0.4 \end{bmatrix}, \overline{N} = \begin{bmatrix} 1.124 & 0.811 \\ -4.15 & 1.057 \end{bmatrix},$$
$$\overline{P} = \begin{bmatrix} -0.917 & -0.194 \\ 2.022 & 11.561 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 0 & 2.044 \\ 9.06 & -8.597 \end{bmatrix}. \quad (1.86)$$

Este apelat acelaşi model Matlab/Simulink din fig. 1.7 şi se obţin caracteristicile din fig. 1.10 şi fig. 1.11. Acestea exprimă variabilele de stare $x_i(t)$ – cu linie continuă şi $\hat{x}_i(t)$ – cu linie întreruptă pentru cazul $K = 0$ (fig. 1.10) şi cazul $K \neq 0$ (fig. 1.11). Matricea de amplificare K, şi în acest caz, a fost calculată cu algoritmul ALGLX [157].

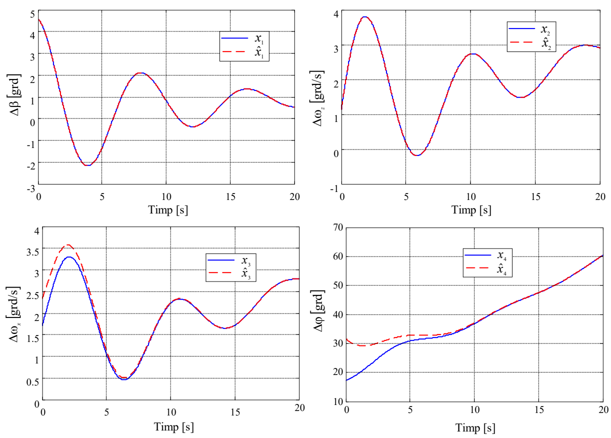

Fig. 1.10. Variabilele de stare $x_i(t)$ şi $\hat{x}_i(t)$ - mişcarea laterală $(K = 0)$

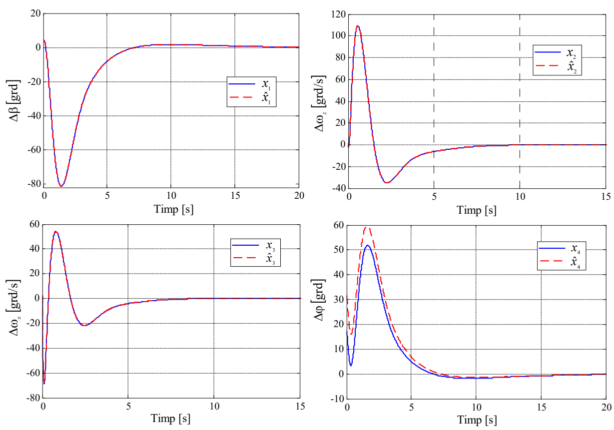

Fig. 1.11. Variabilele de stare $x_i(t)$ şi $\hat{x}_i(t)$ - mişcarea laterală $(K \neq 0)$

În continuare, este prezentat un alt observer cu ordin redus pentru sistemele la care numărul de măsurători este mai mare decât numărul de mărimi controlate (observere LTR - loop transfer recovery) [177].

Se consideră sistemul descris de ecuaţiile de stare (1.1) cu matricea $D = 0, x \in \mathcal{M}^{n\times 1}, u \in \mathcal{M}^{p\times 1}, y \in \mathcal{M}^{m\times 1}; p < m < n$. Se vor măsura $n - m$ variabile de stare şi, pentru că starea x nu este complet măsurabilă, vom avea nevoie de un estimator de stare. Ecuaţiile estimatorului sunt [177]

$$\begin{cases} \dot{z} = Fz + (TB)u + K_f y, \\ \hat{x} = Nz + My. \end{cases} \tag{1.87}$$

Legea de comandă ce trebuie să asigure stabilizarea sistemului are forma clasică $u = -K_c\hat{x}$. Prima ecuaţie (1.87) reprezintă forma standard a unui observer de tip Luenberger ce consideră intrarea u şi ieşirea y ca intrări ale sistemului şi estimează $K_c x$. În cazul filtrului Kalman, matricele F, T, N şi M sunt respectiv $A - K_f C, I, K_c$ şi matricea nulă (O). Este posibil ca $M \neq O$, dar, până în prezent, s-a demonstrat că obligatoriu $T = I$ şi $N = K_c$ pentru filtrul Kalman. Din prima ecuaţie (1.1) rezultă $y = C(\mathrm{s}I - A)^{-1}Bu$, iar din prima ecuaţie (1.87) rezultă $z = (\mathrm{s}I - F)^{-1}[(TB)u + K_f y]$. Schema bloc de modelare a ecuaţiilor generale (1.1) şi ecuaţiilor (1.87) este cea din fig. 1.12 [177].

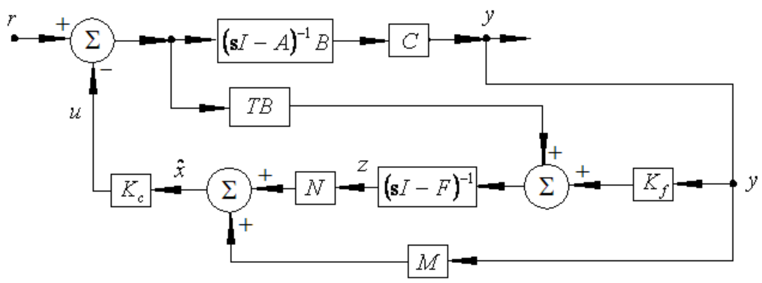

Fig. 1.12 Schema bloc de modelare a ecuaţiilor generale (1.1) şi ecuaţiilor (1.87)

Tsui a demonstrat că o condiţie necesară şi suficientă pentru convergenţa observerului este

$$N(sI - F)^{-1} TB = 0\,, \tag{1.88}$$

$(\forall)$ s $\in C$; N satisface ecuaţia

$$K_c = NT + MC\,, \tag{1.89}$$

iar T este soluţia ecuaţiei Sylvester

$$TA - FT = K_f C\,. \tag{1.90}$$

Condiţia (1.88) este îndeplinită dacă se determină $T \in \mathcal{M}^{(n-m)\times n}$ ce satisface ecuaţia [177]

$$TB = 0\,. \tag{1.91}$$

Aşadar, condiţiile (1.89)-(1.91) sunt suficiente pentru convergenţa observerului. Este evident că observerul nu poate fi, în acest caz, filtrul Kalman pentru că $T = I$ şi ar însemna $TB = IB = B, (\forall)$ matricea B.

Observerul ce se constuieşte în continuare este unul general cu $T \neq I$. Se cunosc matricele A, B, C şi K_c şi se determină matricele F, K_f, M şi N. Matricea F a observerului se alege arbitrar. Algoritmul de proiectare a observerului este unul economic şi necesită n^3 operaţii. Paşii algoritmului Monahemi [177] sunt următorii:

Algoritmul 3 (Algoritmul Monahemi [177]**)**

Pasul 1: Se realizează factorizarea QR a matricei B :

$$[W, S] = \mathrm{qr}(B); \tag{1.92}$$

matricele obţinute W şi S se partiţionează astfel:

$$W = [W_1 \ W_2]; S = \begin{bmatrix} S_1 \\ 0_{(n-p)\times p} \end{bmatrix}, \tag{1.93}$$

unde $W_1 \in \mathcal{M}^{n\times p}, W_2 \in \mathcal{M}^{n\times(n-p)}, S_1 \in \mathcal{M}^{p\times p}$.

Pasul 2: Se calculează matricele [177]

$$C_1 = CW_1 \,, A_1 = W_2^T AW_1 \,, A_2 = W_2^T AW_2 \,. \tag{1.94}$$

Pasul 3: Se realizează factorizarea matricei C_1 şi rezultă matricele Q şi R

$$[Q, R] = \mathrm{qr}\left(C_1\right); \tag{1.95}$$

se partiţionează matricele Q şi R astfel [177]

$$Q = [Q_1 \;\; Q_2], R = \begin{bmatrix} R_1 \\ 0_{(m-p)\times p} \end{bmatrix}, \tag{1.96}$$

în care $Q_1 \in \mathcal{M}^{m\times p}, Q_2 \in \mathcal{M}^{m\times(m-p)}$.

Pasul 4: Se calculează matricea

$$E = Q^T CW_2 \tag{1.97}$$

şi se partiţionează această matrice după cum urmează [177]

$$E = [E_1 \;\; E_2]^T; \tag{1.98}$$

$E_1 \in \mathcal{M}^{p\times(n-p)}, E_2 \in \mathcal{M}^{(m-p)\times(n-p)}$.

Pasul 5: Se rezolvă ecuaţia Sylvester

$$Z\left(A_2 - A_1 R_1^{-1} E_1\right) - FZ = L_2 E_2 \tag{1.99}$$

cu necunoscuta Z; L_2 se alege arbitrar [177].

Pasul 6: Se calculează matricea observerului

$$K_f = \left[ZA_1 R_1^{-1} \;\; L_2\right]Q^T \tag{1.100}$$

şi matricea $T = ZW_2^T$.

Pasul 7: Cunoscând matricele T şi K_c, se determină matricele M şi N [177]

$$[N \;\; M] = K_c \begin{bmatrix} T \\ C \end{bmatrix}^{-1}. \tag{1.101}$$

Proiectarea observerului este posibilă dacă sunt îndeplinite anumite condiţii. Dacă matricea CB are rang maxim p, condiţiile necesare şi suficiente sunt [177]:

1) perechea $\left(A_2 - A_1 R_1^{-1} E_1, E_2\right)$ este controlabilă;

2) valorile proprii ale matricei $A_2 - A_1 R_1^{-1} E_1$ sunt diferite de cele ale lui F.

În continuare, este prezentat un alt algoritm de proiectare a unui observer liniar funcţional asociat unui sistem MIMO (observer Nakade&Galcade [180]). Se consideră din nou sistemul clasic, liniar şi invariant în timp (1.1) cu $D = 0, x \in \mathcal{M}^{n\times 1}, u \in \mathcal{M}^{p\times 1}$, $y \in \mathcal{M}^{m\times 1}, A \in \mathcal{M}^{n\times n}, B \in \mathcal{M}^{n\times p}, C \in \mathcal{M}^{m\times n}$. Fără micşorarea generalităţii, matricea C poate fi considerată de forma canonică [180]

$$C = \left[C_1 \;\; 0\right], \tag{1.102}$$

unde $C_1 \in \mathcal{M}^{m\times m}$. Pentru proiectarea observerului, C_1 trebuie să fie inversabilă.

Legea de control ce stabilizează sistemul este de forma

$$u(t) = -Kx(t), \tag{1.103}$$

cu $K \in \mathcal{M}^{p\times n}$. Primul pas în proiectarea observerului este scrierea matricei de amplificare K sub forma [180]

$$K = FT + WC, \tag{1.104}$$

unde $F \in \mathcal{M}^{p\times r}, T \in \mathcal{M}^{r\times n}, W \in \mathcal{M}^{p\times m}; p \le r \le n$.

Ecuaţia (1.103) devine

$$u(t) = -Kx(t) = -\left(FTx(t) + WCx(t)\right) = -\left(KTx(t) + Wy(t)\right) = -\left(Kz(t) + Wy(t)\right), \tag{1.105}$$

în care s-a făcut notaţia

$$z(t) = Tx(t)\,,\; z(t) \in \mathcal{M}^{r\times 1}. \tag{1.106}$$

$z(t)$ verifică ecuaţia [180]

$$\dot{z}(t) = Ez(t) + TBu(t) + Gy(t), \tag{1.107}$$

cu $E \in \mathcal{M}^{r\times r}, G \in \mathcal{M}^{r\times m}$. Alegerea matricei E se face astfel încât aceasta să fie stabilă. De exemplu, se alege $E = \text{diag}(\lambda_i); i = \overline{1, p}$, unde λ_i sunt valori proprii din semiplanul stâng complex.

Se consideră eroarea observerului

$$e(t) = z(t) - Tx(t). \tag{1.108}$$

Prin derivare, rezultă

$$\dot{e}(t) = \dot{z}(t) - T\dot{x}(t) = Ez(t) - ETx(t) + GCx(t) - TAx(t) + ETx(t). \tag{1.109}$$

Ecuaţia anterioară este echivalentă cu

$$\dot{e}(t) = E\underbrace{(z(t) - Tx(t))}_{e(t)} + (GC - TA + ET)x(t) \Leftrightarrow \dot{e}(t) = Ee(t) + (GC - TA + ET)x(t). \tag{1.110}$$

Pentru ca $\dot{e}(t) = Ee(t)$ să fie ecuaţia ce corespunde unui observer convergent, trebuie ca [180]

$$GC - TA + ET = 0. \tag{1.111}$$

La această ecuaţie se adaugă ecuaţia (1.104) şi faptul că E – matrice stabilă. Aceste condiţii stau la baza proiectării observerului cu ordin redus. Pentru determinarea matricelor F, T, W, G şi E matricele $F \in \mathcal{M}^{p\times n}, T \in \mathcal{M}^{r\times n}$ se scriu sub forma

$$K = [K_1 \ \ K_2], T = [T_1 \ \ T_2], \tag{1.112}$$

$K_1 \in \mathcal{M}^{p\times m}, K_2 \in \mathcal{M}^{p\times(n-m)}, T_1 \in \mathcal{M}^{r\times m}, T_2 \in \mathcal{M}^{r\times(n-m)}$. Cele două matrice de mai sus mai pot fi scrise şi sub forma [180]

$$K = [k_1 \ \ k_2 \ \ldots \ k_n], T = [t_1 \ \ t_2 \ \ldots \ t_n], \tag{1.113}$$

unde

$$k_1^T = \lfloor k_{11} \ \ k_{21} \ \ldots \ k_{p1} \rfloor, k_2^T = \lfloor k_{12} \ \ k_{22} \ \ldots \ k_{p2} \rfloor, \ldots, k_n^T = \lfloor k_{1n} \ \ k_{2n} \ \ldots \ k_{pn} \rfloor \tag{1.114}$$

şi

$$t_1^T = [t_{11}\ t_{21}\ \dots\ t_{r1}],\ t_2^T = [t_{12}\ t_{22}\ \dots\ t_{r2}],\dots,\ t_n^T = [t_{1n}\ t_{2n}\ \dots\ t_{rn}]. \tag{1.115}$$

Înlocuind K şi T de forma (1.113) în ecuaţia (1.104), se obţine

$$[k_1\ k_2\ \dots\ k_n] - F[t_1\ t_2\ \dots\ t_n] - [WC_1\ \ 0] = 0. \tag{1.116}$$

Folosind ecuaţiile (1.102), (1.104) şi (1.111), rezultă

$$GC_1[I_m\ \ 0_{m\times(n-m)}] = TA - ET. \tag{1.117}$$

Înmulţind ecuaţia (1.117) la dreapta cu $[I_m\ \ 0_{m\times(n-m)}]^T$, rezultă [180]

$$GC_1 = (TA - ET)[I_m\ \ 0_{m\times(n-m)}]^T \Leftrightarrow G = (TA - ET)[I_m\ \ 0_{m\times(n-m)}]^T \cdot C_1^{-1}. \tag{1.118}$$

De asemenea, înmulţind tot ecuaţia (1.117) la dreapta, dar de această dată cu $[0_{m\times(n-m)}\ \ I_{n-m}]^T$, se obţine

$$(TA - ET)[0_{m\times(n-m)}\ \ I_{n-m}]^T = 0. \tag{1.119}$$

În continuare, se partiţionează matricea A astfel

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \tag{1.120}$$

$A_{11} \in \mathcal{M}^{m\times m}, A_{12} \in \mathcal{M}^{m\times(n-m)}, A_{21} \in \mathcal{M}^{(n-m)\times m,}, A_{22} \in \mathcal{M}^{(n-m)\times(n-m)}$. Cu acestea, şi ţinând cont de $T = [T_1\ \ T_2]$, ecuaţia (1.119) se scrie

$$\begin{gathered}\left([T_1\ \ T_2]\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} - E[T_1\ \ T_2]\right)[0_{m\times(n-m)}\ \ I_{n-m}]^T = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow [T_1A_{11} + T_2A_{21} - ET_1\quad T_1A_{12} + T_2A_{22} - ET_2][0_{m\times(n-m)}\ \ I_{n-m}]^T = 0,\end{gathered} \tag{1.121}$$

echivalentă cu

$$T_1A_{12} + T_2A_{22} - ET_2 = 0. \tag{1.122}$$

De asemenea, ţinând cont de partiţionarea matricei A (ecuaţia (1.120)) şi a matricei T (ecuaţia (1.112)), ecuaţia (1.118) se scrie [180]

$$G = \left(\begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} - E\begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} I_m & 0_{m\times(n-m)} \end{bmatrix}^T \left(C_1^{-1}\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow G = \begin{bmatrix} T_1 A_{11} + T_2 A_{21} - ET_1 & T_1 A_{12} + T_2 A_{22} - ET_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & 0_{m\times(n-m)} \end{bmatrix}^T \left(C_1^{-1}\right) \quad (1.123)$$

sau

$$G = \left(T_1 A_{12} + T_2 A_{22} - ET_2\right)\left(C_1^{-1}\right). \quad (1.124)$$

Ecuaţiile (1.102) şi (1.104) conduc la

$$K = FT + W\begin{bmatrix} C_1 & 0_{m\times(n-m)} \end{bmatrix} \Leftrightarrow W\begin{bmatrix} C_1 & 0_{m\times(n-m)} \end{bmatrix} = K - FT\,. \quad (1.125)$$

Înmulţind ecuaţia (1.125) la dreapta cu $\begin{bmatrix} I_m & 0_{m\times(n-m)} \end{bmatrix}^T$, se obţine

$$WC_1 = (K - FT)\begin{bmatrix} I_m & 0_{(n-m)\times m} \end{bmatrix}^T, \quad (1.126)$$

ecuaţie echivalentă cu

$$WC_1 = \left(\begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} - F\begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} I_m & 0_{(n-m)\times m} \end{bmatrix}^T \Leftrightarrow WC_1 = \begin{bmatrix} K_1 - FT_1 & K_2 - FT_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_m & 0_{(n-m)\times m} \end{bmatrix}^T \quad (1.127)$$

sau

$$WC_1 = K_1 - FT_1\,. \quad (1.128)$$

Înmulţind ecuaţia (1.125) la dreapta cu $\begin{bmatrix} 0_{m\times(n-m)} & I_{n-m} \end{bmatrix}^T$, se obţine [180]

$$(K - FT)\begin{bmatrix} 0_{m\times(n-m)} & I_{n-m} \end{bmatrix}^T = 0 \Leftrightarrow \left(\begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} - F\begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 0_{m\times(n-m)} & I_{n-m} \end{bmatrix}^T = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} K_1 - FT_1 & K_2 - FT_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0_{m\times(n-m)} & I_{n-m} \end{bmatrix}^T = 0 \quad (1.129)$$

sau

$$K_2 = FT_2\,. \quad (1.130)$$

S-au obţinut 4 relaţii foarte importante (ecuaţiile (1.122), (1.124), (1.128) şi (1.130)), prin intermediul cărora se calculează matricele T_1, T_2, W şi G. Matricea K, şi implicit K_1 şi K_2, se calculează cu metoda LQR sau cu algoritmul ALGLX [157]; matricea E se obţine alegând cele r valori proprii stabile ale acesteia, iar matricea F

se alege ca fiind o matrice $(p \times r)$ cu elemente aparţinând matricei K. Ordinul observerului se calculează ca fiind un număr natural cel puţin egal cu $p(n - m)/m$. Algoritmul Nakade&Galcade [180] poate fi sintetizat ca mai jos:

Algoritmul 4 (Algoritmul Nakade&Galcade [180]**)**

Pasul 1: Se calculează ordinul observerului ca fiind numărul natural $\geq p(n - m)/m$.

Pasul 2: Se calculează matricea K cu metoda LQR, algoritmul ALGLX [157] sau alt algoritm din literatura de specialitate. Partiţionarea matricei K se face conform ecuaţiei (1.112); $K_1 \in \mathcal{M}^{p\times m}, K_2 \in \mathcal{M}^{p\times(n-m)}$.

Pasul 3: Se alege matricea F ca fiind o matrice $(p \times r)$ cu elemente aparţinând matricei K.

Pasul 4: Se alege aleator o matrice stabilă E.

Pasul 5: Folosind ecuaţia (1.130) şi pseudo-inversarea matricelor, se determină T_2

$$T_2 = F^+ K_2 . \tag{1.131}$$

Pasul 6: Se partiţionează matricea A, conform ecuaţiei (1.120), şi se determină A_{11}, A_{12}, A_{21} şi A_{22}. A_{12}, A_{22}, T_2, aflate la pasul anterior, şi matricea E se introduc în ecuaţia (1.122) pentru determinarea matricei T_1. Se obţine

$$T_1 = \left(EF^+ K_2 - F^+ K_2 A_{22}\right) \cdot A_{12}^+ . \tag{1.132}$$

Cu T_1 şi T_2 aflate la paşii 5 şi 6 se construieşte matricea

$$T = [T_1 \;\; T_2] = \left[\left(EF^+ K_2 - F^+ K_2 A_{22}\right) A_{12}^+ \quad F^+ K_2\right]. \tag{1.133}$$

Pasul 7: Se calculează W cu ecuaţia (1.128) utilizând T_1 cu forma (1.132); se obţine

$$W = \left[K_1 - F\left(EF^+ K_2 - F^+ K_2 A_{22}\right) A_{12}^+\right] C_1^{-1} . \tag{1.134}$$

Pasul 8: Se calculează matricea G cu ecuaţia (1.124); T_1 şi T_2 au formele (1.132), respectiv, (1.131).

Pasul 9: Se construieşte observerul descris de ecuaţiile (1.106) şi (1.107) [180]

$$\begin{aligned} &\dot{z}(t) = Ez(t) + TBu(t) + Gy(t), \\ &z(t) - T\hat{x}(t) = 0. \end{aligned} \tag{1.135}$$

1.3. PROIECTAREA OBSERVERELOR PENTRU DETECTAREA DEFECTELOR

Se pot construi observere pentru sisteme MIMO folosindu-se tehnica poziţionării polilor; aceste observere pot fi implementate cu succes pe diverse UAV-uri. Recent există o preocupare majoră pentru proiectarea de observere care să fie folosite şi în cazul defectelor (teoria FDI) [45], [63], [76], [99], [209], [249].

Se consideră sistemul descris de ecuaţiile de stare (1.1), unde $x \in\in \mathcal{M}^{n\times 1}$, $u \in \mathcal{M}^{r\times 1}$, $y \in \mathcal{M}^{m\times 1}$. Se proiectează un observer descris de ecuaţiile

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - \hat{y}(t)), \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t); \end{cases} \tag{1.136}$$

$\hat{x} \in \mathcal{M}^{n\times 1}, \hat{y} \in \mathcal{M}^{m\times 1}, L \in \mathcal{M}^{n\times m}$.

Se definesc, pentru sistemele (1.1) şi (1.136) eroarea de estimare

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \tag{1.137}$$

şi semnalul rezidual

$$r(t) = y(t) - \hat{y}(t). \tag{1.138}$$

Derivând semnalul eroare *e*, se obţine [92]

$$\begin{aligned} &\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) = Ax(t) + Bu(t) - A\hat{x}(t) - Bu(t) - L(y(t) - \hat{y}(t)) = \\ &= (A - LC)x(t) - (A - LC)\hat{x}(t) = (A - LC)(x(t) - \hat{x}(t)) = (A - LC)\,e(t) = A_{obs}e(t). \end{aligned} \tag{1.139}$$

De asemenea,

$$r(t) = y(t) - \hat{y}(t) = Cx(t) - C\hat{x}(t) = C(x(t) - \hat{x}(t)) = Ce(t). \tag{1.140}$$

Alăturând ecuaţiile (1.139) şi (1.140), se obţine sistemul [92]

$$\begin{cases} \dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) = (A - LC)e(t) = A_{obs}e(t), \\ r(t) = Ce(t). \end{cases} \tag{1.141}$$

Este de dorit ca eroarea $e = x - \hat{x}$ a sistemului să tindă la zero. Pentru aceasta este suficient ca matricea A_{obs} să fie stabilă, adică $\Lambda(A_{obs}) \subset C_-$. Aşadar, proiectarea sistemului este o chestiune relativ simplă dacă se impun valori proprii dorite pentru matricea A_{obs}. Alegerea lor este însă în strânsă legătură cu valorile proprii ale sistemului în circuit închis. Se consideră astfel că legea de conducere (reacţia sistemului) este de forma

$$u = -Kx. \tag{1.142}$$

Prima ecuaţie (1.1) devine

$$\dot{x} = Ax - BKx = (A - BK)x = \widetilde{A}x, \tag{1.143}$$

unde

$$\widetilde{A} = A - BK. \tag{1.144}$$

Atât matricea observerului $A_{obs} = A - LC$ cât şi matricea de stabilitate a sistemului $\widetilde{A} = A - BK$ au n valori proprii. Fie $s_i, i = \overline{1, n}$ cele n valori proprii ale matricei A_{obs} şi $\widetilde{s}_i, i = \overline{1, n}$ ele n valori proprii ale matricei $\widetilde{A}$ [92]. Fie, de asemenea, $v_i, i = \overline{1, n}$ – vectorii proprii asociaţi valorilor proprii s_i şi $\widetilde{v}_i, i = \overline{1, n}$ – vectorii proprii asociaţi valorilor proprii $\widetilde{s}_i$. În acest caz, sunt valabile ecuaţiile

$$\widetilde{A}\widetilde{v}_i = \widetilde{s}_i\widetilde{v}_i \, , A_{obs}v_i = s_i v_i \, . \tag{1.145}$$

Dacă se notează cu

$$\Omega = \text{diag}(\widetilde{s}_1, \widetilde{s}_2, ..., \widetilde{s}_n) \tag{1.146}$$

matricea diagonală ce conţine valorile proprii ale matricei $\widetilde{A}$ (matrice ce descrie sistemul în circuit închis) şi cu

$$V = \left[\widetilde{v}_1 \;\; \widetilde{v}_2 \;\; \cdots \;\; \widetilde{v}_n\right] \tag{1.147}$$

matricea ce are ca şi coloane vectorii proprii $\widetilde{v}_i$ asociaţi valorilor proprii $\widetilde{s}_i$, prima ecuaţie (1.145) devine [92]

$$(A - BK)V = \Omega V \Leftrightarrow AV - BKV = \Omega V \tag{1.148}$$

sau

$$AV + BW = \Omega V, \tag{1.149}$$

în care s-a făcut notaţia

$$W = -KV. \tag{1.150}$$

Deoarece sistemul este controlabil [92],

$$\operatorname{rang}\left(\left[A - \mathrm{s}I_n \;\; B\right]\right) = n\,, (\forall)\mathrm{s} \in \mathrm{C} \tag{1.151}$$

şi se pot alege două matrice inversabile $P(\mathrm{s}) \in \mathcal{M}^{n\times n}[\mathrm{s}]$ şi $Q(\mathrm{s}) \in \mathcal{M}^{(n+r)\times(n+r)}[\mathrm{s}]$ care satisfac ecuaţia

$$P(\mathrm{s})\left[A - \mathrm{s}I_n \;\; B\right] \cdot Q(\mathrm{s}) = \left[0 \;\; I_n\right] \tag{1.152}$$

$(\forall)\mathrm{s} \in \mathrm{C}$. În continuare, se partiţionează matricea $Q(\mathrm{s})$ astfel [92]

$$Q(\mathrm{s}) = \begin{bmatrix} Q_{11}(\mathrm{s}) & Q_{12}(\mathrm{s}) \\ Q_{21}(\mathrm{s}) & Q_{22}(\mathrm{s}) \end{bmatrix}, \tag{1.153}$$

în care $Q_{11}(\mathrm{s}) \in \mathcal{M}^{n\times r}[\mathrm{s}], Q_{12}(\mathrm{s}) \in \mathcal{M}^{n\times n}[\mathrm{s}], Q_{21}(\mathrm{s}) \in \mathcal{M}^{r\times r}[\mathrm{s}]$ şi $Q_{22}(\mathrm{s}) \in \mathcal{M}^{r\times n}[\mathrm{s}]$ (n - numărul variabilelor de stare, $r-$ numărul de intrări ale sistemului).

Dacă sistemul descris de ecuaţia (1.1) este controlabil, $\operatorname{rang}(B) = r$ şi matricea de stabilitate a sistemului $(\widetilde{A})$ are valorile proprii $\widetilde{s}_i$, este posibilă obţinerea matricei de amplificare K astfel [92]

$$K = -WV^{-1}, \tag{1.154}$$

în care

$$V = \left[\widetilde{v}_1 \;\; \widetilde{v}_2 \;\; \cdots \;\; \widetilde{v}_n\right], \widetilde{v}_i = Q_{11}(\mathrm{s}) \widetilde{f}_i \,, i = \overline{1, n} \tag{1.155}$$

şi

$$W = \left[w_1 \;\; w_2 \;\; \cdots \;\; w_n\right], w_i = Q_{21}(\mathrm{s}) \widetilde{f}_i \,, i = \overline{1, n}\,, \tag{1.156}$$

unde $\widetilde{f}_i \in \mathrm{C}^r -$ vectori parametrici ce satisfac condiţiile [92]

$$\widetilde{s}_i = \widetilde{s}_j \Leftrightarrow \widetilde{f}_i = \widetilde{f}_j \,, i, j = \overline{1, n}\,, \det(V) \neq 0\,. \tag{1.157}$$

Pentru ca eroarea de estimare a observerului să tindă la zero $(e \to 0)$ trebuie determinată matricea L astfel încât valorile proprii s_i ale matricei A_{obs} să fie situate în semiplanul stâng complex. Dacă sistemul descris de ecuaţia (1.1) este observabil $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rang}(C) = m$ şi s_i sunt valorile proprii ale matricei A_{obs}, matricea de amplificare a observerului (L) se obţine cu ecuaţia [92]

$$L = -\left(W_{obs} \, V_{obs}^{-1}\right)^T, \tag{1.158}$$

în care

$$V_{obs} = \left[v_1 \;\; v_2 \;\; \cdots \;\; v_n\right], v_i = Q_{obs_{11}}(\mathrm{s}_i) f_i \,, i = \overline{1, n} \tag{1.159}$$

şi

$$W_{obs} = \left[w_1 \;\; w_2 \;\; \cdots \;\; w_n\right], w_i = Q_{obs_{21}}(\mathrm{s}_i) f_i \,, i = \overline{1, n} \tag{1.160}$$

unde $f_i \in \mathrm{C}^r -$ vectori parametrici ce satisfac condiţia

$$s_i = \bar{s}_j \Leftrightarrow f_i = \bar{f}_j \,, i, j = \overline{1, n}\,. \tag{1.161}$$

Matricele $Q_{obs_{11}}$ şi $Q_{obs_{21}}$ sunt submatrice ale matricei [92]

$$Q_{obs} = \begin{bmatrix} Q_{obs_{11}} & Q_{obs_{12}} \\ Q_{obs_{21}} & Q_{obs_{22}} \end{bmatrix}, \tag{1.162}$$

cu $Q_{obs_{11}} \in \mathcal{M}^{n\times r}[\mathrm{s}], Q_{obs_{12}} \in \mathcal{M}^{n\times n}[\mathrm{s}], Q_{obs_{21}} \in \mathcal{M}^{n\times r}[\mathrm{s}]$ şi $Q_{obs_{22}} \in \mathcal{M}^{r\times n}[\mathrm{s}]$.

Observerul construit poate fi util în cazul în care se doreşte detectarea defectelor. După ce a fost construit observerul, se calculează semnalul rezidual pentru a vedea dacă vreunul dintre senzorii din sistem s-a defectat. Astfel, dacă $r(t) = y(t) - \hat{y}(t) = 0$, înseamnă că senzorii funcţionează bine. În cazul în care $r(t) \neq 0$, unul dintre senzori s-a defectat. Senzorul „k”, care s-a defectat, este determinat calculând

$$r_k(t) = y_k(t) - \hat{y}_k(t), \tag{1.163}$$

pentru toate cele „k” ieşiri ale sistemului $\left(k = \overline{1, m}\right)$.

1.4. OBSERVERE OPTIMALE

În cazul în care aparatul de zbor evoluează în condiţii de perturbaţii aleatoare, se folosesc observerele optimale (filtrul Kalman-Bucy). Se consideră dinamica aeronavei descrisă de ecuaţia

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + B^*(t)w(t), \\ y(t) = C(t)x(t) + v(t), \end{cases} \tag{1.164}$$

în care $x \in \mathcal{M}^{n\times 1}$ este vectorul de stare, $u \in \mathcal{M}^{m\times 1}$ – vectorul de comandă, $A \in \mathcal{M}^{n\times n}$, $B \in \mathcal{M}^{n\times m}, B^* \in \mathcal{M}^{n\times l}$ – matrice; $w \in \mathcal{M}^{l\times 1}$ este un proces aleator de tip zgomot alb, $y \in \mathcal{M}^{m\times 1}$ – vector măsurat, $C \in \mathcal{M}^{m\times n}$ – matrice de selectare şi $v \in \mathcal{M}^{m\times 1}$ – zgomot asociat senzorilor (proces aleator de tip zgomot alb).

Procesele aleatoare w şi v sunt descrise cu ajutorul matricelor de corelaţie

$$Q^*(t) = \mathrm{M}\left[w(t)w^T(t')\right], R^*(t) = \mathrm{M}\left[v(t)v^T(t')\right], \tag{1.165}$$

unde $\mathrm{M}[\cdot]$ reprezintă media, Q^*, R^* – matrice simetrice şi pozitiv semidefinite care exprimă intensităţile zgomotelor w şi v [92], [157]

$$Q^*(t)=\begin{bmatrix} q_1(t) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_2(t) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & q_l(t) \end{bmatrix}, R^*(t)=\begin{bmatrix} r_1(t) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_2(t) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & r_m(t) \end{bmatrix}. \tag{1.166}$$

O covarianţă mică implică intrări tip zgomot aproape de medie (zero în acest caz), iar o covarianţă mare conduce la intrări zgomot departe de medie.

Procesele aleatoare w şi v sunt necorelate între ele, adică

$$N(t) = \mathrm{M}\left[w(t)v^T(t')\right] = 0. \tag{1.167}$$

În aplicaţii practice, dacă B^* nu se cunoaşte, se poate considera $B^* = B$.

Filtrul Kalman-Bucy are drept scop determinarea vectorului de stare estimat $(\hat{x}(t))$, funcţie de măsurătorile $y(\tau)(0 \le \tau < t)$, care să minimezeze funcţia [92]

$$J = \mathrm{trace}\,(L(t)), \tag{1.168}$$

în care $L(t)$ este covarianţa pentru eroarea de estimare

$$L(t) = M\left[(x(t)-\hat{x}(t))(x(t)-\hat{x}(t))^T\right]. \tag{1.169}$$

Estimatorul cuadratic liniar (LQE) se numeşte filtru Kalman-Bucy şi este descris de ecuaţiile (1.136) în care

$$L(t) = P^*(t)C^T(t)R^*(t); \tag{1.170}$$

$P^*(t)$ este o matrice pozitiv definită - soluţie a ecuaţiei Riccati [92]

$$\dot{P}^*(t) = A(t)P^*(t) + P^*(t)A^T(t) - P^*(t)C^T(t)R^{*-1}(t)C(t)P^*(t) + B^*(t)Q^*(t)B^{*T}(t) \tag{1.171}$$

sau

$$A(t)P^*(t) + P^*(t)A^T(t) - P^*(t)C^T(t)R^{*-1}(t)C(t)P^*(t) + B^*(t)Q^*(t)B^{*T}(t) = 0, \tag{1.172}$$

dacă sistemul este considerat invariant în timp. Considerând $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ – eroarea de estimare a filtrului, se poate determina ecuaţia asociată dinamicii erorii

$$\begin{aligned}\dot{e}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) + B^*(t)w(t) - A(t)\hat{x}(t) - B(t)u(t) - L(t)[C(t)x(t) - C(t)\hat{x}(t)] - \\ &- L(t)v(t) = [A(t) - L(t)C(t)]e(t) + B^*(t)w(t) - L(t)v(t).\end{aligned} \tag{1.173}$$

Aşadar, viteza de convergenţă este dependentă de valorile proprii (părţile reale ale valorilor proprii) ale matricei $(A(t) - L(t)C(t))$ dar şi de zgomotul senzorilor. Asupra estimatorului cuadratic linear (LQE) întotdeauna va exista o influenţă a zgomotului procesului (w) şi o influenţă a zgomotului senzorilor (v). Alegerea matricei $A(t)$ va accentua/diminua efectul lui $v(t)$ asupra lui $\hat{x}(t)$ [92].

Dacă $Q^*(t)$ şi $R^*(t)$ sunt matrice simetrice şi pozitiv semidefinite, dinamica sistemului este considerată constantă în timp, (A, B^*) – pereche controlabilă şi (A, C) – pereche detectabilă, se poate determina $P^*(t)$ ca soluţie a ecuaţiei (1.171) şi apoi matricea de amplificare a observerului $L(t)$. Pentru filtrul Kalman-Bucy se tip optimal, se obţine funcţia de transfer [92]

$$\frac{\hat{X}(s)}{Y(s)} = \frac{L}{sI - (A - LC)}. \tag{1.174}$$

Funcţia de transfer face legătura între “măsurători” şi “starea estimată.

În fig. 1.13 este prezentată schema bloc de modelare a sistemului de comandă optimală a mişcării aparatului de zbor, constituită din următoarele subsisteme: modelul dinamic al aparatului de zbor, sistemul de măsurare, observerul optimal de tip filtru Kalman-Bucy şi subsistemul de comandă optimală (matricea de amplificare K).

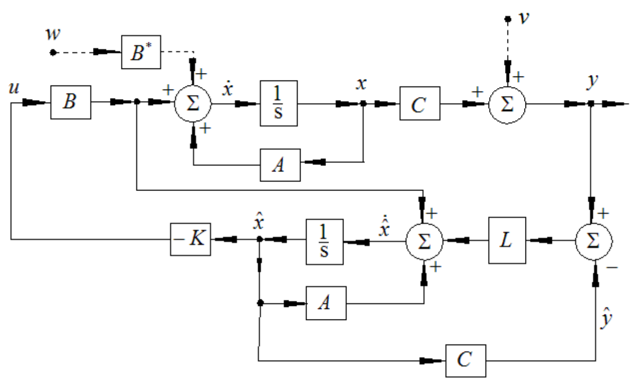

Fig. 1.13. Schema bloc de modelare a filtrului Kalman-Bucy

Se consideră mişcarea aeronavei descrisă de ecuaţia de stare (1.47) [157] şi de ecuaţia de ieşire $y = Cx + v$ cu $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, adică $y^T = [\theta \ \vartheta]$, $\vartheta = \theta - \alpha$. Alegând $Q^* = [0.01]$ şi $R^* = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix}$, se rezolvă ecuaţia Riccati (1.172) şi rezultă

$$P^* = \begin{bmatrix} 1.73 & -0.20 & -0.11 & -0.02 \\ -0.20 & 0.04 & 0.04 & 0.08 \\ -0.11 & 0.04 & 0.04 & 0.09 \\ -0.02 & 0.08 & 0.09 & 0.44 \end{bmatrix}, \ L = \begin{bmatrix} -11.01 & 9.58 \\ 4.01 & -0.93 \\ 4.26 & 0.24 \\ 9.11 & 0.57 \end{bmatrix}. \qquad (1.175)$$

Programul Matlab din anexa A1.3 reprezintă implementarea software a procedurii de construcţie a filtrului Kalman-Bucy; matricele P^* şi L se calculează cu instrucţiunea LQE, cu sintaxa $[L, P, E] = \mathrm{LQE}(A, G, C, Q, R, N)$, în care: $P = P^*, Q = Q^*, R = R^*$, $G=B^*$, N este matricea din ecuaţia (1.167), iar E reprezintă vectorul ce conţine valorile proprii ale matricei A-LC.

În fig. 1.14 este prezentat modelul Matlab/Simulink pentru structura din fig. 1.13. Cu acesta, rezultă caracteristicile de timp din fig. 1.15 (erorile de estimare a variabilelor de stare cu estimatorul de stare Kalman-Bucy pentru $u = 0$) şi caracteristicile de timp din fig. 1.16 pentru legea de comandă $u = -K\hat{x}$ (K calculată cu algoritmul ALGLX); aceste caracteristici exprimă variabilele de stare $x_i(t)$ – cu linie continuă şi $\hat{x}_i(t)$ – cu linie întreruptă.

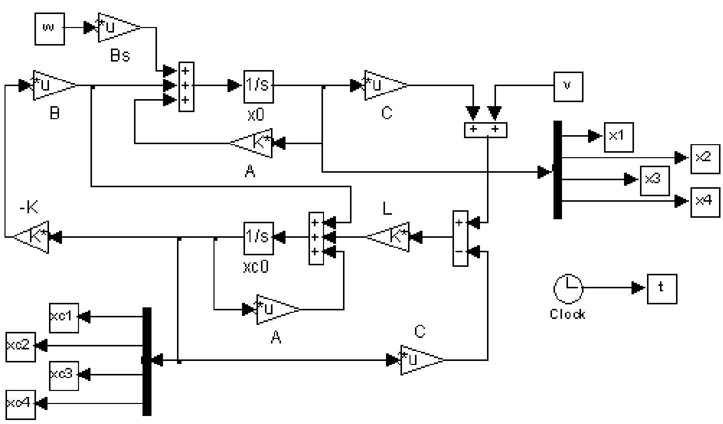

Fig. 1.14. Modelul Matlab/Simulink pentru structura din fig. 1.13

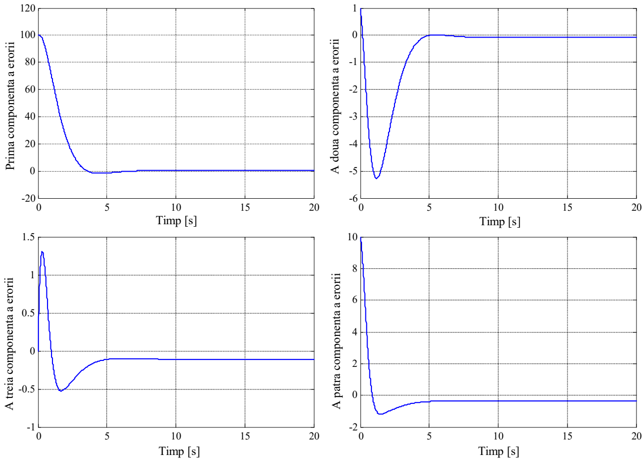

Fig. 1.15. Erorile de estimare a stării estimatorului Kalman-Bucy $(K = 0)$

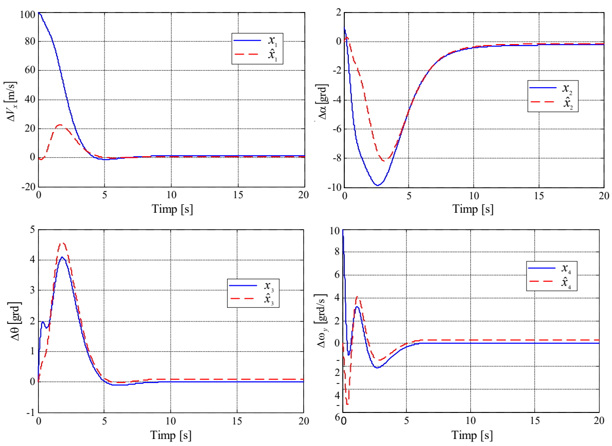

Fig. 1.16. Variabilele de stare $x_i(t)$ şi $\hat{x}_i(t)$ - mişcarea longitudinală $(K \neq 0)$

Se implementează software filtrul Kalman-Bucy şi pentru cazul mişcării laterale a unei aeronave Boeing 747; ecuaţia de stare a mişcării laterale este (1.49). Se obţin

$$P^* = \begin{bmatrix} 0.0087 & -0.0004 & 0.0016 & 0.0002 \\ -0.0004 & 0.0055 & 0.0027 & 0.0023 \\ 0.0016 & 0.0027 & 0.0104 & 0.0070 \\ 0.0002 & 0.0023 & 0.0070 & 0.0120 \end{bmatrix}, \; L = \begin{bmatrix} 0.0238 \\ 0.2340 \\ 0.6993 \\ 1.1985 \end{bmatrix}; \tag{1.176}$$

erorile de estimare a variabilelor de stare sunt prezentate în fig. 1.17 (pentru K=0), iar variabilele de stare $x_i(t)$ şi $\hat{x}_i(t)$ pentru K calculat cu algoritmul ALGLX sunt prezentate în fig. 1.18. Programul Matlab utilizat este similar celui din anexa A1.3, iar modelul Matlab/Simulink este identic cu cel din fig. 1.14.

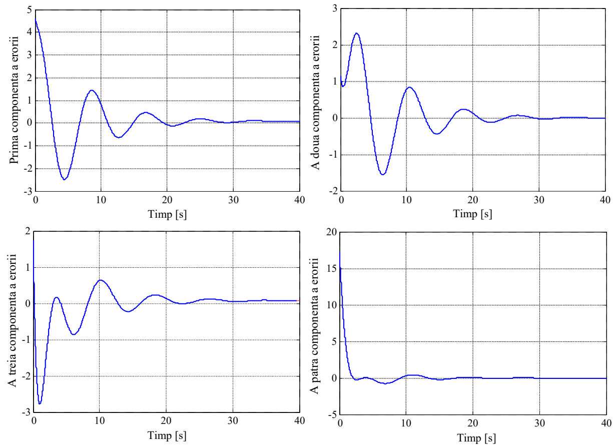

Fig. 1.17. Erorile de estimare a stării estimatorului Kalman-Bucy (K=0)

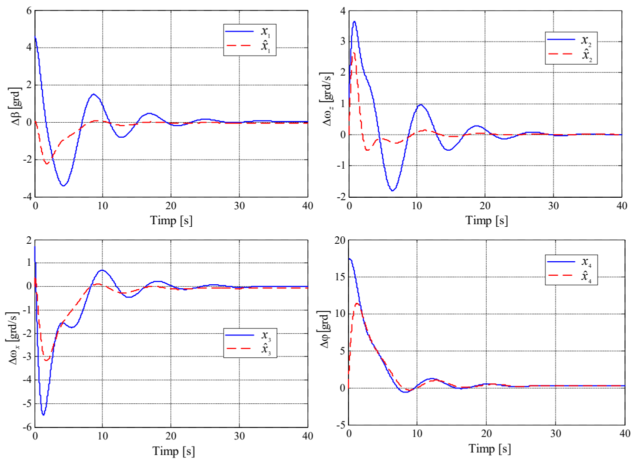

Fig. 1.18. Variabilele de stare $x_i(t)$ şi $\hat{x}_i(t)$ - mişcarea laterală $(K \neq 0)$

1.5. TEHNICI DE PROIECTARE A OBSERVERELOR LINIARE DISCRETE

1.5.1. CHESTIUNI GENERALE

Se consideră sistemul discret descris de ecuaţiile de stare în variantă discretă [231]

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \, , y_k = Cx_k \, , \tag{1.177}$$

în care $x_k \in R^n$ este vectorul de stare discret cu n componente, $u_k \in R^l$ − vectorul de ieşire cu l componente, iar $y_k \in R^m$ − vectorul celor m ieşiri ale sistemului discret.

Există două tipuri de estimatoare ca urmare a măsurătorii care trebuie să fie disponibilă la momentul k sau la momentul $k+1$. În primul caz, estimatorul se numeşte *estimator-predictor* şi oferă o estimare a stării $\hat{x}_{k+1/k}$ la momentul $k+1$, cunoscându-se estimarea de la momentul k; în al doilea caz, se construieşte un *estimator-corector*, estimarea fiind notată cu $\hat{x}_{k+1/k+1}$.

Cazul 1: *Estimatorul - predictor*

În acest caz, se cunoaşte y_k dar nu se cunoaşte y_{k+1} [231]

$$\hat{x}_{k+1/k} = A\hat{x}_{k/k-1} + Bu_k + K_p\left(y_k - \hat{y}_{k/k-1}\right), \tag{1.178}$$

unde $\hat{y}_{k/k-1} = C\hat{x}_{k/k-1}$. Introducând expresia lui $\hat{y}_{k/k-1}$ în ecuaţia (1.178), se obţine

$$\hat{x}_{k+1/k} = A\hat{x}_{k/k-1} + Bu_k + K_p\left(y_k - C\hat{x}_{k/k-1}\right) = \left(A - K_pC\right)\hat{x}_{k/k-1} + Bu_k + K_py_k \, . \tag{1.179}$$

Structura anterioară este identică cu cea din cazul sistemelor continue. Dacă se notează eroarea observerului discret cu [231]

$$\tilde{x}_{k+1/k} = x_{k+1} - \hat{x}_{k+1/k} \, , \tag{1.180}$$

ecuaţia estimatorului de stare se scrie

$$\tilde{x}_{k+1/k} = \left(A - K_pC\right)\tilde{x}_{k+1/k} \, ; \tag{1.181}$$

estimatorul este asimptotic stabil dacă matricea $\left(A - K_pC\right)$ este stabilă, adică dacă valorile proprii ale matricei sunt în modul subunitare (matricea $\left(A - K_pC\right)$ este matrice Schur) [231].

Cazul 2: *Estimatorul - corector*

În acest caz, y_{k+1} este cunoscut, ecuaţia observerului fiind

$$\hat{x}_{k+1/k+1} = A\hat{x}_{k/k} + Bu_k + K_c(y_{k+1} - \hat{y}_{k+1}); \tag{1.182}$$

$\hat{y}_{k+1}$ reprezintă estimarea ieşirii la momentul $k+1$. Ea se poate realiza în două moduri diferite: anticipare şi predicţie.

În primul caz

$$\hat{y}_{k+1} = C\hat{x}_{k+1/k+1}; \tag{1.183}$$

eroarea estimatorului este [231]

$$\tilde{x}_{k+1/k+1} = x_{k+1} - \hat{x}_{k+1/k+1}, \tag{1.184}$$

iar eroarea estimatorului devine

$$\hat{x}_{k+1/k+1} = (I + K_c C)^{-1} A\tilde{x}_{k/k}. \tag{1.185}$$

Estimatorul este stabil dacă matricea $(I + K_c C)^{-1}$ este matrice Schur.

În cel de-al doilea caz [231]

$$\hat{y}_{k+1} = C(A\hat{x}_{k/k} + Bu_k); \tag{1.186}$$

ecuaţia estimatorului devine

$$\hat{x}_{k+1/k+1} = (I - K_c C)(A\hat{x}_{k/k} + Bu_k) + K_c y_{k+1}. \tag{1.187}$$

Cu aceleaşi notaţii ca şi în cazul precedent

$$\tilde{x}_{k+1/k+1} = (I - K_c C)A\hat{x}_{k/k}. \tag{1.188}$$

Estimatorul este asimptotic stabil dacă $(I - K_c C)$ este matrice Schur. Metodologia de calcul a amplificărilor K_p şi K_c este prezentată mai jos [231].

Eroarea de estimare este dată de ecuaţia scrisă sub formă unificată

$$\tilde{x}_{k+1} = (A - KC^*)\tilde{x}_k. \tag{1.189}$$

Se notează cu z_k variabila a cărei evoluţie este

$$z_{k+1} = A^T z_k + C^{*T} w_k. \tag{1.190}$$

Căutarea legii de comandă w_k^* se face prin minimizarea criteriului de performanţă

$$J = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(z_k^T Q z_k + w_k^T R w_k\right), \tag{1.191}$$

unde Q şi R sunt matrice simetrice şi pozitiv definite. Se obţine [231]

$$w_k^* = \left(R - C^* L C^{*T}\right)^{-1} C^* L A^T z_k\ , \tag{1.192}$$

în care L este soluţia ecuaţiei Riccati

$$Q + L = ALA^T + ALC^{*T}\left(R - C^* L C^{*T}\right)^{-1} C^* L A^T\ . \tag{1.193}$$

Se obţine [231]

$$K_p = -AL_p C^T\left(R - CL_p C^T\right)^{-1}, \tag{1.194}$$

cu L_p – soluţia ecuaţiei

$$Q + L_p = AL_p A^T + AL_p C^T\left(R - CL_p C^T\right)^{-1} CL_p A^T \tag{1.195}$$

sau

$$K_c = -AL_c C^T\left(R - CL_c C^T\right)^{-1} CAL_c A^T, \tag{1.196}$$

cu L_c – soluţia ecuaţiei

$$Q + L_c = AL_c A^T + AL_c C^T\left(R - CAL_c A^T C^T\right)^{-1} CAL_c A^T. \tag{1.197}$$

Din cele două tipuri de estimatoare discrete, estimatorul predictor este cel mai utilizat datorită analogiilor care există între acesta şi estimatoarele continue.

Ecuaţiile estimatoarelor predictor pot fi puse şi sub alte forme dacă se ia în consideraţie şi matricea nenulă D din ecuaţia de stare [96]

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k),\ y(k) = Cx(k) + Du(k). \tag{1.198}$$

Ecuaţiile observerului discret sunt

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) + K_p[y(k) - \hat{y}(k)],\ \hat{y}(k) = C\hat{x}(k) + Du(k). \qquad (1.199)$$

Notând eroarea observerului cu $e(k) = \hat{x}(k) - x(k)$, pentru un observer Luenberger discret, se obţine

$$e(k+1) = (A - K_p C)e(k). \qquad (1.200)$$

În ecuaţiile (1.198) şi (1.199), intrarea observerului $u(k)$ se calculează ca şi în cazul sistemelor continue: $u(k) = -K\hat{x}(k)$; ecuaţiile observerului devin [96]

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) - BK\hat{x}(k) + K_p[y(k) - \hat{y}(k)],\ \hat{y}(k) = C\hat{x}(k) - DK\hat{x}(k) \qquad (1.201)$$

sau, mai simplu,

$$\hat{x}(k+1) = (A - BK)\hat{x}(k) + K_p[y(k) - \hat{y}(k)],\ \hat{y}(k) = (C - DK)\hat{x}(k); \qquad (1.202)$$

matricea K se poate determina impunând valori proprii dorite pentru matricea $(A - BK)$.

1.5.2. FILTRUL DISCRET KALMAN-BUCY

Se consideră sistemul discret descris de ecuaţiile de stare [4], [59], [196]

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + B^* w(k),\ y(k) = Cx(k) + v(k), \qquad (1.203)$$

unde w şi v sunt procese aleatoare de tip zgomote albe. Matricele de corelaţie ale celor două procese aleatoare sunt

$$R_w = \mathrm{M}[w(k)w^T(k)],\ R_v = \mathrm{M}[v(k)v^T(k)]. \qquad (1.204)$$

Se condideră că cele două procese sunt necorelate, adică, pentru orice $i \neq j$,

$$\mathrm{M}[w(i)w^T(j)] = 0,\ \mathrm{M}[v(i)v^T(j)]. \qquad (1.205)$$

Proiectarea filtrului Kalman presupune determinarea unei matrice de amplificare L care să minimizeze

$$P(k) = M\{[x(k) - \hat{x}(k)][x(k) - \hat{x}(k)]^T\}; \qquad (1.206)$$

Structura observerului este [4], [59], [196]

$$\hat{x}(k) = A\bar{x}(k) + L_0(k)\left[y(k) - C\bar{x}(k)\right], \tag{1.207}$$

unde matricea $L_0(k)$ se calculează astfel:

$$L_0(k) = P(k)C^T R_v^{-1}, \tag{1.208}$$

iar matricea $P(k)$ se exprimă cu relaţia

$$P(k) = N(k) - N(k)C^T\left[CN(k)C^T + R_v\right]^{-1} CN(k). \tag{1.209}$$

Matricea $N(k)$ este covarianţa estimărilor $\bar{x}(k)$. $\bar{x}(k)$ din ecuaţia (1.207) se calculează după cum urmează:

$$\bar{x}(k) = A\hat{x}(k-1) + Bu(k-1), \tag{1.210}$$

iar actualizarea matricei de corelaţie $N(k)$ se face cu formula [4], [59], [196]

$$N(k+1) = AP(k)A^T + B^* R_w B^{*T}. \tag{1.211}$$

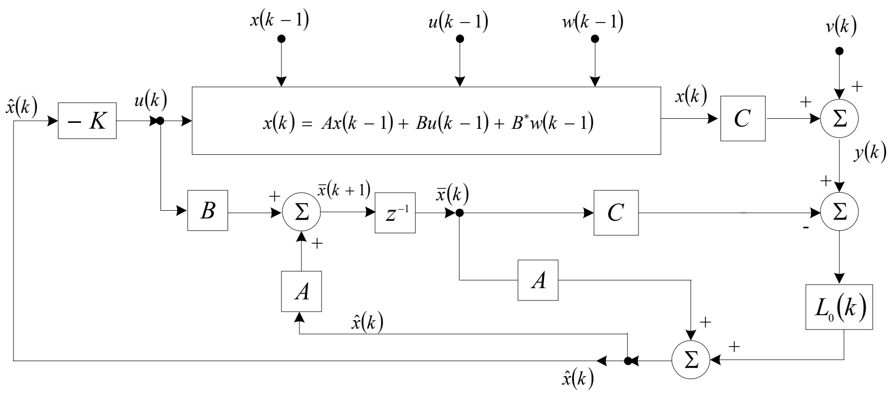

Fig. 1.19. Schema bloc de modelare a filtrului discret Kalman-Bucy

Ecuaţiile (1.209) şi (1.211) conduc la ecuaţia

$$N(k+1) = A\left\{N(k) - N(k)C^T\left[CN(k)C^T + R_v\right]^{-1} CN(k)\right\}A^T + B^* R_w B^{*T}. \tag{1.212}$$

Schema bloc de modelare a filtrului discret Kalman-Bucy este prezentată în fig. 1.19.

Considerând parcursă iteraţia k+1, deci considerând că se cunosc $x(k-1)$,

$\hat{x}(k-1), u(k-1), P(k-1)$ şi $w(k-1)$, cronologia paşilor la iteraţia k este următoarea:

Pasul 1: Se determină $\bar{x}(k)$ cu ecuaţia (1.210).

Pasul 2: Se determină matricea $N(k)$ astfel

$$N(k) = AP(k-1)A^T + B^* R_w B^{*T}. \tag{1.213}$$

Pasul 3: Se calculează matricea $P(k)$ în funcţie de $N(k)$ utilizând ecuaţia (1.209).

Pasul 4: Se calculează matricea $L_0(k)$ cu ecuaţia (1.208).

Pasul 5: Se calculează $x(k)$ şi $y(k)$ astfel:

$$x(k) = Ax(k-1) + Bu(k-1) + B^* w(k-1),\; y(k) = Cx(k) + v(k). \tag{1.214}$$

Pasul 6: Se calculează $\hat{x}(k)$ utilizând ecuaţia (1.207) şi $u(k) = -K\hat{x}(k)$.

În cele ce urmează, se validează algoritmul de proiectare a filtrului Kalman-Bucy pentru două cazuri ale mişcărilor longitudinală, respectiv laterală ale aeronavelor.

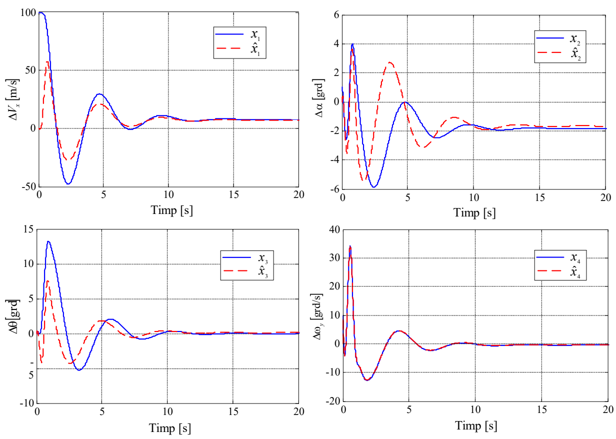

Fig. 1.20. Variabilele de stare $x_i(t)$ şi $\hat{x}_i(t)$ - mişcarea longitudinală

Pentru început, se consideră mişcarea longitudinală a unei aeronave descrisă de ecuaţia de stare (1.47) [157] şi de ecuaţia de ieşire $y=Cx+v$ cu $C=I_4$. Programul Matlab din anexa A1.4 reprezintă implementarea software a procedurii de construcţie a filtrului discret Kalman-Bucy; matricele N, P şi L_0 se calculează la fiecare iteraţie k. Matricea de amplificare K se calculează în Matlab utilizând instrucţiunea **DLQR** cu sintaxa

$[K, S, E] = \text{DLQR}(A_d, B_d, Q, R)$; matricele A_d şi B_d sunt transpunerile discrete ale matricelor A şi B. Utilizând programul Matlab din anexă, rezultă caracteristicile de timp din fig. 1.20 pentru legea de comandă $u = -K\hat{x}$; aceste caracteristici exprimă variabilele de stare $x_i(t)$ – cu linie continuă şi $\hat{x}_i(t)$ – cu linie întreruptă.

Se implementează software filtrul discret Kalman-Bucy şi pentru cazul mişcării laterale a unei aeronave Boeing 747, care zboară cu $M = 0.8$ la $H = 40000$ ft; ecuaţia de stare a mişcării laterale este (1.49) [157]. Programul Matlab utilizat este similar celui din anexa A1.4. Variabilele de stare $x_i(t)$ şi $\hat{x}_i(t)$, pentru K calculat folosind instrucţiunea DLQR, sunt prezentate în fig. 1.21.

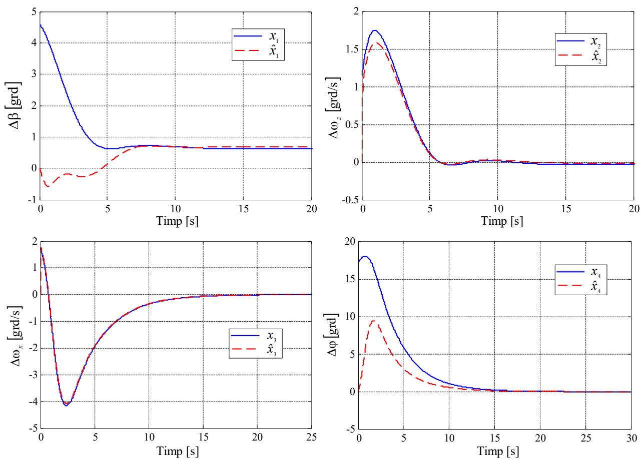

Fig. 1.21. Variabilele de stare $x_i(t)$ şi $\hat{x}_i(t)$ - mişcarea laterală

1.6. ESTIMAREA INTRĂRILOR NECUNOSCUTE PENTRU SISTEMELE LINIARE

1.6.1. ALGORITMI PENTRU ESTIMAREA INTRĂRILOR NECUNOSCUTE ALE SISTEMELOR LINIARE

1.6.1.1. Introducere

Estimarea intrărilor necunoscute poate avea o importanţă deosebită în procesul de detecţie a defectelor. Hou şi Muller [84] sunt autorii unui algoritm de proiectare a unui observer cu ordin redus pentru sisteme liniare cu intrări necunoscute. Ei au împărţit sistemul asociat ecuaţiei de stare în două subsisteme: primul depinde de intrările necunoscute, iar în cel de-al doilea intrările necunoscute nu contează [84], [168]. Având în vedere că starea celui de-al doilea subsistem poate fi obţinută prin măsurători, Hou şi Muller au proiectat un observer cu ordin redus pentru intrări necunoscute.

1.6.1.2. Algoritmul Hou & Muller

Se consideră sistemul invariant în timp [84], [168]

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Dd(k) \\ y(k) = Cx(k), \end{cases} \tag{1.215}$$

unde $x \in \mathcal{M}^{n\times 1}$ este vectorul de stare, $u \in \mathcal{M}^{p\times 1}$ – vectorul intrărilor, $y \in \mathcal{M}^{m\times 1}$ – vectorul de ieşire (vectorul măsurătorilor) şi $d \in \mathcal{M}^{s\times 1}$ – vectorul intrărilor necunoscute; matricele A, B, C, D au, respectiv, dimensiunile: $A \in \mathcal{M}^{n\times n}$, $B \in \mathcal{M}^{n\times p}$, $C \in \mathcal{M}^{m\times n}$, $D \in \mathcal{M}^{n\times s}$. Algoritmul propus de Hou şi Muller presupune că matricea C are rang de linie maxim (toţi vectorii linie ai matricei C sunt liniari independenţi) şi matricea D are rang de coloană maxim (toţi vectorii coloană ai matricei D sunt liniari independenţi). Ultima presupunere conduce la [84], [168]

$$D = H\begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}K^T, \tag{1.216}$$

unde $H \in \mathcal{M}^{n\times n}$, $R \in \mathcal{M}^{s\times s}$, $K \in \mathcal{M}^{s\times s}$. În ecuaţia (1.216) matricea H trebuie să fie ortogonală $\left(HH^T = I\right)$. Introducând D de forma (1.216) în ecuaţiile (1.215) se obţine

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + H\begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}K^T d(k),\ y(k) = Cx(k). \tag{1.217}$$

Se înmulţeşte la stânga cu H^T prima ecuaţie (1.217) şi se obţine [84], [168]

$$H^T x(k+1) = H^T AHH^T x(k) + H^T Bu(k) + H^T H\begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}K^T d(k),\ y(k) = CHH^T x(k) \tag{1.218}$$

sau

$$\overline{x}(k+1) = \overline{A}\overline{x}(k) + \overline{B}u(k) + \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}\overline{d}(k),\ y(k) = \overline{C}\overline{x}(k), \tag{1.219}$$

în care

$$\overline{x}(k) = H^T x(k),\ \overline{d}(k) = K^T d(k),\ \overline{A} = H^T AH\ ,\ \overline{B} = H^T B\ ,\ \overline{C} = CH\ . \tag{1.220}$$

Noul vector de stare $\overline{x}(k)$ se scrie astfel:

$$\overline{x}(k) = [\overline{x}_1(k)\ \overline{x}_2(k)]^T, \tag{1.221}$$

unde $\overline{x}_1(k) \in \mathcal{M}^{s\times 1}$ – vectorul de stare asociat intrărilor necunoscute, $\overline{x}_2(k) \in \mathcal{M}^{(n-s)\times 1}$ – vectorul de stare asociat intrărilor cunoscute. Matricele $\overline{A}, \overline{B}$ şi $\overline{C}$ se partiţionează după cum urmează [84], [168]:

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} \overline{A}_{11} & \overline{A}_{12} \\ \overline{A}_{21} & \overline{A}_{22} \end{bmatrix}, \overline{B} = \begin{bmatrix} \overline{B}_1 \\ \overline{B}_2 \end{bmatrix}, \overline{C} = [\overline{C}_1\ \ \overline{C}_2], \tag{1.222}$$

în care

$$\begin{aligned} &\overline{A}_{11} \in \mathcal{M}^{s\times s}, \overline{A}_{12} \in \mathcal{M}^{s\times(n-s)}, \overline{A}_{21} \in \mathcal{M}^{(n-s)\times s}, \overline{A}_{22} \in \mathcal{M}^{(n-s)\times(n-s)}, \\ &\overline{B}_1 \in \mathcal{M}^{s\times p}, \overline{B}_2 \in \mathcal{M}^{(n-s)\times p}, \overline{C}_1 \in \mathcal{M}^{m\times s}, \overline{C}_2 \in \mathcal{M}^{m\times(n-s)}. \end{aligned}$$

Cele două ecuaţii (1.219), utilizând (1.221) şi (1.222), devin

$$\begin{cases} \overline{x}_1(k+1) = \overline{A}_{11}\overline{x}_1(k) + \overline{A}_{12}\overline{x}_2(k) + \overline{B}_1 u(k) + R\overline{d}(k), \\ \overline{x}_2(k+1) = \overline{A}_{21}\overline{x}_1(k) + \overline{A}_{22}\overline{x}_2(k) + \overline{B}_2 u(k), \\ y(k) = \overline{C}_1\overline{x}_1(k) + \overline{C}_2\overline{x}_2(k). \end{cases} \tag{1.223}$$

Algoritmul propus de Hou şi Muller [84] funcţionează în continuare doar dacă matricea $\overline{C}_1$ are rang de coloană maxim. În acest caz $\overline{C}_1$ se poate scrie printr-o ecuaţie similară ecuaţiei (1.216):

$$\overline{C}_1 = H_1 \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix} K_1^T, \tag{1.224}$$

unde $H_1 \in \mathcal{M}^{m\times m}, K_1 \in \mathcal{M}^{s\times s}, R_1 \in \mathcal{M}^{s\times s}$. În continuare, se partiţionează matricea H_1 astfel [84], [168]

$$H_1 = [H_{11} \;\; H_{12}]; \tag{1.225}$$

$H_{11} \in \mathcal{M}^{m\times s}, H_{12} \in \mathcal{M}^{m\times(m-s)}$. Dacă se face notaţia [84]

$$\bar{y}(k) = H_1^T y(k) = \begin{bmatrix} H_{11}^T \\ H_{12}^T \end{bmatrix} y(k) = \begin{bmatrix} \bar{y}_1(k) \\ \bar{y}_2(k) \end{bmatrix}, \tag{1.226}$$

a treia ecuaţie (1.223) devine

$$y(k) = H_1 \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix} K_1^T \bar{x}_1(k) + \overline{C}_2 \bar{x}_2(k). \tag{1.227}$$

Se înmulţeşte această ultimă ecuaţie la stânga cu H_1^T şi rezultă

$$\begin{gathered} H_1^T y(k) = \underbrace{H_1^T H_1}_{I} \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix} K_1^T \bar{x}_1(k) + H_1^T \overline{C}_2 \bar{x}_2(k) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} H_{11}^T \\ H_{12}^T \end{bmatrix} y(k) = \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix} K_1^T \bar{x}_1(k) + \begin{bmatrix} H_{11}^T \\ H_{12}^T \end{bmatrix} \overline{C}_2 \bar{x}_2(k) \end{gathered} \tag{1.228}$$

echivalentă cu

$$\bar{y}_1(k) = R_1 K_1^T \bar{x}_1(k) + H_{11}^T \overline{C}_2 \bar{x}_2(k), \bar{y}_2(k) = C_2 \bar{x}_2(k), \tag{1.229}$$

unde

$$C_2 = H_{12}^T \overline{C}_2 . \tag{1.230}$$

Ţinând cont de expresia

$$\bar{y}_1(k) = [I_s \;\; 0] \begin{bmatrix} \bar{y}_1(k) \\ \bar{y}_2(k) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \bar{y}_1(k) = G^T \bar{y}(k), \tag{1.231}$$

din prima ecuaţie (1.229) se obţine [84]

$$\bar{x}_1(k) = \left(R_1 K_1^T\right)^{-1}\left[\bar{y}_1(k) - H_{11}^T \overline{C}_2 \bar{x}_2(k)\right] = \left(R_1 K_1^T\right)^{-1}\left[G^T \underbrace{H_1^T y(k)}_{\bar{y}(k)} - H_{11}^T \overline{C}_2 \bar{x}_2(k)\right] \quad (1.232)$$

echivalentă cu

$$\bar{x}_1(k) = K_1 R_1^{-1} G^T H_1^T \left[y(k) - \overline{C}_2 \bar{x}_2(k)\right]; \quad (1.233)$$

în ecuaţia de mai sus s-a ţinut cont de

$$\left(R_1 K_1^T\right)^{-1} = K_1 R_1^{-1}, \quad (1.234)$$

întrucât K_1 este matrice ortogonală, dar şi de relaţia

$$G^T H_1^T = \begin{bmatrix} I_s & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{11}^T \\ H_{12}^T \end{bmatrix} = H_{11}^T . \quad (1.235)$$

În continuare, se introduce $\bar{x}_1(k)$ cu forma (1.233) în cea de-a doua ecuaţie (1.223) şi se obţine [84]

$$\bar{x}_2(k+1) = \overline{A}_{21} K_1 R^{-1} G^T H_1^T y(k) - \overline{A}_{21} K_1 R^{-1} G^T H_1^T \overline{C}_2 \bar{x}_2(k) + \overline{A}_{22} \bar{x}_2(k) + \overline{B}_2 u(k) \quad (1.236)$$

sau

$$\bar{x}_2(k+1) = A_2 \bar{x}_2(k) + B_2 u(k) + D_2 y(k), \quad (1.237)$$

în care

$$A_2 = \overline{A}_{22} - \overline{A}_{21} K_1 R^{-1} G^T H_1^T, B_2 = \overline{B}_2, D_2 = \overline{A}_{21} K_1 R^{-1} G^T H_1^T . \quad (1.238)$$

Pentru estimarea vectorului $\bar{x}_2$, se construieşte un observer de tip Luenberger bazat pe ecuaţia (1.237) şi pe a doua ecuaţie (1.229). Acest observer poate fi construit dacă şi numai dacă perechea (A_2, C_2) este observabilă. Ecuaţia asociată observerului este [84], [168]

$$\hat{\bar{x}}_2(k+1) = (A_2 - LC_2)\hat{\bar{x}}_2(k) + B_2 u(k) + \left(D_2 + LH_{12}^T\right) y(k). \quad (1.239)$$

În proiectarea observerului (ecuaţia (1.239)) s-a avut în vedere faptul că

$\underbrace{LH_{12}^{T}y(k)}_{\overline{y}_2(k)} = LC_2\overline{x}_2(k)$. $\overline{d}(k)$ şi, implicit, $d(k)$ se obţin din prima ecuaţie (1.223) după cum urmează:

$$\begin{aligned} &\overline{x}_1(k+1) = \overline{A}_{11}\overline{x}_1(k) + \overline{A}_{12}\overline{x}_2(k) + \overline{B}_1u(k) + RK^T d(k) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow d(k) = \underbrace{\left(RK^T\right)^{-1}}_{KR^{-1}}\left[\overline{x}_1(k+1) - \overline{A}_{11}\overline{x}_1(k) - \overline{A}_{12}\overline{x}_2(k) - \overline{B}_1u(k)\right] \end{aligned} \tag{1.240}$$

echivalentă cu

$$\begin{aligned} d(k) &= KR^{-1}\left\{\overline{x}_1(k+1) - \overline{A}_{11}K_1R_1^{-1}G^TH_1^T\left[y(k) - \overline{C}_2\overline{x}_2(k)\right] - \overline{A}_{12}\overline{x}_2(k) - \overline{B}_1u(k)\right\} = \\ &= KR^{-1}\overline{x}_1(k+1) - KR^{-1}\overline{A}_{11}R_1^{-1}G^TH_1^Ty(k) + \\ &\quad + \left(KR^{-1}R_1^{-1}G^TH_1^T\overline{C}_2 - KR^{-1}\overline{A}_{12}\right)\overline{x}_2(k) - KR^{-1}\overline{B}_1u(k). \end{aligned} \tag{1.241}$$

$\overline{x}_2$ se estimează cu observerul (1.239) şi, deci, intrarea necunoscută estimată $\hat{d}(k)$ se calculează cu formula

$$\begin{aligned} \hat{d}(k) &= KR^{-1}\overline{x}_1(k+1) - KR^{-1}\overline{A}_{11}R_1^{-1}G^TH_1^Ty(k) + \\ &\quad + \left(KR^{-1}R_1^{-1}G^TH_1^T\overline{C}_2 - KR^{-1}\overline{A}_{12}\right)\hat{\overline{x}}_2(k) - KR^{-1}\overline{B}_1u(k). \end{aligned} \tag{1.242}$$

Aşadar, $\overline{x}_2(k)$ se estimează cu observerul descris de ecuaţia (1.239), iar $\overline{x}_1(k)$ se determină apoi cu o ecuaţie de tipul (1.233) în care $\overline{x}_2 \rightarrow \hat{\overline{x}}_2$

$$\hat{\overline{x}}_1(k) = K_1R_1^{-1}G^TH_1^T\left[y(k) - \overline{C}_2\hat{\overline{x}}_2(k)\right]. \tag{1.243}$$

Algoritmul Hou & Muller

Pasul 1: Se verifică dacă matricea D are rang de coloană maxim.

Pasul 2: Se determină matricele H, R şi K utilizând ecuaţia (1.216).

Pasul 3: Se calculează matricele $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ utilizând ecuaţia (1.220) şi apoi se partiţionează vectorul de stare $\overline{x}(k) = H^Tx(k) \rightarrow$ ecuaţia (1.221).

Pasul 4: Se partiţionează matricele $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C} \rightarrow$ ecuaţia (1.222).

Pasul 5: Se verifică dacă $\overline{C}_1$ are rang de coloană maxim. În caz contrar algoritmul nu poate continua.

Pasul 6: Se determină matricele H_1, R_1 şi K_1 utilizând ecuaţia (1.224) şi apoi se partiţionează H_1 (ecuaţia (1.225)), rezultând H_{11} şi H_{12}; se calculează C_2 cu ecuaţia (1.230).

Pasul 7: Se calculează matricele A_2, B_2, D_2 cu ecuaţia (1.238) şi se proiectează observerul de stare descris de ecuaţiile (1.239). Matricea L se obţine impunând valori proprii convenabile (în semiplanul stâng complex) pentru matricea $(A_2 - LC_2)$.

Pasul 8: Cu $\hat{\bar{x}}_2$ obţinut la pasul 7, se calculează $\hat{\bar{x}}_1$ (ecuaţia (1.243)) şi apoi se estimează vectorul intrărilor necunoscute $\hat{d}(k)$ cu ecuaţia (1.242).

Pasul 9: Vectorul de stare $\bar{x}(k)$ se estimează astfel: $\hat{\bar{x}}(k) = \left[\hat{\bar{x}}_1(k)\ \hat{\bar{x}}_2(k)\right]^T$; $x(k)$ se obţine ţinând seama de prima ecuaţie (1.220) şi de faptul că $H -$ matrice ortogonală:

$$x(k) = H\hat{\bar{x}}(k) = H\left[\hat{\bar{x}}_1(k)\ \hat{\bar{x}}_2(k)\right]^T. \tag{1.244}$$

1.6.2. PROIECTAREA OBSERVERELOR PENTRU SISTEMELE LINIARE CU INTRĂRI NECUNOSCUTE

1.6.2.1. Proiectarea observerelor cu ordin întreg

Există numeroase metode pentru proiectarea observerelor şi a observerelor cu ordin redus pentru sistemele liniare cu intrări necunoscute. Metodele pot fi împărţite în 3 categorii: metode geometrice, metode algebrice şi cele care utilizează inversa generalizată [18]. Metodele geometrice au fost introduse de Bhattacharyya [12], iar cele algebrice au ca reprezentanţi de frunte pe Kudva, Viswadam şi Ramakrishna [141], Hautus [81], Hou & Muller [84], Darouach, Zasadzinski şi S. J. Xu [49], Yang şi Wild [239], O'Reilly [187] etc.

Se consideră sistemul invariant în timp

$$\dot{x} = Ax + Bu + Dd\,,\ y = Cx\,, \tag{1.245}$$

unde $x \in \mathcal{M}^{n\times 1}$ – vector de stare, $u \in \mathcal{M}^{p\times 1}$ – vectorul intrărilor cunoscute, $d \in \mathcal{M}^{s\times 1}$ – vectorul intrărilor necunoscute şi $y \in \mathcal{M}^{m\times 1}$ – vectorul ieşirilor. Matricele A, B, C, D au respectiv dimensiunile $A \in \mathcal{M}^{n\times n}, B \in \mathcal{M}^{n\times p}, C \in \mathcal{M}^{m\times n}, D \in \mathcal{M}^{n\times s}$.

Se presupune, fără micşorarea generalităţii, că $m \geq s, \mathrm{rang}(D) = s, \mathrm{rang}(C) = m$ şi perechea (C, A) – observabilă. Se construieşte observerul descris de ecuaţiile [18], [187]

$$\dot{z} = Nz + Ly + Gu \,,\, \hat{x} = z - Ey \,, \tag{1.246}$$

în care $z \in \mathcal{M}^{n\times 1}$ şi $\hat{x} \in \mathcal{M}^{n\times 1}$ – estimarea vectorului de stare x. Matricele N, L, G şi E sunt matrice cunoscute şi trebuie calculate astfel încât $\hat{x} \to x$. Se consideră eroarea de estimare $e = \hat{x} - x$ şi se calculează derivata acesteia; se obţine

$$\dot{e} = \dot{\hat{x}} - \dot{x} = Ne + (NP + LC - PA)x + (G - PB)u - PDd \,, \tag{1.247}$$

unde s-a făcut notaţia [18]

$$P = I_n + EC \,. \tag{1.248}$$

Dacă $\hat{x} \to x \Rightarrow \dot{e} = Ne$, deci, conform ecuaţiei (1.247), rezultă

$$NP + LC - PA = 0 \,, G - PB = 0 \,, (I_n + EC)D = 0 \tag{1.249}$$

şi, în plus, matricea N trebuie să fie stabilă.

Din cea de-a treia ecuaţie (1.249) se determină matricea E astfel

$$(I_n + EC)D = 0 \Leftrightarrow D + ECD = 0 \Rightarrow E = -D(CD)^{+} \,, \tag{1.250}$$

în care „+” este simbolul pseudo-inversei, adică

$$(CD)^{+} = \left[(CD)^{T}(CD)\right]^{-1}(CD)^{T} \,. \tag{1.251}$$

Pentru a se putea calcula pseudo-inversa matricei (CD), aceasta trebuie să aibă rang de coloană maxim, adică $\mathrm{rang}(CD) = s \,; CD \in \mathcal{M}^{m\times s}$.

După determinarea lui E (ecuaţia (1.250)) se calculează P cu ecuaţia (1.248) şi apoi, utilizând cea de-a doua ecuaţie (1.249), rezultă matricea G [18], [187]

$$G = PB = (I_n + EC)B = \left[I_n - D(CD)^+ C\right]B . \tag{1.252}$$

Determinarea matricelor N şi L se face utilizând prima ecuaţie (1.249). Procedura este destul de dificilă întrucât ecuaţia

$$NP + LC - PA = 0 \tag{1.253}$$

este o ecuaţie matriceală cu 2 necunoscute.

În [18] se procedează după cum urmează: se alege N de forma

$$N = PA - KC , \tag{1.254}$$

unde K se alege, la rândul ei, astfel încât matricea N să fie stabilă. Introducând N de forma (1.254) în ecuaţia (1.253) se obţine [18], [187]

$$\begin{aligned} & LC = PA - PAP + KCP \Leftrightarrow LC = (I_n + EC)A - (I_n + EC)A(I_n + EC) + KC(I_n + EC) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow LC = -AEC - ECAEC + KC + KCEC \Leftrightarrow LC = -\underbrace{(I_n + EC)}_{P}AEC + K(I_m + CE)C \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow LC = -PAEC + K(I_m + CE)C \end{aligned} \tag{1.255}$$

sau

$$L = -PAE + K(I_m + CE). \tag{1.256}$$

Aşadar, dinamica observerului este

$$\dot{z} = (PA - KC)z + [K(I_m + CE) - PAE]y + PBu , \hat{x} = z - Ey . \tag{1.257}$$

Rezolvarea ecuaţiei (1.253) şi, implicit, determinarea matricelor N şi L, se poate face şi prin partiţionarea matricelor N, P, L, C şi A (algoritmul O'Reilly îmbunătăţit)

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \\ N_3 & N_4 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}, \tag{1.258}$$

în care

$$
\begin{aligned}
&N \in \mathcal{M}^{n\times n}, N_1 \in \mathcal{M}^{(n-m)\times(n-m)}, N_2 \in \mathcal{M}^{(n-m)\times m}, N_3 \in \mathcal{M}^{m\times(n-m)}, N_4 \in \mathcal{M}^{m\times m},\\
&P \in \mathcal{M}^{n\times n}, P_1 \in \mathcal{M}^{(n-m)\times(n-m)}, P_2 \in \mathcal{M}^{(n-m)\times m}, P_3 \in \mathcal{M}^{m\times(n-m)}, P_4 \in \mathcal{M}^{m\times m},\\
&L \in \mathcal{M}^{n\times m}, L_1 \in \mathcal{M}^{(n-m)\times m}, L_2 \in \mathcal{M}^{m\times m},\\
&C \in \mathcal{M}^{m\times n}, C_1 \in \mathcal{M}^{m\times(n-m)}, C_2 \in \mathcal{M}^{m\times m},\\
&A \in \mathcal{M}^{n\times n}, A_1 \in \mathcal{M}^{(n-m)\times(n-m)}, A_2 \in \mathcal{M}^{(n-m)\times m}, A_3 \in \mathcal{M}^{m\times(n-m)}, A_4 \in \mathcal{M}^{m\times m}.
\end{aligned}
\tag{1.259}
$$

Ecuaţia (1.253) este echivalentă cu sistemul de ecuaţii matriceale

$$
\begin{cases}
N_1P_1 + N_2P_3 + L_1C_1 - P_1A_1 - P_2A_3 = 0_{(n-m)\times(n-m)}\,,\\
N_1P_2 + N_2P_4 + L_1C_2 - P_1A_2 - P_2A_4 = 0_{(n-m)\times m}\,,\\
N_3P_1 + N_4P_3 + L_2C_1 - P_3A_1 - P_4A_3 = 0_{m\times(n-m)}\,,\\
N_3P_2 + N_4P_4 + L_2C_2 - P_3A_2 - P_4A_4 = 0_{m\times m}\,.
\end{cases}
\tag{1.260}
$$

Sistemul anterior are 6 necunoscute ($N_i, i = \overline{1,4}$ şi $L_j, j = \overline{1,2}$) şi doar 4 ecuaţii. Pentru a putea fi rezolvat considerăm $N_1 \in \mathcal{M}^{(n-m)\times m}$ şi $N_3 \in \mathcal{M}^{m\times(n-m)}$ două matrice alese aleator. Din cele 4 submatrice $N_i, i = \overline{1,4}$, oricare două pot fi considerate cunoscute (alese aleator) urmând ca celelalte două, împreună cu L_1 şi L_2, să fie necunoscutele sistemului (1.260). Făcând notaţiile

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{A}_1 = P_1A_1 + P_2A_3 - N_1P_1\,, \widetilde{A}_2 = P_1A_2 + P_2A_4 - N_1P_2\,,\\
&\widetilde{A}_3 = P_3A_1 + P_4A_3 - N_3P_1\,, \widetilde{A}_4 = P_3A_2 + P_4A_4 - N_3P_2\,,
\end{aligned}
\tag{1.261}
$$

sistemul de ecuaţii matriceale (1.260) se transformă în două sisteme de ecuaţii, fiecare cu câte 2 necunoscute

$$
\begin{cases}
N_2P_3 + L_1C_1 = \widetilde{A}_1\,,\\
N_2P_4 + L_1C_2 = \widetilde{A}_2\,,
\end{cases}
\tag{1.262}
$$

$$
\begin{cases}
N_4P_3 + L_2C_1 = \widetilde{A}_3\,,\\
N_4P_4 + L_2C_2 = \widetilde{A}_4\,.
\end{cases}
\tag{1.263}
$$

Pentru rezolvarea primului sistem, se scoate N_2 din a doua ecuaţie (1.262)

$$
N_2 = \left(\widetilde{A}_2 - L_1C_2\right)P_4^{+}
\tag{1.264}
$$

şi se înlocuieşte în prima ecuaţie (1.262). Se obţin

$$L_1 = \left(\widetilde{A}_1 - \widetilde{A}_2 P_4^+ P_3\right)\left(C_1 - C_2 P_4^+ P_3\right)^+ \tag{1.265}$$

şi

$$N_2 = \left(\widetilde{A}_2 - L_1 C_2\right) P_4^+ \tag{1.266}$$

echivalentă cu

$$N_2 = \left[\widetilde{A}_2 - \left(\widetilde{A}_1 - \widetilde{A}_2 P_4^+ P_3\right)\left(C_1 - C_2 P_4^+ P_3\right)^+ C_2\right] P_4^+ . \tag{1.267}$$

Se rezolvă similar şi sistemul (1.263) şi se determină necunoscutele L_2 şi N_4

$$L_2 = \left(\widetilde{A}_3 - \widetilde{A}_4 P_4^+ P_3\right)\left(C_1 - C_2 P_4^+ P_3\right)^+ , \tag{1.268}$$

$$N_4 = \left[\widetilde{A}_4 - \left(\widetilde{A}_3 - \widetilde{A}_4 P_4^+ P_3\right)\left(C_1 - C_2 P_4^+ P_3\right)^+ C_2\right] P_4^+ . \tag{1.269}$$

După determinarea matricelor N_2 şi N_4 (N_1 şi N_3 au fost alese aleator), se construieşte matricea N – ecuaţia (1.258). Aceasta trebuie să fie stabilă. În cazul în care N nu este stabilă, se aleg alte 2 matrice N_1 , N_3 şi se rezolvă din nou sistemul de ecuaţii (1.260).

Metoda de proiectare a observerului din [18], [187] prezintă unele dezavantaje faţă de metoda inovativă găsită de autor. În [18], [187], matricea K şi, implicit, N – ecuaţia (1.254), se determină impunând valori proprii dorite pentru matricea $PA - KC$. Acest lucru nu se poate face tot timpul şi pot exista cazuri când este greu sau chiar imposibil de determinat matricea K. Acest neajuns este complet eliminat în cadrul algoritmului propus de autor (algoritmul O'Reilly îmbunătăţit). Un alt dezavantaj al algoritmului din [18], [187] este acela că observerul (1.257) există dacă şi numai dacă sunt îndeplinite simultan condiţiile:

1) $\mathrm{rang}(CD) = \mathrm{rang}(D) = s$;

2) $\mathrm{rang}\begin{bmatrix} \mathbf{s}P - PA \\ C \end{bmatrix} = n , (\forall)\mathbf{s} \in \mathrm{C}, \mathrm{Re}\{\mathbf{s}\} \geq 0$.

Dacă este îndeplinită condiţia 1) şi, în plus, $\text{rang}(P) = n - s$, următoarele 3 condiţii sunt echivalente [18], [187]

1) perechea (PA, C) este observabilă sau cel puţin detectabilă;

2) $\text{rang}\begin{bmatrix} \mathbf{s}P - PA \\ C \end{bmatrix} = n, (\forall)\mathbf{s} \in \mathrm{C}, \mathrm{Re}\{\mathbf{s}\} \geq 0$;

3) $\text{rang}\begin{bmatrix} \mathbf{s}I_n - A & D \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + s, (\forall)\mathbf{s} \in \mathrm{C}, \mathrm{Re}\{\mathbf{s}\} \geq 0$.

Algoritmul O'Reilly îmbunătăţit are avantajul unui număr mai mic de constrângeri. Cu alte cuvinte, condiţiile necesare sunt:

$$m \geq s, \text{rang}(D) = \text{rang}(CD) = s, \text{rang}(C) = m, (C, A) - \text{pereche observabila} \qquad (1.270)$$

Algoritmul O'Reilly îmbunătăţit

Pasul 1: Se verifică dacă sunt îndeplinite simultan condiţiile (1.270).

Pasul 2: Se calculează matricea E cu ecuaţia (1.250) şi apoi matricea P – ecuaţia (1.248).

Pasul 3: Se calculează matricea G utilizând ecuaţia (1.252).

Pasul 4: Se partiţionează matricele N, P, L, C, A conform ecuaţiilor (1.258) şi (1.259).

Pasul 5: Se aleg aleatoriu matricele N_1, N_3 şi apoi, utilizând ecuaţia (1.261), se calculează $\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2, \widetilde{A}_3, \widetilde{A}_4$.

Pasul 6: Se rezolvă sistemele de ecuaţii (1.262) şi (1.263) şi se obţin matricele L_1, L_2, N_2, N_4 – ecuaţiile (1.265), (1.268), (1.267) şi (1.269).

Pasul 7: Se construiesc matricele N şi L – ecuaţia (1.258) şi se verifică dacă N – matrice stabilă. În cazul în care matricea N nu are valorile proprii în semiplanul stâng complex, se reiau paşii 5, 6 şi 7 cu alte matrice alese aleator N_1 şi N_3 până când se obţine o matrice N stabilă.

Pasul 8: Se proiectează observerul descris de ecuaţiile (1.246).

În cele ce urmează, se validează algoritmul de mai sus pentru două cazuri concrete ale mişcărilor longitudinală, respectiv laterală ale aeronavelor.

Se consideră mişcarea longitudinală a unei aeronave descrisă de ecuaţiile de stare (1.47). Parcurgând pas cu pas algoritmul O'Reilly îmbunătăţit se obţin matricele

$$E=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\\ 0 & 0\\ 0 & -312.5\end{bmatrix};P=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -312.5 & 0 & 1\end{bmatrix};G=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix};L=\begin{bmatrix}8 & 0\\ 0 & 0\\ -1 & 313\\ 42 & -97796\end{bmatrix};N=\begin{bmatrix}-8.417 & -1.097 & -9.81 & 0\\ -0.138 & -11.228 & 0 & 0\\ 0.514 & 2.83 & 0 & 1\\ -2.112 & -1.61 & 0 & -313.49\end{bmatrix};$$

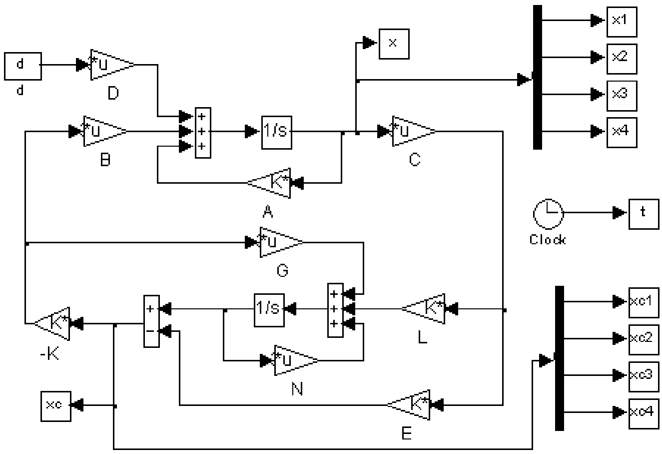

Fig. 1.22. Modelul Matlab/Simulink al observerului O'Reilly îmbunătăţit

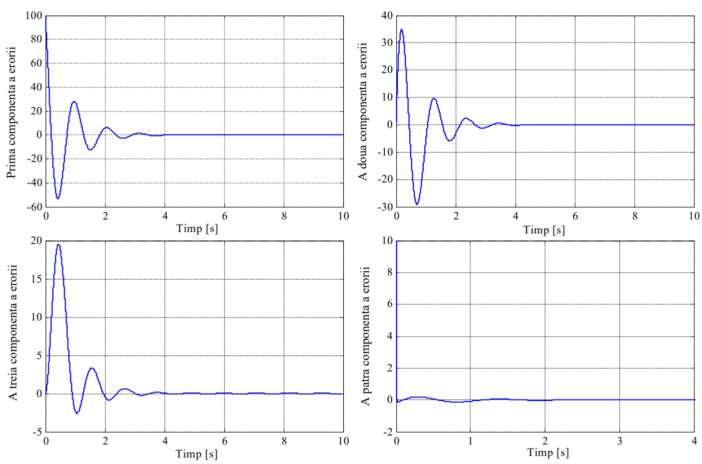

Fig. 1.23. Erorile de estimare a stării estimatorului O'Reilly îmbunătăţit $(K = 0)$

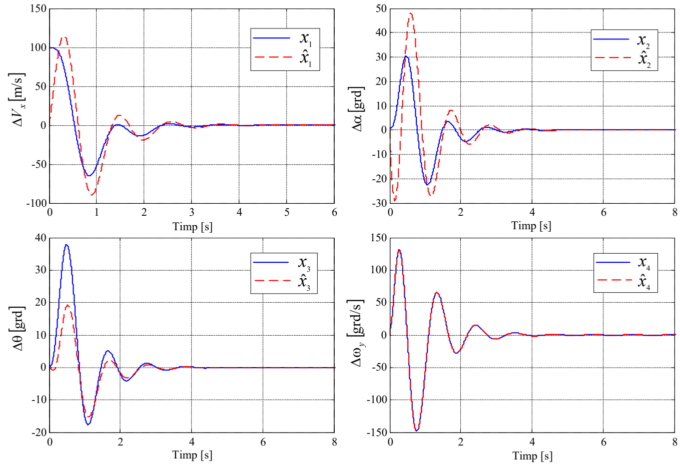

Fig. 1.24. Variabilele de stare $x_i(t)$ şi $\hat{x}_i(t)$ - mişcarea longitudinală $(\mathrm{K} \neq 0)$

Programul Matlab din anexa A1.5 reprezintă implementarea software a procedurii de construcţie a estimatorului de stare O'Reilly îmbunătăţit. Modelul Matlab/Simulink din fig. 1.22 este utilizat în cadrul programului din anexă pentru obţinerea caracteristicilor de timp din fig. 1.23 (erorile de estimare a variabilelor de stare cu estimatorul de stare O'Reilly îmbunătăţit pentru $u = 0$) şi caracteristicile de timp din fig. 1.24 pentru legea de comandă $u = -\mathrm{K}\hat{x}$ (K calculată cu algoritmul ALGLX [157]); aceste caracteristici exprimă variabilele de stare $x_i(t)$ – cu linie continuă şi $\hat{x}_i(t)$ – cu linie întreruptă.

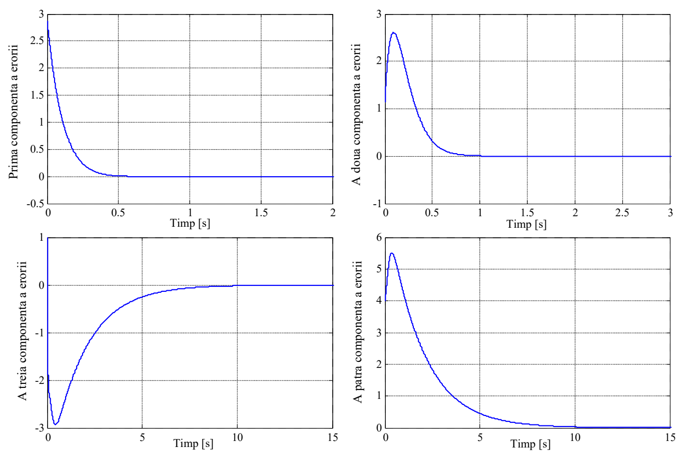

Fig. 1.25. Erorile de estimare a stării estimatorului O'Reilly îmbunătăţit (K=0)

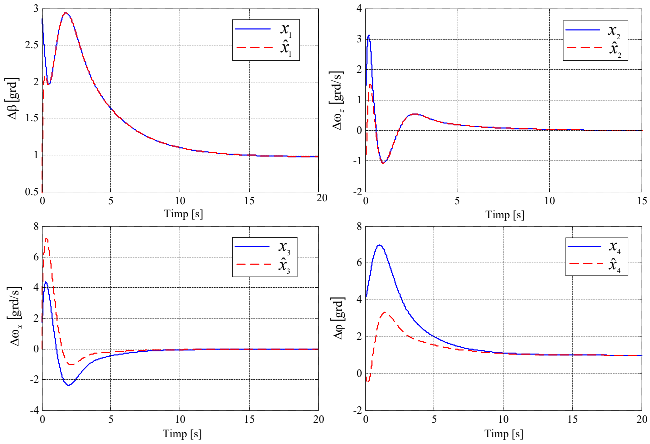

Fig. 1.26. Variabilele de stare $x_i(t)$ şi $\hat{x}_i(t)$ - mişcarea laterală $(\mathrm{K} \neq 0)$

Se implementează software observerul O'Reilly îmbunătăţit şi pentru cazul mişcării laterale (1.49). Erorile de estimare a variabilelor de stare sunt prezentate în fig. 1.25 (pentru K=0), iar variabilele de stare $x_i(t)$ şi $\hat{x}_i(t)$ pentru K calculat cu algoritmul ALGLX [157] sunt prezentate în fig. 1.26. Programul Matlab utilizat este similar celui din anexa A1.5, iar modelul Matlab/Simulink este identic cu cel din fig. 1.22.

În acest caz, în urma simulării, se obţin matricele

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -583.29 & -8.64 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -583.29 & -8.64 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; G = 10^{-13} \cdot \begin{bmatrix} 0.0004 & 0 \\ -0.002 & 0 \\ 0.217 & 0.011 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$L = 10^4 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -2.73 & 0.017 \\ 0.058 & 0.0009 \end{bmatrix}; N = \begin{bmatrix} -6.436 & -10.09 & 0 & 0 \\ 3.803 & -0.195 & 0 & 0 \\ -0.48 & -3.178 & -46.97 & -25.75 \\ 0.000 & 10.95 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1.6.2.2. Proiectarea observerelor cu ordin redus fără reconstrucţia intrărilor necunoscute

În cadrul acestei metode vectorul de stare este împărţit în două părţi: prima parte include stările măsurabile (p), iar cea de-a doua include stările nemăsurate $(n-p)$. Deoarece C are rang de linie maxim, o transformare de coordonate poate fi găsită astfel încât C să aibă forma $C = \lfloor I_p \ \ 0 \rfloor$ [18]; I_p este matricea unitate de ordinul p. Sistemul de ecuaţii (1.1), în noile coordonate, se scrie [18]

$$\begin{bmatrix} \dot{y}(t) \\ \dot{w}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ w(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} d(t), \tag{1.271}$$

în care $w \in \mathcal{M}^{(n-p)\times 1}$ este vectorul părţii nemăsurabile. Cum perechea (C, A) este observabilă, rezultă că perechea (A_{12}, A_{22}) este şi ea observabilă şi un observer de ordinul (n-p) se construieşte. Acesta este descris de ecuaţia [71]

$$\dot{z}(t) = Fz(t) + Gy(t) + Hu(t) + Jd(t), \tag{1.272}$$

în care

$$F = A_{22} - LA_{12} \, , G = FL + A_{21} - LA_{11} \, , H = B_2 - LB_1 \, , J = D_2 - LD_1 \, . \tag{1.273}$$

În cazul standard în care $d(t)$ este disponibil pentru măsurători, matricea $L \in \mathcal{M}^{(n-p)\times p}$ se alege astfel încât F să aibă valorile proprii dorite în semiplanul stâng complex. După rezolvarea ecuaţiei matriceale (1.272), estimarea vectorului $w(t)$, adică $\hat{w}(t)$, se face astfel [18]

$$\hat{w}(t) = z(t) + Ly(t). \tag{1.274}$$

În acest caz, $d(t)$ nu este disponibil măsurătorilor; observerul poate fi implementat dacă şi numai dacă există o matrice L care să îndeplinească simultan condiţiile

$$J = D_2 - LD_1 = 0 \, , F = A_{22} - LA_{11} \text{ este matrice stabila} \, . \tag{1.275}$$

Calculul matricei L este posibilă dacă $\text{rang}(CD) = \text{rang}(D) = m$; $p \geq m$. În acest caz [18],

$$L = D_2 D_1^+ + \overline{K}(I_p - D_1 D_1^+), \tag{1.276}$$

unde $\overline{K}$ este matrice aleasă aleator de ordinul $(n-p)\times p$ şi D_1 – matrice cu rang de coloană maxim. Deoarece $\overline{K}$ – matrice aleasă aleatoriu, nu este posibilă, în general, fixarea (alegerea) valorilor proprii pentru matricea F şi, de aceea, se face o modificare a matricei prin intermediul unei matrice ortogonale $S \in \mathcal{M}^{n\times n}$ astfel încât [70]

$$SD_1 = \begin{bmatrix} \overline{D}_1 \\ 0 \end{bmatrix} SA_{12} = \begin{bmatrix} \overline{A}_{12}^1 \\ \overline{A}_{12}^2 \end{bmatrix} KS^T = \begin{bmatrix} \overline{K}_1 & \overline{K}_2 \end{bmatrix}, \tag{1.277}$$

unde $D_1 \in \mathcal{M}^{m\times n}$ – matrice nesingulară, $\overline{A}_{12}^1$ are m linii, $\overline{K}_1$ are m coloane. Conform [84], matricea F se obţine astfel

$$F = F_1 - \overline{K}_2 \overline{A}_{12}^2 , \tag{1.278}$$

cu

$$F_1 = A_{22} - D_2 \left(\overline{D}_1\right)^{-1} \overline{A}_{12}^1 ; \tag{1.279}$$

$\overline{K}_2$ – matrice aleasă arbitrar.

1.6.2.3. Proiectarea observerelor cu ordin redus cu reconstrucţia intrărilor necunoscute

Şi în acest caz, vectorul de stare se împarte în două părţi [19]: o parte asociată intrărilor necunoscute şi o altă parte ce depinde de intrările cunoscute ale sistemului în cauză. Sistemul (1.1) este echivalent cu [18]

$$\begin{cases} \dot{\overline{x}} = \overline{A}\overline{x} + \overline{B}u + \overline{D}d , \\ y = \overline{C}\overline{x} , \end{cases} \tag{1.280}$$

unde $T = \begin{bmatrix} N & D \end{bmatrix}$ – matrice nesingulară cu $N \in \mathcal{M}^{n\times(n-m)}$,

$$x = T\overline{x} = T\begin{bmatrix} \overline{x}_1^T & \overline{x}_2^T \end{bmatrix}^T , \tag{1.281}$$

$\overline{x}_1 \in \mathcal{M}^{(n-m)\times 1}, \overline{x}_2 \in \mathcal{M}^{m\times 1}$ şi

$$\begin{aligned} &\overline{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \overline{A}_{11} & \overline{A}_{12} \\ \overline{A}_{21} & \overline{A}_{22} \end{bmatrix}, \overline{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} \overline{B}_1 \\ \overline{B}_2 \end{bmatrix}, \\ &\overline{D} = T^{-1}D = \begin{bmatrix} 0 \\ I_m \end{bmatrix}, \overline{C} = CT = \begin{bmatrix} CN & CD \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{C}_1 & \overline{C}_2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{1.282}$$

Sistemul de ecuaţii (1.280) este echivalent cu

$$\begin{cases} \dot{\overline{x}}_1 = \overline{A}_{11}\overline{x}_1 + \overline{A}_{12}\overline{x}_2 + \overline{B}_1 u \,, \\ \dot{\overline{x}}_2 = \overline{A}_{21}\overline{x}_1 + \overline{A}_{22}\overline{x}_2 + \overline{B}_2 u + I_m d \,, \\ y = \overline{C}_1\overline{x}_1 + \overline{C}_2\overline{x}_2 \,. \end{cases} \tag{1.283}$$

$\overline{x}_2$ depinde de intrarea necunoscută $d(t)$, în timp ce $\overline{x}_1$ nu depinde de aceasta; este, deci, mai convenabil să estimăm $\overline{x}_1$ în loc să estimăm $\overline{x}_2$; sistemul de ecuaţii devine

$$\begin{cases} \dot{\overline{x}}_1 = \overline{A}_{11}\overline{x}_1 + \overline{A}_{12}\overline{x}_2 + \overline{B}_1 u \,, \\ y = \overline{C}_1\overline{x}_1 + \overline{C}_2\overline{x}_2 \,. \end{cases} \tag{1.284}$$

În continuare, se presupune că există o matrice nesingulară

$$U = [CD \;\; Q]; \tag{1.285}$$

$Q \in \mathcal{M}^{p\times(p-m)}$. U^{-1} se partiţionează după cum urmează [18]:

$$U^{-1} = \left[U_1^T \;\; U_2^T\right]^T, \tag{1.286}$$

cu $U_1 \in \mathcal{M}^{m\times p}, U_2 \in \mathcal{M}^{(p-m)\times p}$. U şi U^{-1} trebuie să îndeplinească condiţia

$$U^{-1}U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}[CD \;\; Q] = \begin{bmatrix} U_1 CD & U_1 Q \\ U_2 CD & U_2 Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_{p-m} \end{bmatrix}. \tag{1.287}$$

Înmulţind la stânga cu U^{-1}, membru cu membru, a doua ecuaţie (1.284) se obţine

$$\begin{cases} U_1 y = U_1\overline{C}_1\overline{x}_1 + U_1\overline{C}_2\overline{x}_2 \,, \\ U_2 y = U_2\overline{C}_1\overline{x}_1 + U_2\overline{C}_2\overline{x}_2 \,, \end{cases} \tag{1.288}$$

sau, ţinând cont de (1.287), adică

$$\begin{cases} U_1\overline{C}_2 = U_1 CD = I_m, \\ U_2\overline{C}_2 = U_2 CD = 0, \end{cases} \tag{1.289}$$

rezultă [18]

$$U_1 y = U_1 CN\overline{x}_1 + \overline{x}_2, U_2 y = U_2 CN\overline{x}_1. \tag{1.290}$$

Din prima ecuaţie (1.290) rezultă

$$\bar{x}_2 = U_1 y - U_1 CN\bar{x}_1 \,. \tag{1.291}$$

Aşadar, determinarea lui $\bar{x}_2$ se face după ce se determină $\bar{x}_1$. Înlocuind $\bar{x}_2$ cu foma (1.291) în sistemul de ecuaţii (1.284), rezultă [18]

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = \bar{A}_{11}\bar{x}_1 + \bar{A}_{12}\left(U_1 y - U_1 CN\bar{x}_1\right) + \bar{B}_1 u \,, \\ y = \bar{C}_1\bar{x}_1 + \bar{C}_2\left(U_1 y - U_1 CN\bar{x}_1\right) \end{cases} \tag{1.292}$$

sau

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = \left(\bar{A}_{11} - \bar{A}_{12}U_1 CN\right)\bar{x}_1 + \bar{B}_1 u + \bar{A}_{12}U_1 y, \\ y = \bar{C}_1\bar{x}_1 + \bar{C}_2 U_1 y - \bar{C}_2 U_1 CN\bar{x}_1 \,, \end{cases} \tag{1.293}$$

echivalentă cu

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = \tilde{A}_1\bar{x}_1 + \bar{B}_1 u + E_1 y, \\ \bar{y} = \tilde{C}_1\bar{x}_1 \,, \end{cases} \tag{1.294}$$

unde

$$\tilde{A}_1 = \bar{A}_{11} - \bar{A}_{12}U_1 CN \,, E_1 = \bar{A}_{12}U_1 \,, \tilde{C}_1 = U_2 CN \,, \bar{y} = U_2 y \,. \tag{1.295}$$

În obţinerea celei de-a doua ecuaţii (1.294) s-a folosit a doua ecuaţie (1.293), înmulţită la stânga cu U_2, precum şi ecuaţiile (1.289). Astfel,

$$U_2 y = U_2\bar{C}_1\bar{x}_1 + \underbrace{U_2\bar{C}_2}_{=0}U_1 y - U_2\bar{C}_2 U_1 CN\bar{x}_1 \Leftrightarrow U_2 y = \underbrace{U_2\bar{C}_1}_{U_2 CN}\bar{x}_1 \Leftrightarrow \bar{y} = \tilde{C}_1\bar{x}_1 \,. \tag{1.296}$$

Sistemul pentru care se doreşte construcţia unui observer de stare cu ordin redus este sistemul (1.294). Construcţia observerului este posibilă dacă perechea $\left(\tilde{A}_1, \tilde{C}_1\right)$ este observabilă [18]. Din a doua ecuaţie (1.294) rezultă $y = CN\bar{x}_1$, care, înlocuită în prima ecuaţie (1.294), conduce la ecuaţia observerului cu ordin redus

$$\dot{\hat{\bar{x}}}_1 = \left(\tilde{A}_1 - L\tilde{C}_1\right)\hat{\bar{x}}_1 + \bar{B}_1 u + \tilde{L}y \,, \tag{1.297}$$

în care

$$\widetilde{L} = LU_2 + E_1; \tag{1.298}$$

matricea L se calculează impunând valori proprii dorite pentru matricea $\left(\widetilde{A}_1 - L\widetilde{C}_1\right)$.

Ecuaţia matriceală diferenţială (1.297) are ca soluţie vectorul $\hat{\bar{x}}_1$ şi apoi, cu ecuaţia (1.291), se calculează

$$\hat{\bar{x}}_2 = U_1 y - U_1 CN\hat{\bar{x}}_1 . \tag{1.299}$$

Vectorul de stare estimat $\hat{\bar{x}}$ se află prin concatenarea vectorilor $\hat{\bar{x}}_1$ şi $\hat{\bar{x}}_2$, iar vectorul de stare $\hat{x}$ se determină astfel [18]:

$$\hat{x} = T\hat{\bar{x}} = T\begin{bmatrix}\hat{\bar{x}}_1^T & \hat{\bar{x}}_2^T\end{bmatrix}^T; \tag{1.300}$$

vectorul aproximat al intrărilor necunoscute $(d(t))$ se determină din ecuaţia (1.283)

$$\hat{d} = \dot{\hat{\bar{x}}}_2 - \overline{A}_{21}\hat{\bar{x}}_1 - \overline{A}_{22}\hat{\bar{x}}_2 - \overline{B}_2 u . \tag{1.301}$$

În ecuaţia (1.301) $\hat{\bar{x}}_2$ se înlocuieşte cu forma din ecuaţia (1.299), iar $\dot{\hat{\bar{x}}}_2$ se înlocuieşte cu

$$\dot{\hat{\bar{x}}}_2 = U_1\dot{y} - U_1CN\dot{\hat{\bar{x}}}_1 = U_1\dot{y} - U_1CN\left[\left(\widetilde{A}_1 - L\widetilde{C}_1\right)\hat{\bar{x}}_1 + \overline{B}_1 u + \widetilde{L}y\right]. \tag{1.302}$$

După efectuarea tuturor calculelor se obţine [18]

$$\hat{d} = U_1\dot{y} + G_1\hat{\bar{x}}_1 + G_2 y + G_3 u , \tag{1.303}$$

unde

$$\begin{aligned} G_1 &= U_1CNLU_2CN + U_1CN\overline{A}_{12}U_1CN - U_1CN\overline{A}_{11} - \overline{A}_{21} + \overline{A}_{22}U_1CN , \\ G_2 &= -U_1CNLU_2 - U_1CN\overline{A}_{12}U_1 - \overline{A}_{22}U_1 , G_3 = -U_1CN\overline{B}_1 - \overline{B}_2 . \end{aligned} \tag{1.304}$$

Observerul cu ordin redus se poate construi dacă sunt îndeplinite simultan condiţiile

$$\mathrm{rang}(CD) = \mathrm{rang}(D); \mathrm{rang}\begin{bmatrix} \mathbf{s}I_n - \overline{A}_{11} & -\overline{A}_{12} \\ CN & CD \end{bmatrix} = n , (\forall)\mathbf{s} \in \mathrm{C}, \mathrm{Re}\{\mathbf{s}\} \geq 0 . \tag{1.305}$$

A doua condiţie (1.305) este echivalentă cu observabilitatea perechii $\left(\widetilde{A}_1, \widetilde{C}_1\right)$ [84].

Algoritmul Boubaker

Pasul 1: Se alege o matrice $N \in \mathcal{M}^{n\times(n-m)}$ astfel încât matricea $T = [N\ D]$ să fie inversabilă. Se verifică condiţia necesară $\text{rang}(CD) = \text{rang}(D)$.

Pasul 2: Se calculează matricele $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}$ cu ecuaţia (1.282) şi apoi se partiţionează aceste matrice; rezultă $\overline{A}_{11}, \overline{A}_{12}, \overline{A}_{21}, \overline{A}_{22}, \overline{B}_1, \overline{B}_2, \overline{C}_1, \overline{C}_2$.

Pasul 3: Se alege arbitrar o matrice $Q \in \mathcal{M}^{p\times(p-m)}$ şi se formează matricea $U = [CD\ Q]$ care trebuie să fie inversabilă, cu inversa $U^{-1} = \left[U_1^T\ U_2^T\right]^T$ ce îndeplineşte condiţia (1.287); rezultă matricele U_1 şi U_2 .

Pasul 4: Se calculează $\widetilde{A}_1, E_1, \widetilde{C}_1$ cu ecuaţia (1.295).

Pasul 5: Se verifică dacă perechea $\left(\widetilde{A}_1, \widetilde{C}_1\right)$ este observabilă. În caz contrar observerul de stare cu ordin redus nu se poate construi.

Pasul 6: În cazul în care $\left(\widetilde{A}_1, \widetilde{C}_1\right)$ este observabilă, se construieşte observerul de stare cu ordin redus (1.297), în care L se calculează impunând valori proprii în semiplanul stâng complex pentru matricea $\widetilde{A}_1 - L\widetilde{C}_1$, iar $\widetilde{L}$ se calculează cu ecuaţia (1.298).

Pasul 7: Se determină $\hat{\bar{x}}_1$ şi apoi $\hat{\bar{x}}_2$ cu ecuaţia (1.299). Estimarea vectorului intrărilor necunoscute $\left(\hat{d}\right)$ se face cu ecuaţia (1.303); *u* şi *y* se cunosc. Matricele G_1, G_2 şi G_3 din ecuaţia (1.303) au fost calculate, în prealabil, cu ajutorul relaţiilor (1.304).

Pasul 8: Vectorul de stare estimat $\hat{x}$ se determină cu (1.300) în funcţie de $\hat{\bar{x}}_1$ şi $\hat{\bar{x}}_2$.

Un alt observer pentru estimarea stării şi, în acelaşi timp, a intrărilor necunoscute (algoritm conceput de autorul lucrării) este prezentat în continuare. Proiectarea observerului presupune combinarea algoritmului Boubaker [18] şi a algoritmului Hou & Muller [84]. Şi de această dată, vectorul de stare se împarte în două [19]: o parte asociată intrărilor necunoscute şi o alta ce depinde de intrările necunoscute.

Se consideră mişcarea aeronavei descrisă de ecuaţiile de stare-ieşire (1.245) în care $x \in \mathcal{M}^{n\times 1}, u \in \mathcal{M}^{p\times 1}, d \in \mathcal{M}^{s\times 1}, y \in \mathcal{M}^{m\times 1}; A \in \mathcal{M}^{n\times n}, B \in \mathcal{M}^{n\times p}, C \in \mathcal{M}^{m\times n}, D \in \mathcal{M}^{n\times s}$. Se alege o matrice $N \in \mathcal{M}^{n\times(n-s)}$, astfel încât matricea $T = [N \ D]$ să fie nesingulară. Se face schimbarea de coordonate (1.281) cu $\bar{x}_1 \in \mathcal{M}^{m\times 1}, \bar{x}_2 \in \mathcal{M}^{(n-m)\times 1}$. Sistemul ecuaţiilor de stare devine de forma (1.280), în care [18]

$$\overline{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \overline{A}_{11} & \overline{A}_{12} \\ \overline{A}_{21} & \overline{A}_{22} \end{bmatrix}, \overline{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} \overline{B}_1 \\ \overline{B}_2 \end{bmatrix}, \overline{D} = T^{-1}D = \begin{bmatrix} 0 \\ I_s \end{bmatrix}, \overline{C} = CT = \begin{bmatrix} \overline{C}_1 & \overline{C}_2 \end{bmatrix}; \quad (1.306)$$

$\overline{A}_{11} \in \mathcal{M}^{m\times m}, \overline{A}_{12} \in \mathcal{M}^{m\times(n-m)}, \overline{A}_{21} \in \mathcal{M}^{(n-m)\times m}, \overline{A}_{22} \in \mathcal{M}^{(n-m)\times(n-m)}, \overline{B}_1 \in \mathcal{M}^{m\times p}, \overline{B}_2 \in \mathcal{M}^{(n-m)\times p}$, $\overline{C}_1 \in \mathcal{M}^{m\times m}, \overline{C}_2 \in \mathcal{M}^{m\times(n-m)}$. Aşadar, dinamica sistemului devine

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = \overline{A}_{11}\bar{x}_1 + \overline{A}_{12}\bar{x}_2 + \overline{B}_1 u, \\ \dot{\bar{x}}_2 = \overline{A}_{21}\bar{x}_1 + \overline{A}_{22}\bar{x}_2 + \overline{B}_2 u + I_m d, \\ y = \overline{C}_1\bar{x}_1 + \overline{C}_2\bar{x}_2. \end{cases} \quad (1.307)$$

Algoritmul funcţionează în continuare dacă matricea $\overline{C}_2$ are rang de coloană maxim. În acest caz, această matrice se scrie [84], [168]

$$\overline{C}_2 = H_2 \begin{bmatrix} R_2 \\ 0 \end{bmatrix} K_2^T, \quad (1.308)$$

unde $H_2 \in \mathcal{M}^{m\times n}, R_2 \in \mathcal{M}^{(n-m)\times(n-m)}, K_2 \in \mathcal{M}^{(n-m)\times(n-m)}$; întrucât matricea nulă din ecuaţia (1.308) este $0_{m\times(n-m)}$, rezultă o condiţie necesară pentru construirea observerului

$$n - m > 0 \Leftrightarrow n > m. \quad (1.309)$$

În ecuaţia (1.308), matricea H_2 este matrice ortogonală $\left(H_2 H_2^T = I_m\right)$, iar matricea R_2 trebuie să fie nesingulară.

În continuare, se partiţionează matricea H_2 astfel [84], [168]:

$$H_2 = [H_{21} \ H_{22}]; \quad (1.310)$$

$H_{21} \in \mathcal{M}^{m\times(n-m)}, H_{22} \in \mathcal{M}^{m\times m}$. Dacă se face notaţia [84]

$$\bar{y} = H_2^T y = \begin{bmatrix} H_{21}^T \\ H_{22}^T \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{bmatrix}, \tag{1.311}$$

a treia ecuaţie (1.307) devine

$$y = \overline{C}_1 \bar{x}_1 + H_2 \begin{bmatrix} R_2 \\ 0 \end{bmatrix} K_2^T \bar{x}_2 . \tag{1.312}$$

Se înmulţeşte această ultimă ecuaţie la stânga cu H_2^T şi rezultă

$$H_2^T y = H_2^T \overline{C}_1 \bar{x}_1 + \underbrace{H_2^T H_2}_{I_m} \begin{bmatrix} R_2 \\ 0 \end{bmatrix} K_2^T \bar{x}_2 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} H_{21}^T \\ H_{22}^T \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} H_{21}^T \\ H_{22}^T \end{bmatrix} \overline{C}_1 \bar{x}_1 + \begin{bmatrix} R_2 \\ 0 \end{bmatrix} K_2^T \bar{x}_2 \tag{1.313}$$

echivalentă cu

$$\begin{cases} \bar{y}_1 = H_{21}^T \overline{C}_1 \bar{x}_1 + R_2 K_2^T \bar{x}_2, \\ \bar{y}_2 = C_1 \bar{x}_1 , \end{cases} \tag{1.314}$$

unde

$$C_1 = H_{22}^T \overline{C}_1 . \tag{1.315}$$

Ţinând cont de expresia

$$\bar{y}_1 = \begin{bmatrix} I_{n-m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{y}_1^T & \bar{y}_2^T \end{bmatrix}^T \Leftrightarrow \bar{y}_1 = G^T \bar{y} , \tag{1.316}$$

din prima ecuaţie (1.314) se scrie [84]

$$\bar{x}_2 = \left(R_2 K_2^T\right)^{-1} \left[\bar{y}_1 - H_{21}^T \overline{C}_1 \bar{x}_1\right] = \left(R_2 K_2^T\right)^{-1} \left[G^T \underbrace{H_2^T y}_{\bar{y}} - H_{21}^T \overline{C}_1 \bar{x}_1 \right] \tag{1.317}$$

echivalentă cu

$$\bar{x}_2 = K_2 R_2^{-1} G^T H_2^T \left[y - \overline{C}_1 \bar{x}_1\right]; \tag{1.318}$$

în ecuaţia de mai sus s-a ţinut cont de

$$\left(R_2 K_2^T\right)^{-1} = K_2 R_2^{-1}, \tag{1.319}$$

întrucât K_2 este matrice ortogonală, dar şi de relaţia

$$G^T H_2^T = \begin{bmatrix} I_{n-m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{21}^T \\ H_{22}^T \end{bmatrix} = H_{21}^T . \tag{1.320}$$

În continuare, se introduce $\overline{x}_2$ cu forma (1.318) în prima ecuaţie (1.307) şi rezultă [84]

$$\dot{\overline{x}}_1 = \left(\overline{A}_{11} - \overline{A}_{12} K_2 R_2^{-1} G^T H_2^T \overline{C}_1\right)\overline{x}_1 + \overline{B}_1 u + \overline{A}_{12} K_2 R_2^{-1} G^T H_2^T y \tag{1.321}$$

sau

$$\dot{\overline{x}}_1 = \widetilde{A}_1 \, \overline{x}_1 + \widetilde{B}_1 u + \widetilde{E}_1 y, \tag{1.322}$$

în care

$$\widetilde{A}_1 = \overline{A}_{11} - \overline{A}_{12} K_2 R_2^{-1} G^T H_2^T \overline{C}_1 , \widetilde{B}_1 = \overline{B}_1 , \widetilde{E}_1 = \overline{A}_{12} K_2 R_2^{-1} G^T H_2^T . \tag{1.323}$$

Pentru estimarea vectorului $\overline{x}_1$ se construieşte un observer de tip Luenberger bazat pe ecuaţia (1.321). Acest observer poate fi construit dacă şi numai dacă perechea $\left(\widetilde{A}_1 , C_1\right)$ este observabilă [84], [168]; ecuaţia asociată observerului este

$$\dot{\hat{\overline{x}}}_1 = \left(\widetilde{A}_1 - LC_1\right)\hat{\overline{x}}_1 + \left(LH_{22}^T + \widetilde{E}_1\right)y + \widetilde{B}_1 u . \tag{1.324}$$

În proiectarea observerului s-a avut în vedere faptul că $LC_1\overline{x}_1 = L\overline{y}_2 = LH_{22}^T y$; matricea L se alege astfel încât matricea $\widetilde{A}_1 - LC_1$ să fie stabilă. Din ecuaţia (1.324) se determină $\hat{\overline{x}}_1$ şi apoi, cu ecuaţia (1.318), rezultă

$$\hat{\overline{x}}_2 = K_2 R_2^{-1} G^T H_2^T \left(y - \overline{C}_1 \hat{\overline{x}}_1\right); \tag{1.325}$$

vectorul intrărilor necunoscute d se obţine din ecuaţia (1.307) astfel:

$$\hat{d} = \dot{\hat{\overline{x}}}_2 - \overline{A}_{21}\hat{\overline{x}}_1 - \overline{A}_{22}\hat{\overline{x}}_2 - \overline{B}_2 u , \tag{1.326}$$

în care $\dot{\hat{\overline{x}}}_2$ are forma

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\overline{x}}}_2 &= K_2 R_2^{-1} G^T H_2^T \left(\dot{y} - \overline{C}_1 \dot{\hat{\overline{x}}}_1 \right) \overset{(1.324)}{=} K_2 R_2^{-1} G^T H_2^T \dot{y} - \\ &- K_2 R_2^{-1} G^T H_2^T \left[\overline{C}_1\left(\widetilde{A}_1 - LC_1\right)\hat{\overline{x}}_1 + \overline{C}_1\left(LH_{22}^T + \widetilde{E}_1\right)y + \overline{C}_1 \widetilde{B}_1 u\right]. \end{aligned} \tag{1.327}$$

Din ecuaţiile (1.326) şi (1.327) rezultă una dintre formele

$$\begin{aligned}\hat{d} &= K_2R_2^{-1}G^TH_2^T\dot{y} - \left[K_2R_2G^TH_2^T\overline{C}_1\left(LH_{22}^T + \widetilde{E}_1\right) + \overline{A}_{22}K_2R_2^{-1}G^TH_2^T\right]y - \\ &- \left[K_2R_2^{-1}G^TH_2^T\overline{C}_1\left(\widetilde{A}_1 - LC_1\right) + \overline{A}_{21} - \overline{A}_{22}K_2R_2^{-1}G^TH_2^T\overline{C}_1\right]\hat{\hat{x}}_1 - \left(K_2R_2^{-1}G^TH_2^T\overline{C}_1\widetilde{B}_1 + \overline{B}_2\right)u\end{aligned} \tag{1.328}$$

$$\hat{d} = U_1\dot{y} - U_2y - U_3\hat{\hat{x}}_1 - U_4\,u\,, \tag{1.329}$$

unde

$$\begin{aligned}U_1 &= K_2R_2^{-1}G^TH_2^T\,,\\ U_2 &= K_2R_2G^TH_2^T\overline{C}_1\left(LH_{22}^T + \widetilde{E}_1\right) + \overline{A}_{22}K_2R_2^{-1}G^TH_2^T\,,\\ U_3 &= K_2R_2^{-1}G^TH_2^T\overline{C}_1\left(\widetilde{A}_1 - LC_1\right) + \overline{A}_{21} - \overline{A}_{22}K_2R_2^{-1}G^TH_2^T\overline{C}_1\,,\\ U_4 &= K_2R_2^{-1}G^TH_2^T\overline{C}_1\widetilde{B}_1 + \overline{B}_2\,.\end{aligned} \tag{1.330}$$

Observaţii

Observerul de stare prezentat anterior estimează starea sistemului $\left(\hat{\hat{x}}\right)$, dar estimează şi intrarea necunoscută a sistemului (d). Vectorul $\hat{\hat{x}}$ se află prin concatenarea vectorilor $\hat{\hat{x}}_1$ şi $\hat{\hat{x}}_2$, iar vectorul de stare estimat $\hat{x}$ se determină cu formula (1.300). Condiţiile necesare pentru construcţia observerului cu ordin redus sunt:

a) $\operatorname{rang}(CD) = \operatorname{rang}(D)$;

b) perechea $\left(\widetilde{A}_1\,, C_1\right)$ este observabilă;

c) $n>m$ (numărul stărilor sistemului este mai mare ca numărul ieşirilor);

d) matricea R_2 - nesingulară, iar matricea H_2 - ortogonală;

e) matricea $\overline{C}_2$ are rang de coloană maxim.

Condiţiile a) şi c) se îndeplinesc uşor prin alegerea convenabilă a matricei C (implicit a vectorului de ieşire y); condiţiile b), d) şi e) se îndeplinesc prin alegerea convenabilă a matricei N. Cu alte cuvinte, alegând convenabil matricea C (implicit vectorul de ieşire y) şi matricea N până când condiţiile b), d) şi e) sunt îndeplinite, toate cele 5 condiţii necesare pentru proiectarea observerului vor fi îndeplinite.

În cele ce urmează, sunt prezentaţi paşii algoritmului pentru proiectarea observerului cu ordin redus (ALGLIN) prezentat anterior.

Algoritmul ALGLIN

Pasul 1: Se verifică dacă $\operatorname{rang}(CD) = \operatorname{rang}(D)$ şi $n > m$; în caz contrar, pentru ca algoritmul să poată fi folosit, se aleg alte ieşiri ale sistemului (altă matrice C) până la satisfacerea celor două condiţii.

Pasul 2: Se alege o matrice N şi se construieşte matricea nesingulară $T = [N \ D]$.

Pasul 3: Se face schimbarea de coordonate (1.281) şi se calculează matricele $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}$; aceste matrice sunt partiţionate şi se obţin $\overline{A}_{11}, \overline{A}_{12}, \overline{A}_{21}, \overline{A}_{22}, \overline{B}_1, \overline{B}_2, \overline{C}_1, \overline{C}_2$.

Pasul 4: Se verifică dacă $\overline{C}_2$ are rang de coloană maxim; în caz contrar ne întoarcem la pasul 2 şi se reiau paşii 2-4 până la satisfacerea acestei condiţii. În cazul în care $\overline{C}_2$ are rang de coloană maxim, această matrice se scrie sub forma (1.308); rezultă, deci, matricele H_2, R_2 şi K_2. Alegerea celor trei matrice se face până când se obţine o matrice ortogonală H_2 şi o matrice nesingulară (inversabilă) R_2.

Pasul 5: Se partiţionează matricea H_2 conform ecuaţiei (1.310), rezultând astfel matricele H_{21} şi H_{22}.

Pasul 6: Se calculează matricea C_1 utilizând ecuaţia (1.315).

Pasul 7: Se calculează matricele $\widetilde{A}_1, \widetilde{B}_1$ şi $\widetilde{E}_1$ cu ecuaţia (1.323). Se verifică dacă perechea $\left(\widetilde{A}_1, C_1\right)$ este observabilă. În caz afirmativ, se trece la pasul următor; în caz contrar, ne întoarcem la pasul 2 şi se reiau paşii 2-7 până la satisfacerea tuturor condiţiilor necesare.

Pasul 8: Se proiectează observerul de tip Luenberger descris de ecuaţia (1.324); matricea L se alege astfel încât matricea $\widetilde{A}_1 - LC_1$ să fie stabilă (se impun valori proprii dorite în semiplanul stâng complex pentru matricea $\widetilde{A}_1 - LC_1$). Estimatorul de stare cu ordin redus estimează vectorul $\overline{x}_1$, furnizând, deci, estimarea acestuia $\left(\hat{\overline{x}}_1\right)$.

Pasul 9: Se calculează $\hat{\overline{x}}_2$ în funcţie de $\hat{\overline{x}}_1$, aflat la pasul anterior, şi de ieşirea sistemului y (ecuaţia (1.325)).

Pasul 10: Se calculează matricele U_1, U_2, U_3, U_4 (ecuaţia (1.330)) şi apoi se estimează vectorul intrărilor necunoscute $\hat{d}$ utilizând relaţia (1.329).

Pasul 11: Se determină $\hat{\bar{x}}$ prin concatenarea vectorilor $\hat{\bar{x}}_1, \hat{\bar{x}}_2$ şi apoi se determină vectorul de stare estimat $\hat{x}$ – ecuaţia (1.300).

Algoritmul ALGLIN se validează pentru cazul mişcării longitudinale a unui mini-UAV [193]. Ecuaţia de stare presupune 6 variabile de stare şi 2 mărimi de comandă (bracajele profundorului şi comanda aplicată motorului prin intermediul manetei de gaze). Astfel, ecuaţia de stare asociată sistemului cu 2 intrări necunoscute este de forma (1.245) cu

$$x = \begin{bmatrix}\Delta V_x & \Delta V_z & \Delta\omega_y & \Delta\theta & \Delta H & \Delta\omega_e\end{bmatrix}^T, u = \begin{bmatrix}\delta_p & \delta_T\end{bmatrix}^T,$$
$$A = \begin{bmatrix} -0.44 & 0.59 & -0.36 & -9.79 & 0 & 0.014 \\ -0.983 & -7.8 & 15.32 & 0.48 & 0.001 & 0 \\ 0.18 & -8.31 & -35.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 136.66 & 2.962 & 0 & 0 & 0.054 & -8.501 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0.022 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.001 & 0.059 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{1.331}$$
$$B = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -106 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3894 \end{bmatrix}^T, D = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -106 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 & 0 & 3894 \end{bmatrix}^T;$$

unde V_x, V_z sunt componentele orizontală respectiv verticală ale vitezei UAV-ului, ω_y – viteza unghiulară de tangaj, θ – unghiul de tangaj, H – altitudinea de zbor, ω_e – viteza unghiulară de rotaţie a elicei aparatului de zbor, δ_p – bracajul profundorului şi δ_T - comanda aplicată motorului prin intermediul manetei de gaze.

Programul Matlab din anexa A1.6 reprezintă implementarea software a procedurii de construcţie a estimatorului de stare ALGLIN. Modelul Matlab/Simulink din fig. 1.27 este utilizat în cadrul programului din anexă pentru obţinerea caracteristicilor de timp din fig. 1.28 (erorile de estimare a variabilelor de stare cu estimatorul de stare ALGLIN pentru u=0) şi caracteristicile de timp din fig. 1.29 pentru legea de comandă $u = -\mathrm{K}\hat{x}$ (K calculată cu algoritmul ALGLX [157]); aceste caracteristici exprimă variabilele de stare $x_i(t)$ – cu linie continuă şi $\hat{x}_i(t)$ – cu linie întreruptă, $i = \overline{1,6}$.

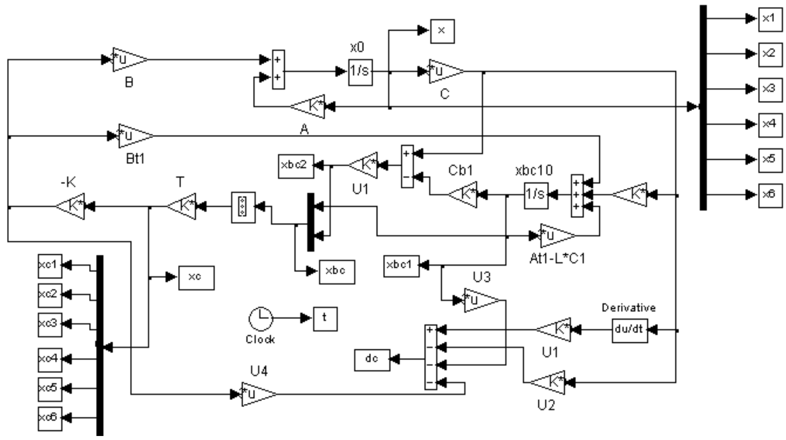

Fig. 1.27. Modelul Matlab/Simulink al observerului ALGLIN

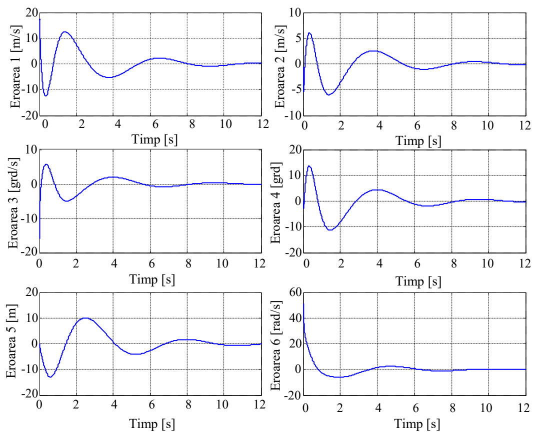

Fig. 1.28. Erorile de estimare a stării estimatorului ALGLIN $(\mathrm{K} = 0)$

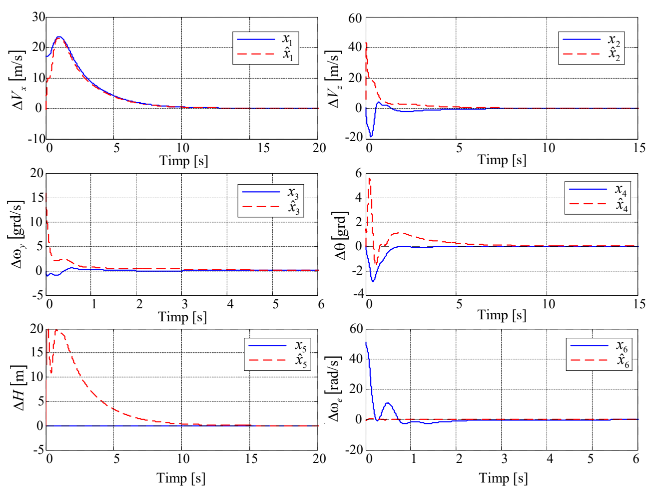

Fig. 1.29. Variabilele de stare $x_i(t)$ şi $\hat{x}_i(t)$ - mişcarea longitudinală $(\mathrm{K} \neq 0)$

Parcurgând pas cu pas algoritmul ALGLIN se obţin matricele

$$T = \begin{bmatrix} -2.2 & 0.6 & 0 & 0.7 & 0 & 0 \\ -0.1 & -0.6 & -0.3 & 0.6 & -4 & 0 \\ -1 & 0.4 & 1.1 & 0 & -106 & 0 \\ 0.6 & -1 & -1.9 & 0.7 & 0 & 100 \\ 0.5 & 0 & 0.4 & 0.6 & 0 & 0 \\ 1.7 & 0 & 0.9 & 0.3 & 0 & 3894 \end{bmatrix}, H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} -0.09 & 0 \\ -0.24 & 0 \end{bmatrix}^T, L_2 = \begin{bmatrix} -22.47 & 52.28 & 0 & 0 \\ -71.22 & 143.67 & 0 & 0 \\ 25.11 & -47.10 & 0 & 0 \\ -13.60 & 41.66 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1.7. TEHNICI DE PROIECTARE A OBSERVERELOR NELINIARE

1.7.1. CHESTIUNI GENERALE

Teoria pentru proiectarea observerelor neliniare este departe de a fi atât de dezvoltată ca cea pentru sistemele liniare. Aplicarea teoriei observerelor şi la sistemele neliniare a avut succes; ca dovadă - filtrul Kalman extins pentru sistemele neliniare. Alte observere neliniare au fost proiectate de Thau în 1973 [224], Baumann şi Rugh în 1986 [8], Krener [129], Zeitz [244] etc.

Se consideră sistemul [197]

$$\dot{x} = f(x), \; y = h(x), \tag{1.332}$$

unde $x \in R^n$ este vectorul de stare, $y \in R^p$ este vectorul de ieşire, iar f şi h – funcţii neliniare. Se poate încerca metoda de proiectare a observerelor liniare şi în cazul observerelor neliniare. Astfel, ecuaţiile asociate observerului neliniar sunt [197]

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}) + L(\hat{y} - y), \; \hat{y} = h(x), \tag{1.333}$$

unde $\hat{x} \in R^n$ este vectorul de stare estimat, $\hat{y} \in R^p$ – vectorul de ieşire estimat, iar $L \in R^{n \times p}$ este matricea de amplificare a observerului (cea care trebuie determinată).

Alegând ca eroare a observerului

$$e = \hat{x} - x, \tag{1.334}$$

se calculează $\dot{e}$ şi se obţine [197]

$$\dot{e} = \dot{\hat{x}} - \dot{x} = f(\hat{x}) - f(x) + L[h(\hat{x}) - h(x)]. \tag{1.335}$$

Dinamica erorii este neliniară; deoarece stabilitatea unui sistem liniarizat într-un punct fix implică stabilitatea sistemului neliniar corespunzător în punctul considerat, se va încerca liniarizarea dinamicii erorii în punctul fix $e = 0$ [197]

$$\begin{aligned} &\dot{e} = f(x+e) - f(x) + L\,[h(x+e) - h(x)] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \dot{e} = e\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x) + L\frac{\partial h}{\partial x}(x)\right] + O(e^2) \cong e\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x) + L\frac{\partial h}{\partial x}(x)\right], \end{aligned} \tag{1.336}$$

unde $\frac{\partial f}{\partial x}(x)$, respectiv $\frac{\partial h}{\partial x}(x)$ reprezintă matrice Jacobi.

Considerând

$$f = [f_1 \; f_2 \; \cdots \; f_m]^T, h = [h_1 \; h_2 \; \cdots \; h_q]^T, \tag{1.337}$$

matricele Jacobi (J_f şi J_h) sunt

$$J_f = \frac{\partial f}{\partial x}(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \tag{1.338}$$

respectiv,

$$J_h = \frac{\partial h}{\partial x}(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial h_q}{\partial x_1} & \frac{\partial h_q}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_q}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \tag{1.339}$$

Din păcate, derivata erorii ($\dot{e}$ – ecuaţia (1.336)) este funcţie de vectorul de stare x ce trebuie estimat şi nu este o cantitate fixă (vectorul x este un vector necunoscut). Aşadar, este nevoie de o altă metodă [197].

1.7.2. METODE BAZATE PE TEORIA LYAPUNOV

În proiectarea observerelor bazate pe teoria Lyapunov se utilizează următoarele 2 teoreme [197]:

Teorema 1

Se consideră sistemul neliniar (1.332), observerul neliniar (1.333) şi dinamica erorii (1.335); dacă există o matrice constantă $L \in R^{n \times m}$ pozitiv definită şi o matrice simetrică $P \in R^{n \times m}$ astfel încât

$$P\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x) + L\frac{\partial h}{\partial x}(x)\right] < 0, (\forall)x, \tag{1.340}$$

atunci sistemul (1.333), cu matricea L satisfăcând ecuaţia (1.340) şi cu estimarea iniţială $\hat{x}(t_0)$, este un observer exponenţial pentru sistemul (1.332) şi

$$\|\hat{x}(t) - x(t)\| \le \alpha_1 \|\hat{x}(t_0) - x(t_0)\| \cdot \exp[-\alpha_2(t - t_0)], \tag{1.341}$$

cu α_1, α_2 – constante pozitive.

Pentru demonstraţie [197], se consideră funcţia Lyapunov

$$V(e) = e^T P e \tag{1.342}$$

şi se calculează

$$\dot{V}(e) = 2e^T P \dot{e} = 2e^T P[f(\hat{x}) - f(x) + L(h(\hat{x}) - h(x))]: \tag{1.343}$$

Se consideră curba

$$c(t) = t\hat{x} + (1 - t)x, t \in [0, 1]; \tag{1.344}$$

în 0 şi 1 funcţia $c(t)$ ia valorile x, respectiv $\hat{x}$; se obţine

$$f(\hat{x}) - f(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(c(t)) \cdot c'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t\hat{x} + (1 - t)x)(\hat{x} - x)\,\mathrm{d}t. \tag{1.345}$$

Analog,

$$h(\hat{x}) - h(x) = \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial x}\left(t\hat{x} + (1-t)x\right)(\hat{x} - x)\,\mathrm{d}t\,; \tag{1.346}$$

rezultă una din formele echivalente [197]

$$\dot{V}(e) = 2e^T P \int_0^1 e^T P \left[\frac{\partial f}{\partial x}\left(t\hat{x} + (1-t)x\right)\underbrace{(\hat{x} - x)}_{e} + L\frac{\partial h}{\partial x}\left(t\hat{x} + (1-t)x\right)\underbrace{(\hat{x} - x)}_{e}\right]\mathrm{d}t \tag{1.347}$$

$$\begin{aligned}\dot{V}(e) &= 2e^T P \int_0^1 e^T P \left[\frac{\partial f}{\partial x}\left(t\hat{x} + (1-t)x\right)e + L\frac{\partial h}{\partial x}\left(t\hat{x} + (1-t)x\right)e\right]\mathrm{d}t = \\ &= 2\int_0^1 e^T \underbrace{P\left(\frac{\partial f}{\partial x} + L\frac{\partial h}{\partial x}\right)}_{<0} e\,\mathrm{d}t < 0\,.\end{aligned} \tag{1.348}$$

Aşadar, $e = 0$ este punct de stabilitate globală [197].

<u>Teorema 2</u>

Se consideră sistemul neliniar

$$\dot{x} = f(x),\, f(0) = 0\,. \tag{1.349}$$

Dacă $\frac{\partial f}{\partial x}(x) < 0\,, (\forall)x$ (adică matricea Jacobi asociată lui f şi x este negativ definită pentru orice vector de stare x) $\Rightarrow x = 0$ este punct asimptotic stabil pentru sistemul (1.349) [197]. Thau, în 1973, a construit un observer neliniar pentru estimarea stării sistemelor [8]

$$\dot{x} = Ax + f(x),\, y = Cx\,, \tag{1.350}$$

$x \in R^n, y \in R^p, f -$ funcţie continuă şi neliniară, $A \in R^{n \times n}, C \in R^{p \times n}$. Se presupune că $(C, A)-$ pereche observabilă. Acest lucru ne permite să găsim o matrice $L \in R^{n \times p}$ astfel încât valorile proprii ale matricei $A + LC$ să se afle în semiplanul stâng complex. Observerul se construieşte astfel [8], [197]:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + f(\hat{x}) + L(\hat{y} - y),\, \hat{y} = C\hat{x}\,. \tag{1.351}$$

Fie $e = \hat{x} - x$; rezultă

$$\dot{e} = A\hat{x} + f(\hat{x}) + L(\hat{y} - y) - Ax - f(x) \Leftrightarrow \dot{e} = (A + LC)e + f(x + e) - f(x). \quad (1.352)$$

Stabilitatea liniară implică stabilitate neliniară în vecinătatea punctului fix. În acest caz, punctul fix asociat ecuaţiei (1.351) este $e = 0$ [197]. Dacă f nu are termeni neliniari, alegând L astfel încât matricea $(A + LC)$ să fie stabilă, se asigură convergenţa $e \to 0$. Dar $f(x)$ este funcţie neliniară; deci, stabilitatea matricei $(A + LC)$ nu mai este suficientă. Cum $(A + LC)-$ matrice stabilă $\Rightarrow$ pentru orice matrice $Q \in R^{n\times n}$ pozitiv definită există o matrice pozitiv definită $P \in R^{n\times n}$ astfel încât [197]

$$(A + LC)^T P + P(A + LC) = -2Q. \quad (1.353)$$

Fie $V(e) = e^T Pe$. Derivata funcţiei Lyapunov $V(e)$ este

$$\dot{V}(e) = \dot{e}^T Pe + e^T P\dot{e} = -2e^T Qe + 2e^T P[f(x + e) - f(x)]. \quad (1.354)$$

Trebuie ca $\dot{V}(e) < 0$; de aceea se impune ca f să fie Lipschitz în origine, adică să existe o constantă pozitivă M astfel încât

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \le M\|x_1 - x_2\|, \quad (1.355)$$

pentru orice x_1, x_2 aflate într-o vecinătate W a originii. Dacă e se află în W, sunt valabile inegalităţile

$$\dot{V}(e) \le -2e^T Qe + 2M\|Pe\| \cdot \|e\| \le [-2\sigma_{\min}(Q) + 2M\sigma_{\max}(P)]\|e\|^2, \quad (1.356)$$

unde $\sigma_{\min}(Q)$ este valoarea singulară minimă a lui Q, iar $\sigma_{\max}(P)$ este valoarea singulară maximă a lui P [197].

Astfel, dacă

$$\sigma_{\min}(Q) / \sigma_{\max}(P) > M, \quad (1.357)$$

rezultă $e = 0$ este punct de echilibru stabil şi $\hat{x} \to x$.

Teoremele anterioare furnizează condiţii suficiente pentru un observer asimptotic stabil, dar satisfacerea teoremelor nu constituie o procedură constructivă pentru determinarea matricei L. Alegerea lui L pentru satisfacerea teoremelor este un proces dificil şi chiar imposibil pentru sisteme de ordin mare [197].

1.7.3. DIVERSE TIPURI DE OBSERVERE NELINIARE

1.7.3.1. Observere Krener & Isidori

Observerul următor a fost proiectat de către Krener & Isidori în 1983. Acesta este un observer nelinair asociat unui sistem de forma [138], [185]:

$$\dot{x} = f(x, u), \; y = h(x), \tag{1.358}$$

unde vectorul de stare, $u(t) \in R^m$ este vectorul intrărilor şi $y(t) \in R^p$ – vectorul ce conţine ieşirile sistemului. Krener & Isidori au proiectat un estimator de stare neliniar folosind transformările

$$z = \varphi(x), \; w = \gamma(y); \tag{1.359}$$

cu acestea, ecuaţiile de stare ce descriu sistemul devin [138], [185]

$$\dot{z} = Az + Bu + \alpha(y, u), \; w = Cz . \tag{1.360}$$

După liniarizarea sistemului, se proiectează observerul [185]

$$\dot{\hat{z}} = A\hat{z} + Bu + \alpha(y, u) + L(w - C\hat{z}), \tag{1.361}$$

unde $\alpha(y, u)$ – termen de „injecţie”, L – matricea de amplificare a observerului, $\hat{z}$ – estimarea vectorului z; s-a presupus că perechea (A, C) este observabilă. Dinamica erorii sistemului este

$$\dot{e} = (A - LC)e, \tag{1.362}$$

unde

$$e = \hat{z} - z. \tag{1.363}$$

1.7.3.2. Observere Kazantzis & Kravaris

Se consideră o clasă de sisteme neliniare [128]

$$\dot{x} = f(x),\ y = h(x), \tag{1.364}$$

cu $f : R^n \to R^n, y : R^n \to R^m$ – câmpuri de vectori. Originea $(x = 0)$ este punct de echilibru $(f(0) = h(0) = 0)$. Metoda va determina o transformare de stare neliniară care să transforme dinamica observerului într-una liniară. Transformarea neliniară $z = \theta(x)$ se alege astfel încât [185]

$$\dot{z} = \frac{\partial\theta}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial\theta}{\partial x}\dot{x} = Az - \beta(y). \tag{1.365}$$

Transformarea neliniară $\theta(x)$ trebuie să verifice ecuaţia [128]

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}(x)\cdot f(x) = A\theta(x) - \beta(h(x)) = Az - \beta(y). \tag{1.366}$$

Fie F – matricea Jacobi asociată câmpului $f(x)$ cu valorile proprii $k_i, i = \overline{1,n}$. Fie, de asemenea, matricea $n \times n$

$$H = \left[\frac{\partial h_1}{\partial x}(0) \cdots \frac{\partial h_m}{\partial x}(0)\right]; \tag{1.367}$$

rangul matricei $\left[H\ \ HF\ \cdots\ HF^{n-1}\right]$ este n.

Din teorema auxiliară a lui Lyapunov [185], rezultă

$$\frac{\partial w}{\partial x}\varphi(x, w) = \psi(x, w). \tag{1.368}$$

Considerând valabilă ecuaţia (1.368), se consideră cazul liniar

$$\varphi(x, w) = Fx,\ \psi(x, w) = Aw - BHx, \tag{1.369}$$

unde $\beta = \frac{\partial\beta}{\partial x}(0); F, A, H$ – matrice constante. Soluţia unică a ecuaţiei (1.366) este

$$w = Tx, \tag{1.370}$$

unde T este soluţia ecuaţiei [185]

$$TF + AT = BH. \tag{1.371}$$

Considerând $z = \theta(x)$ soluţia inversabilă a ecuaţiei (1.366), observerul se construieşte astfel [128], [185]:

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}) - \left[\frac{\partial\theta}{\partial\hat{x}}(\hat{x})\right]^{-1}[\beta(y) - \beta(h(\hat{x}))]. \tag{1.372}$$

Ecuaţia asociată erorii observerului este (1.363), iar dinamica erorii este [185]

$$\dot{e} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\theta(\hat{x}) - \theta(x)] = A[\theta(\hat{x}) - \theta(x)] = A\,e. \tag{1.373}$$

1.7.3.3. Observere Yannick Morel

Se consideră sistemul de forma

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t),\ y(t) = Cx(t), \tag{1.374}$$

unde $x \in R^n, y \in R^m, m \geq n/2, p = n - m, C = \lfloor I_m \;\; 0_{m\times p} \rfloor$. Din cele n variabile de stare, primele m vor fi măsurate, urmând ca p=n-m variabile de stare să fie estimate [178].

Scopul proiectării acestui observer [178] este reconstrucţia întregului vector de stare $x(t)$ folosind informaţiile furnizate de $y(t)$ şi de cunoaşterea parţială a membrului drept a primei ecuaţii (1.374). Astfel,

$$y(t) = x_1(t) \tag{1.375}$$

reprezintă vectorul de ieşire al sistemului (vectorul ce conţine variabilele de stare direct măsurabile), iar vectorul de stare $x(t)$ se împarte în două părţi: vectorul $x_1(t) \in R^m$ – vectorul variabilelor de stare direct măsurabile şi vectorul $x_2(t) \in R^{n-m}$ – vectorul de stare ce urmează a fi estimat prin intermediul observerului Yannick Morel [178];

$$x(t) = \left[x_1^T(t)\ x_2^T(t)\right]^T. \tag{1.376}$$

În aceste condiţii, dinamica sistemului devine

$$\dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), x_2(t), t) \tag{1.377}$$

cu $x_1(0) = Cx(0) = y(0)$; $f_1(x_1(t), x_2(t), t) = Cf(x(t), t)$.

Condiţia de observabilitate a sistemului este [178]

$$\text{rang}\left[\frac{\partial f_1(x_1, x_2, t)}{\partial x_2}\right] = p\,. \tag{1.378}$$

Din (1.374) şi (1.377) rezultă

$$\dot{y}(t) = f_1(y(t), x_2(t), t) = 0\,. \tag{1.379}$$

Conform teoremei din [136], dacă este îndeplinită condiţia (1.378), există o funcţie unică $g : R^m \times R^m \times R \to R^p$ astfel încât $g(y, \dot{y}, t) = x_2$; a lucra însă direct cu funcţia $g(\cdot)$ nu reprezintă o soluţie viabilă pentru construcţia observerului care să estimeze x_2.

În aceste condiţii, se va lucra indirect cu funcţia $g(\cdot)$. Astfel, se va construi $\hat{x}_2$ (estimarea lui x_2) ce va converge într-o vecinătate a lui $g(y(t), \dot{y}(t), t)$. Pentru că semnalul $\dot{y}(t)$ nu se măsoară, el se va estima folosindu-se $y(t)$ (semnal măsurabil) şi, eventual, un estimator al derivatei ca cele din [36] şi [238]. Se calculează $\hat{x}_1(t)$, cu o formulă de tipul (1.377), înlocuindu-se $x_2(t)$ cu $\hat{x}_2(t)$ şi adăugându-se în plus, în membrul drept, termenul $-De_1(t)$

$$\dot{\hat{x}}_1(t) = f_1(x_1(t), \hat{x}_2(t), t) - De_1(t), \tag{1.380}$$

unde $D \in R^{m\times m}, e_1(t) = x_1(t) - \hat{x}_1(t)$.

Pentru o mai bună flexibilitate în procedura de proiectare, se va utiliza semnalul auxiliar $\omega(t) \in R^m$, soluţie a ecuaţiei [178]

$$\dot{\omega}(t) = W_a(x_1(t), \hat{x}_2(t), t)\cdot v(t), \omega(0) = 0_{m\times 1}\,, \tag{1.381}$$

unde $v(t) \in R^{m-p}$, iar $W_a(\cdot) \in R^{m\times(m-p)}$ este o funcţie aleasă astfel încât [178]

$W_2(x_1, \hat{x}_2, t) \overset{\Delta}{=} \left[\dfrac{\partial f_1(x_1, \hat{x}_2, t)}{\partial \hat{x}_2} \quad W_a(x_1, \hat{x}_2, t) \right] \in R^{m \times m}$ să fie nesingulară $(\forall) x_1 \in R^m, \hat{x}_2 \in R^p$.

Se construieşte $\dot{\hat{x}}_{2a} \overset{\Delta}{=} \left[\dot{\hat{x}}_2^T(t) \quad v^T(t) \right]^T \in R^m$ astfel încât $\lim_{t \to \infty} e_1(t) = 0$; se folosesc notaţiile [178]

$$W_1(x_1, \hat{x}_2, t) \overset{\Delta}{=} \frac{\partial f_1(x_1, \hat{x}_2, t)}{\partial x_1}, W_3(x_1, \hat{x}_2, t) \overset{\Delta}{=} \frac{\partial f_1(x_1, \hat{x}_2, t)}{\partial t}. \tag{1.382}$$

Se foloseşte, de asemenea, şi lema următoare [75]:

<u>*Lema 1*</u>

Fie $A, S \in R^{m \times m}$ – matrice Hurwitz şi $Q \overset{\Delta}{=} \mathrm{R}^T \mathrm{R}$, unde $\mathrm{R} \in R^{m \times m}$ are rang maxim. Dacă $H \overset{\Delta}{=} \begin{bmatrix} A & SS^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}$ nu are valori proprii pe axa imaginară, atunci $(\exists) P \geq 0$ astfel încât

$$A^T P + PA + Q + PSS^T P = 0. \tag{1.383}$$

Dacă, în plus, perechea (A, R) este observabilă, atunci $P > 0$.

Proiectarea observerului Yannick Morel se bazează pe următoarea teoremă [178]:

<u>*Teorema 3*</u>

Se consideră sistemul descris de ecuaţiile (1.374) şi predictorul de stare (1.380). Se presupune că este disponibil un semnal continuu şi diferenţiabil $z(t)$ astfel încât $z(t) = \dot{y}(t) + \omega(t) - \varepsilon(t)$, cu $\|\varepsilon(t)\| \leq \sqrt{\varepsilon / 3}, \varepsilon > 0$. În aceste condiţii, $\hat{x}_2(t)$ este obţinut prin intermediul estimatorului de stare:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_{2a}(t) &= W_2^{-1}(x_1(t), \hat{x}_2(t), t)\{P_2^{-1} P_1 e_1(t) - A_1[(A_1 + P_1^{-1} K) e_1(t) - e_2(t)] + \dot{z}(t) + A_2 e_2(t)\} - \\ &- W_2^{-1}(x_1(t), \hat{x}_2(t), t) W_1(x_1(t), \hat{x}_2(t), t) \left[z(t) - \omega(t) + \frac{1}{2} W_1^T(x_1(t), \hat{x}_2(t), t) P_2 e_2(t) \right] - \\ &- W_2^{-1}(x_1(t), \hat{x}_2(t), t) W_3(x_1(t), \hat{x}_2(t), t); \hat{x}_2(t) = \left[I_p \quad 0_{p \times (m-p)} \right] \hat{x}_{2a}(t), \end{aligned} \tag{1.384}$$

unde $A_1, A_2, K \in R^{m \times m}$ sunt matrice Hurwitz, $e_2(t)$ are expresia [178]

$$e_2(t) \overset{\Delta}{=} f_1(x_1(t), \hat{x}_2(t), t) + \omega(t) + a_1 e_1(t) - z(t), \tag{1.385}$$

iar $P_1, P_2 \in R^{m \times m}$ – soluţiile ecuaţiilor Riccati

$$A_1^T P_1 + P_1 A_1 + Q_1 + P_1^2 = 0\,, A_2^T P_2 + P_2 A_2 + Q_2 + P_2 A_1 A_1^T P_2 = 0\,; \tag{1.386}$$

$Q_1 = R_1^T R_1 > 0$ şi $Q_2 = R_2^T R_2 > 0$ se aleg astfel încât matricele $H_1 \overset{\Delta}{=} \begin{bmatrix} A_1 & I_m \\ -Q_1 & -A_1^T \end{bmatrix}$ şi $H_2 \overset{\Delta}{=} \begin{bmatrix} A_2 & A_1 A_1^T \\ -Q_2 & -A_2^T \end{bmatrix}$ să nu aibă valori proprii pe axa imaginară, iar perechiile $(A_1\,, R_1)$ şi $(A_2\,, R_2)$ să fie observabile. În plus, $\omega(t)$ se obţine din ecuaţia (1.381) cu

$$v(t) \overset{\Delta}{=} \left[0_{(m-p)\times p} \;\; I_{m-p}\right] \dot{\hat{x}}_{2a}(t); \tag{1.387}$$

matricea D se alege de forma [178]: $D = P_1^{-1} K$. Demonstraţia teoremei precedente este prezentată în continuare [178]. Se calculează mai întâi $\dot{e}_1(t)$ şi se obţine

$$\dot{e}_1(t) = f_1(x_1, x_2, t) - f_1(x_1, \hat{x}_2, t) + P_1^{-1} K e_1(t). \tag{1.388}$$

Deoarece $e_2(t) = f_1(x_1, \hat{x}_2, t) + \omega(t) + A_1 e_1(t) - z(t) \Rightarrow f_1(x_1, \hat{x}_2, t) = e_2(t) - \omega(t) - A_1 e_1(t) + z(t)$; înlocuind $f_1(x_1, \hat{x}_2, t)$ în (1.388), rezultă

$$\dot{e}_1(t) = \left(A_1 + P_1^{-1} K\right) e_1(t) - e_2(t) + \varepsilon(t). \tag{1.389}$$

Se calculează acum $\dot{e}_2(t)$ şi se obţine [178]

$$\dot{e}_2(t) = \dot{f}_1(x_1, \hat{x}_2, t) + \dot{\omega}(t) + A_1 \dot{e}_1(t) - \dot{z}(t). \tag{1.390}$$

Ţinând cont de

$$\begin{aligned} \dot{f}_1(x_1, \hat{x}_2, t) &= \frac{\mathrm{d} f_1(x_1, \hat{x}_2, t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f_1(x_1, \hat{x}_2, t)}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1(x_1, \hat{x}_2, t)}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial f_1(x_1, \hat{x}_2, t)}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial t} = \\ &= W_1 \dot{x}_1 + \frac{\partial f_1(x_1, \hat{x}_2, t)}{\partial x_2}\dot{\hat{x}}_2 + W_3 \overset{(2.384)}{=} W_1 \dot{x}_1 + \left[I_p \;\; 0_{p\times(m-p)}\right]\dot{\hat{x}}_{2a}(t) + W_3 \end{aligned} \tag{1.391}$$

şi

$$\dot{\omega}(t) \overset{(1.381)}{=} W_a(x_1(t), \hat{x}_2(t), t) \cdot v(t) \overset{(1.387)}{=} W_a(x_1(t), \hat{x}_2(t), t) \cdot \begin{bmatrix} 0_{(m-p)\times p} & I_{m-p} \end{bmatrix} \dot{\hat{x}}_{2a}(t), \tag{1.392}$$

se obţine succesiv [178]

$$\begin{aligned} \dot{e}_2 &= W_1\dot{x}_1 + W_3 + \frac{\partial f_1(x_1, \hat{x}_2, t)}{\partial x_2}\begin{bmatrix} I_p & 0_{p\times(m-p)} \end{bmatrix}\dot{\hat{x}}_{2a}(t) + \begin{bmatrix} 0_{(m-p)\times p} & W_a(x_1(t), \hat{x}_2(t), t) \end{bmatrix}\dot{\hat{x}}_{2a} + \\ &+ A_1\dot{e}_1(t) - \dot{z}(t) = A_1\dot{e}_1 + W_1\dot{x}_1 + W_2\dot{\hat{x}}_{2a} + W_3 - \dot{z} \overset{(1.389)}{=} A_1\varepsilon + A_1\left[\left(A_1 + P_1^{-1}K\right)e_1 - e_2\right] + \\ &+ W_1\dot{x}_1 + W_2\dot{\hat{x}}_{2a} + W_3 - \dot{z} = A_1\varepsilon + A_1\left[\left(A_1 + P_1^{-1}K\right)e_1 - e_2\right] + W_1(z - \omega + \varepsilon) - \dot{z} + W_3 + W_2\dot{\hat{x}}_{2a} \end{aligned} \tag{1.393}$$

Din prima ecuaţie (1.384) rezultă

$$\dot{\hat{x}}_{2a} = W_2^{-1}\left\{P_2^{-1}P_1e_1 - A_1\left[\left(A_1 + P_1^{-1}K\right)e_1 - e_2\right] + \dot{z} + A_2e_2 - W_1\left[z - \omega + \frac{1}{2}W_1^T P_2 e_2\right] - W_3\right\}; \tag{1.394}$$

Eliminând $\dot{\hat{x}}_{2a}$ între ecuaţiile (1.393) şi (1.394) se obţine [178]

$$\dot{e}_2 = A_1\varepsilon + P_2^{-1}P_1e_1 + A_2e_2 + W_1\left[\varepsilon - \frac{1}{2}W_1^T P_2 e_2\right]. \tag{1.395}$$

Pentru a demonstra convergenţa estimatorului de stare, se consideră funcţia Lyapunov

$$V(e_1, e_2) = e_1^T P_1 e_1 + e_2^T P_2 e_2 \tag{1.396}$$

cu $P_1, P_2 > 0$ – soluţiile ecuaţiilor (1.386). Se calculează derivata funcţiei Lyapunov şi se obţine succesiv [178]

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= e_1^T\left(P_1A_1 + A_1^TP_1\right)e_1 + e_1^T\left(K + K^T\right)e_1 - 2e_1^TP_1e_2 + 2e_1^TP_1\varepsilon + e_2^T\left(A_2^TP_2 + P_2A_2\right)e_2 + \\ &+ 2e_2^TP_2\left[A_1\varepsilon + W_1\left(\varepsilon - \frac{1}{2}W_1^TP_2e_2\right) + P_2^{-1}P_1e_1\right] = 2e_2^TP_2W_1\left(\varepsilon - \frac{1}{2}W_1^TP_2e_2\right) + 2e_2^TP_2A_1\varepsilon + \\ &+ 2e_1^TP_1\varepsilon + e_1^T\left(A_1^TP_1 + P_1A_1 + K + K^T + P_1^2 - P_1^2\right)e_1 + e_2^T\left(A_2^TP_2 + A_2P_2 + P_2A_1A_1^TP_2\right) - \\ &- e_2^T\left(P_2A_1A_1^TP_2Q_2 - Q_2\right) \overset{(1.386)}{=} 2e_2^TP_2W_1\left(\varepsilon - \frac{1}{2}W_1^TP_2e_2\right) + 2e_2^TP_2A_1\varepsilon + 2e_1^TP_1\varepsilon - \\ &- e_1^T\left(Q_1 - K - K^T + P_1^2\right) - e_2^T\left(Q_2 + P_2A_1A_1^TP_2\right); \end{aligned} \tag{1.397}$$

pentru obţinerea ecuaţiei (1.397) s-au avut în vedere relaţiile [178]

$$\begin{aligned} &e_2^TP_1e_1 = \left(e_2^TP_1e_1\right)^T = e_1^TP_1e_2\,,\; e_1^TP_1\varepsilon = \left(e_1^TP_1\varepsilon\right)^T = \varepsilon^TP_1e_1\,, \\ &e_2^TP_2A_1\varepsilon = \left(e_2^TP_2A_1\varepsilon\right)^T = \varepsilon^TA_1^TP_2e_2\,,\; e_2^TP_2W_1\left(\varepsilon - \frac{1}{2}W_1^TP_2e_2\right) = \left(\varepsilon^T - \frac{1}{2}e_2^TP_2^Tw_1\right)W_1^TP_2e_2 \end{aligned} \tag{1.398}$$

Utilizând relaţia

$$2A^T BC = -\left(B^T A - C\right)^T \left(B^T A - C\right) + A^T BB^T A + C^T C \le A^T BB^T A + C^T C \tag{1.399}$$

se obţin [178]

$$\begin{aligned}
2e_1^T P_1 \varepsilon &= -\left(P_1 e_1 - \varepsilon\right)^T \left(P_1 e_1 - \varepsilon\right) + e_1^T P_1^2 e_1 + \varepsilon^T \varepsilon \le e_1^T P_1^2 e_1 + \varepsilon^T \varepsilon, \\
2e_2^T P_2 A_1 \varepsilon &= -\left(A_1^T P_2 e_2 - \varepsilon\right)^T \left(A_1^T P_2 e_2 - \varepsilon\right) + e_2^T P_2 A_1 A_1^T P_2 e_2 + \varepsilon^T \varepsilon \le e_2^T P_2 A_1 A_1^T P_2 e_2 + \varepsilon^T \varepsilon, \\
2e_2^T P_2 W_1 \varepsilon &= -\left(W_1^T P_2^T e_2 - \varepsilon\right)^T \left(W_1^T P_2^T e_2 - \varepsilon\right) + e_2^T P_2 W_1 W_1^T P_2^T e_2 + \varepsilon^T \varepsilon \le e_2^T P_2 W_1 W_1^T P_2^T e_2 + \varepsilon^T \varepsilon.
\end{aligned} \tag{1.400}$$

Cu acestea, $\dot{V}(t)$ devine

$$\dot{V}(t) \le -e_1^T \overline{Q}_1 e_1 - e_2^T Q_2 e_2 + \varepsilon, \tag{1.401}$$

unde $\overline{Q}_1 = Q_1 - K - K^T$. Este evident faptul că funcţia $\dot{V}(t)$ este negativă în afara domeniului $\left\{(e_1, e_2) : e_1^T \overline{Q}_1 e_1 + e_2^T Q_2 e_2 \le \varepsilon\right\}$, lucru care demonstrază mărginirea perechii $\left(e_1(t), e_2(t)\right)(\forall)t > 0$ [52], [131].

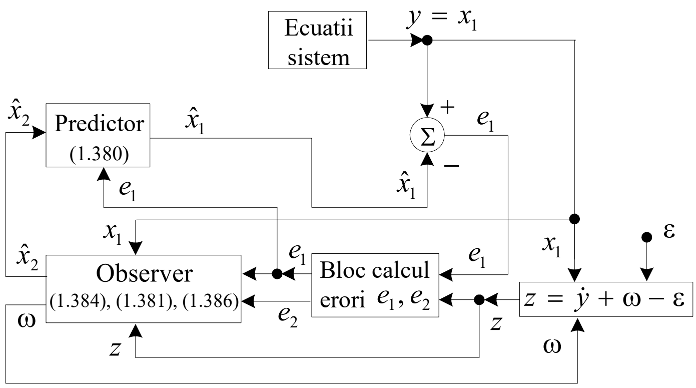

Fig. 1.30. Schema bloc a ansamblului sistem-observer-predictor

În cadrul teoremei 3 s-a presupus $m \ge n/2$. În cazul particular $m = n/2$, procedura de proiectare a observerului este mai simplă (K devine matricea nulă, $\hat{x}_{2a} = \hat{x}_2\ (\forall)t > 0$ şi nu mai este necesară utilizarea vectorului $\omega(t)$).

Schema bloc a ansamblului sistem-observer-predictor (Yannick Morel) este prezentată în fig. 1.30.

1.7.3.4. Observere optimale

Se consideră sistemul neliniar descris de ecuaţiile de stare [214]

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u,t) + Ew, \\ y = g(x,t) + v, \end{cases} \tag{1.402}$$

în care f, g sunt funcţii neliniare, $v, w -$ procese aleatoare de tip zgomot alb. Sistemul anterior poate fi scris [214]

$$\begin{cases} \dot{x} = A(x)x + Bu + Ew, \\ y = C(x)x + v, \end{cases} \tag{1.403}$$

în care $A(x), C(x), B, E -$ matrice. Acest observer optimal este o variantă simplificată a filtrului Kalman extins. Astfel, matricea de amplificare a observerului $L(x)$ se calculează cu relaţia

$$L(x) = P(x)C^T(x)R^{-1}, \tag{1.404}$$

în care $P(x)$ este soluţia ecuaţiei Riccati [214]

$$P(x)A^T(x) + A(x)P(x) - P(x)C^T(x)R^{-1}C(x)P(x) + EQE^T = 0. \tag{1.405}$$

Observerul de stare optimal este construit pe baza ecuaţiilor

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A(\hat{x})\hat{x} + L(\hat{x})(y - C\hat{x}) + Bu, \\ \hat{y} = C\hat{x}. \end{cases} \tag{1.406}$$

După determinarea matricei de amplificare L a observerului, se verifică dacă aceasta conduce la stabilitatea matricei $(A - LC) = (A - PC^T R^{-1}C)$; acest lucru este obligatoriu întrucât dinamica observerului este [214]

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = (A - LC)e. \tag{1.407}$$

O altă variantă presupune liniarizarea ecuaţiei (1.403) pentru a fi apoi folosit filtrul Kalman extins; dar, cu această metodă, stabilitatea globală nu este garantată

[214]. Pe de altă parte, performanţele observerului depind de alegerea matricelor Q şi R. Matricea R poate fi obţinută scriind acest sistem într-o formă discretă şi utilizând apoi reprezentările în joasă şi înaltă frecvenţă.

1.8. PROIECTAREA OBSERVERELOR ADAPTIVE

1.8.1. PROIECTAREA OBSERVERELOR ADAPTIVE ROBUSTE PENTRU SISTEMELE NELINIARE UTILIZÂND NORMA H_∞

Observerele adaptive existente pot fi caracterizate de erori chiar şi în condiţiile în care erorile de estimare rămân mici. Acest lucru se datorează perturbaţiilor exterioare şi poate fi evitat prin utilizarea observerelor adaptive robuste. Observerul care este prezentat în continuare are drept condiţie de stabilitate o inegalitate liniară, iar amplificarea observerului se alege prin rezolvarea uni probleme optimale convexe [124].

Un observer adaptiv este atât un estimator de stare cât şi un mijloc de identificare a parametrilor. În aceste 2 scopuri, observerul adaptiv foloseşte fie un algoritm de identificare a parametrilor, fie algoritmi de estimare a stării. Algoritmii de identificare a parametrilor folosesc ieşirile sistemului şi starea estimată. Există numeroase observere adaptive ce sunt utilizate în cazul sistemelor neliniare [7], [169], [172]. De exemplu, pentru proiectarea unui observer adaptiv pentru un sistem neliniar cu o intrare şi o ieşire, sistemul iniţial trebuie adus la forma canonică în condiţiile mărginirii intrării şi stării [7]. În cazul intrărilor multiple şi a ieşirii unice, sistemul trebuie adus la forma canonică printr-o schimbare de coordonate [169], [172]. Alte observere adaptive pentru sistemele neliniare Lipschitz sunt formulate în [199] şi [38]. Observerele proiectate şi menţionate mai sus pot însă să nu funcţioneze corect în cazul unor perturbaţii mărginite. Aceste observere adaptive asigură convergenţa parametrilor către valorile lor dorite, însă, în cazul unor perturbaţii mici, arbitrare, parametrii pot avea deviaţii semnificative chiar dacă erorile de estimare rămân mici [101], [170]. Pentru a se evita acest lucru, au fost introduse câteva tehnici pentru modificarea structurii observerelor adaptive [64], [101], [170]. Dintre acestea se pot enumera: introducerea operatorilor de proiectare [64], [101], [170] sau introducerea unui termen de legătură în legea parametrică de adaptare, acesta din urmă făcând ca derivata în timp a unei funcţii Lyapunov să rămână negativă atunci când un anumit parametru depăşeşte limita sa normală [101], [230]. O altă metodă de identificare parametrică este metoda H_∞ ce foloseşte un filtru extern [133]. Se ştie că o perturbaţie mică produce o eroare de estimare mică în cazul în care filtrul este proiectat astfel încât să fie minimizată norma H_∞ dintre perturbaţii şi erorile de estimare.

Metoda ce este prezentată în continuare este asociată proiectării unui observer adaptiv pentru sistemele neliniare afectate de perturbaţii cu normă limitată [124]. Metoda de proiectare se bazează pe analiza stabilităţii Lyapunov şi limitează norma H_∞ dintre perturbaţii şi eroarea de estimare. Amplificarea observerului adaptiv este aleasă optimal prin rezolvarea problemei de minimizare a normei H_∞, condiţia de stabilitate fiind transformată într-o inegalitatea matriceală liniară [124].

Se consideră sistemul neliniar descris de ecuaţiile de stare

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \Phi(y,u) + b\beta(y,u)\theta + w, \\ y = Cx, \end{cases} \tag{1.408}$$

în care perechea de matrice (A, C) este observabilă, θ este vectorul parametrilor necunoscuţi, w – vectorul perturbaţiilor, iar Φ şi β sunt funcţii neliniare ce depind de intrare şi ieşire.

Se proiectează observerul neliniar adaptiv descris de ecuaţia [124]

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + \Phi(y,u) + b\beta(y,u)\hat{\theta} + L(y - C\hat{x}), \tag{1.409}$$

în care $\hat{\theta}$ este vectorul parametrilor estimaţi, iar L - amplificarea observerului. Înlocuind y=Cx în ecuaţia (1.409) şi apoi scăzând din prima ecuaţie (1.408) ecuaţia (1.409), rezultă

$$\dot{e} = (A - LC)e + b\beta(y,u)e_\theta + w, \tag{1.410}$$

unde $e = x - \hat{x}$ este eroarea de estimare a stării, iar $e_\theta = \theta - \hat{\theta}$ este eroarea de estimare parametrică. Făcând abstracţie de vectorul perturbaţiilor w, eroarea e scade către zero dacă există matricele simetrice şi pozitiv definite P, Q şi o matrice de amplificare L care să satisfacă ecuaţia [124]

$$(A - LC)^T P + P(A - LC) = -Q\,, \tag{1.411}$$

$Pb = C^T$; $(A - LC)-$ matrice Hurwitz (matrice pătratică construită folosind coeficienţii unui polinom, toţi minorii asociaţi acestei matrice fiind pozitivi).

Pentru obţinerea condiţiilor de stabilitate a observerului adaptiv robust se utilizează teoria Lyapunov. Relaţia dintre $w(t)$ şi $e(t)$ este [124]

$$w(t) = \Delta(t)\, C_d\; e(t), \tag{1.412}$$

unde $\|\Delta(t)\|_2 \le 1, (\forall)t$. Matricea de amplificare L se determină utilizând următoarea teoremă [124]:

Teorema 4

$(\forall)\Delta(t)$ ce satisface ecuaţia (1.412), există matricea de amplificare L care stabilizează dinamica erorii (1.410) dacă există $P = P^T > 0, S, \tau \ge 0$ astfel încât

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA - C^T S - S^T C + \alpha P + \tau C_d^T C_d & P \\ P & -\tau I \end{bmatrix} \le 0\,; \tag{1.413}$$

α este o constantă pozitivă aleasă arbitrar şi $Pb = C^T$.

Demonstraţie

Se consideră funcţia Lyapunov [124]

$$V(e, e_\theta) = e^T P e + e_\theta^T \Gamma^{-1} e_\theta\,, \tag{1.414}$$

unde $P = P^T > 0$ şi $\Gamma = \Gamma^T > 0$. Pentru stabilitate, derivata în timp a funcţiei Lyapunov trebuie să fie cel puţin negativă semi-definită $\left(\dot V(e, e_\theta) \le 0\right)$;

$$\begin{aligned}&\dot{V} = \dot{e}^T Pe + e^T P\dot{e} + \left(\dot{e}_\theta^T \Gamma^{-1} e_\theta + e_\theta^T \Gamma^{-1} \dot{e}_\theta\right) \Leftrightarrow\\&\Leftrightarrow \dot{V} = e^T (A - LC)^T Pe + e_\theta^T \beta^T \varepsilon + e^T P(A - LC)e + e^T Pb\beta e_\theta + w^T Pe +\\&\quad + e^T Pw + \left(\dot{e}_\theta^T \Gamma^{-1} e_\theta + e_\theta^T \Gamma^{-1} \dot{e}_\theta\right) \Leftrightarrow\\&\Leftrightarrow \dot{V} = e^T (A - LC)^T Pe + e^T P(A - LC)e + w^T Pe + e^T Pw + e_\theta^T \beta^T \varepsilon +\\&\quad + \varepsilon^T \beta e_\theta + \left(\dot{e}_\theta^T \Gamma^{-1} e_\theta + e_\theta^T \Gamma^{-1} \dot{e}_\theta\right);\end{aligned} \tag{1.415}$$

s-a făcut notaţia $\varepsilon = Ce$ şi s-a ţinut cont de $b^T P = b^T P^T = C$, deoarece $Pb = C^T$.

Pentru actualizarea parametrică, se consideră următoarea lege adaptivă [124]

$$\dot{e}_\theta = -\Gamma \beta^T \varepsilon + \Gamma|\sigma|\hat{\theta}; \tag{1.416}$$

σ se alege astfel încât $V > 0$. Înlocuind ecuaţia (1.416) în (1.415), $\dot{V}$ devine

$$\dot{V} = e^T (A - LC)^T Pe + e^T P(A - LC)e + w^T Pe + e^T Pw + |\sigma| e_\theta^T \hat{\theta} + |\sigma|\hat{\theta}^T e_\theta, \tag{1.417}$$

deoarece $|\sigma| = |\sigma|^T$, întrucât σ este o constantă.

În continuare, se înlocuieşte în ecuaţia (1.417) $\hat{\theta} = \theta - e_\theta$ şi, ţinându-se cont de $e_\theta^T \theta = \theta^T e_\theta$, se obţine relaţia [124]

$$\begin{aligned}&\dot{V} = e^T (A - LC)^T Pe + e^T P(A - LC)e + w^T Pe + e^T Pw + |\sigma|\left[e_\theta^T \theta - e_\theta^T e_\theta + \theta^T e_\theta - e_\theta^T e_\theta\right] \Leftrightarrow\\&\dot{V} = e^T (A - LC)^T Pe + e^T P(A - LC)e + w^T Pe + e^T Pw - 2|\sigma|\left(e_\theta^T e_\theta - e_\theta^T \theta\right).\end{aligned} \tag{1.418}$$

Dacă se foloseşte inegalitatea [124]

$$2e_\theta^T \theta \le e_\theta^T e_\theta + \theta^T \theta, \tag{1.419}$$

rezultă [124]

$$\dot{V} \le e^T (A - LC)^T Pe + e^T P(A - LC)e + w^T Pe + e^T Pw - |\sigma| e_\theta^T e_\theta + |\sigma|\theta^T \theta; \tag{1.420}$$

în partea stângă a inegalităţii anterioare se adaugă şi se scade αV, unde $\alpha>0$, şi se obţine

$$\begin{aligned}&\dot{V} \le -\alpha V + e^T (A - LC)^T Pe + e^T P(A - LC)e + w^T Pe +\\&\quad + e^T Pw - |\sigma| e_\theta^T e_\theta + |\sigma|\theta^T \theta + \alpha e^T Pe + \alpha e_\theta^T \Gamma^{-1} e_\theta .\end{aligned} \tag{1.421}$$

Considerând că $V > \dfrac{|\sigma|\theta^T \theta}{\alpha} \Leftrightarrow -\alpha V + |\sigma|\theta^T \theta \le 0$, derivata în timp a funcţiei

Lyapunov $(\dot{V})$ este negativă dacă şi numai dacă

$$e^T (A - LC)^T Pe + e^T P(A - LC)e + w^T Pe + e^T Pw - |\sigma| e_\theta^T e_\theta + \alpha e^T Pe + \alpha e_\theta^T \Gamma^{-1} e_\theta \le 0 . \quad (1.422)$$

Din ecuaţia (1.412), ţinând cont de $\|\Delta(t)\|_2 \le 1$, se obţine [124]

$$w \le C_d e \, , w^T \le e^T C_d^T \Leftrightarrow w^T w \le e^T C_d^T C_d e \quad (1.423)$$

sau

$$\tau \left(w^T w - e^T C_d^T C_d e\right) \le 0 \, , \quad (1.424)$$

în care τ este o constantă pozitivă. Din ecuaţiile (1.422) şi (1.424), rezultă

$$\begin{aligned} & e^T (A - LC)^T Pe + e^T P(A - LC)e + w^T Pe + e^T Pw + \\ & + \alpha e^T Pe - |\sigma| e_\theta^T e_\theta + \alpha e_\theta^T \Gamma^{-1} e_\theta - \tau\left(w^T w - e^T C_d^T C_d e\right) \le 0 \, ; \end{aligned} \quad (1.425)$$

constanta τ se alege suficient de mare astfel încât

$$\left|\tau\left(w^T w - e^T C_d^T C_d e\right)\right| < \left|e^T (A - LC)^T Pe + e^T P(A - LC)e + w^T Pe + e^T Pw + \alpha e^T Pe - |\sigma| e_\theta^T e_\theta + \alpha e_\theta^T \Gamma^{-1} e_\theta\right| . \quad (1.426)$$

Ecuaţia (1.425) se scrie sub forma matriceală

$$\begin{bmatrix} e \\ w \\ e_\theta \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Omega + \alpha P + \tau C_d^T C_d & P & 0 \\ P & -\tau I & 0 \\ 0 & 0 & -|\sigma| + \alpha \Gamma^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ w \\ e_\theta \end{bmatrix} \le 0 \, , \quad (1.427)$$

în care

$$\begin{aligned} \Omega &= (A - LC)^T P + P(A - LC) = \left(A^T - C^T L^T\right)P + PA - PLC = \\ &= A^T P - C^T \underbrace{L^T P}_{S} + PA - \underbrace{PL}_{S^T} C \Leftrightarrow \Omega = A^T P + PA - C^T S - S^T C \, . \end{aligned} \quad (1.428)$$

Întrucât vectorul $[e \;\; w \;\; e_\theta]^T$ este oarecare, condiţia (1.427) este echivalentă cu

$$\begin{bmatrix} \Omega + \alpha P + \tau C_d^T C_d & P & 0 \\ P & -\tau I & 0 \\ 0 & 0 & -|\sigma| + \alpha \Gamma^{-1} \end{bmatrix} \le 0 \quad (1.429)$$

sau, ţinând cont de (1.428), ecuaţia (1.429) capătă forma [124]

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA - C^T S - S^T C + \alpha P + \tau C_d^T C_d & P & 0 \\ P & -\tau I & 0 \\ 0 & 0 & -|\sigma| + \alpha \Gamma^{-1} \end{bmatrix} \leq 0 . \tag{1.430}$$

În cazul în care se alege $|\sigma| \geq \alpha\Gamma^{-1}$, rezultă $-|\sigma| e_\theta^T e_\theta + \alpha e_\theta^T \Gamma^{-1} e_\theta \leq 0$ şi (1.425) devine

$$e^T (A - LC)^T Pe + e^T P(A - LC)e + w^T Pe + e^T Pw + \alpha e^T Pe - \tau\left(w^T w - e^T C_d^T C_d e\right) \leq 0 \tag{1.431}$$

sau, sub formă matriceală,

$$\begin{bmatrix} e \\ w \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Omega + \alpha P + \tau C_d^T C_d & P \\ P & -\tau I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ w \end{bmatrix} \leq 0 \tag{1.432}$$

echivalentă cu [124]

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA - C^T S - S^T C + \alpha P + \tau C_d^T C_d & P \\ P & -\tau I \end{bmatrix} \leq 0 . \tag{1.433}$$

Condiţia (1.433) asigură convergenţa către 0 a erorilor e şi e_θ ; deci, erorile estimării stării şi estimării parametrice (e, e_θ) sunt foarte puţin afectate de eventualele perturbaţii exterioare. Din ecuaţia $S = L^T P$ se determină matricea de amplificare L a observerului. Astfel,

$$SP^{-1} = L^T \Leftrightarrow L = \left(P^{-1}\right)^T S^T = P^{-1} S^T \Leftrightarrow L = P^{-1} S^T . \tag{1.434}$$

În cele ce urmează se prezintă modul în care se alege amplificarea observerului, considerându-se efectul perturbaţiilor asupra erorilor de estimare e şi e_θ . O metodă ce poate fi utilizată este cea care foloseşte norma H_∞ (amplificare $\mathcal{L}_2$). Această amplificare $\mathcal{L}_2$ asociată perturbaţiilor w şi erorilor de estimare e şi e_θ, cu ponderile δ_1 şi δ_2 , sunt definite prin intermediul constantei [124]

$$\gamma = \underbrace{\sup}_{\|w\|_2 \neq 0} \frac{\delta_1 \|e\|_2 + \delta_2 \|e_\theta\|_2}{\|w\|_2} . \tag{1.435}$$

Prin definiţia funcţiei supremum (sup) şi a amplificării $\mathcal{L}_2$ (norma H_∞) [20], expresia

(1.435) devine

$$\int_0^T \left(\delta_1 e^T e + \delta_2 e_\theta^T e_\theta\right)\mathrm{d}t \le \gamma^2 \int_0^T w^T w\,\mathrm{d}t, (\forall) T \ge 0. \tag{1.436}$$

Se presupune că este valabilă următoarea inegalitate

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V + \delta_1 e^T e + \delta_2 e_\theta^T e_\theta - \gamma^2 w^T w \le 0 \tag{1.437}$$

$(\forall) t, e, e_\theta$ şi w ce satisfac ecuaţia (1.410). Prin integrarea ecuaţiei (1.437) de la 0 la T şi ţinând cont de (1.426), se arată că norma $\mathcal{L}_2$ este mai mică ca γ [20]. Ca şi mai sus, ecuaţia (1.437) conduce la

$$\begin{bmatrix} \Omega + \alpha P + \tau C_d^T C_d + \delta_1 I & P & 0 \\ P & -\tau I - \gamma^2 I & 0 \\ 0 & 0 & -|\sigma| + \alpha\Gamma^{-1} + \delta_2 \end{bmatrix} \le 0, \tag{1.438}$$

unde expresia lui Ω este tot de tipul (1.428). Ecuaţia (1.438) este echivalentă, în cazul în care

$$-|\sigma| + \alpha\Gamma^{-1} + \delta_2 \le 0 \Leftrightarrow \alpha\Gamma^{-1} + \delta_2 \le |\sigma|, \tag{1.439}$$

cu relaţia

$$\begin{bmatrix} \Omega + \alpha P + \tau C_d^T C_d + \delta_1 I & P \\ P & -\tau I - \gamma^2 I \end{bmatrix} \le 0. \tag{1.440}$$

Amplificarea optimală a observerului adaptiv se calculează prin următorul corolar [124]: Pentru o valoare dată a lui δ_1 şi o constantă pozitivă α, pentru orice $\Delta(t)$ ce satisface ecuaţia (1.412) $(\forall) t$, există o amplificare $L = P^{-1}S^T$ ce stabilizează erorile din ecuaţia (1.410) şi minimizează amplificarea $\mathcal{L}_2$ (norma H_∞) dacă şi numai dacă se rezolvă următoarea problemă de optimizare convexă: Se minimizează parametrul $\delta = \gamma^2$ în raport cu P, τ, δ şi S, unde $P = P^T > 0, \tau \ge 0, \rho \ge 0, Pb = C^T$ şi

$$\begin{bmatrix} \Omega + \alpha P + \tau C_d^T C_d + \delta_1 I & P \\ P & -(\tau + \rho) I \end{bmatrix} \leq 0. \tag{1.441}$$

După determinarea matricei L, ecuaţia observerului neliniar (1.409) devine [124]

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + \Phi(y,u) + b\beta(y,u)\hat{\theta} + P^{-1}S^T(y - C\hat{x}). \tag{1.442}$$

Vectorul estimat al parametrilor necunoscuţi $\hat{\theta}$ se determină astfel [124]:

$$\dot{\hat{\theta}} = \Gamma\beta^T(y,u)(y - C\hat{x}) + \Gamma|\sigma|(\overline{\theta} - \theta), \tag{1.443}$$

unde $|\sigma| \geq \alpha\Gamma^{-1} + \delta_2, \Gamma = \Gamma^t > 0$. P şi S se determină rezolvând ecuaţia (1.441), iar $\overline{\theta}$ este valoarea nominală a lui θ.

1.8.2. PROIECTAREA OBSERVERELOR ADAPTIVE PENTRU ESTIMAREA RAPIDĂ A DEFECTELOR

Defectarea senzorilor, actuatoarelor sau altor subsisteme modifică drastic funcţionarea unui sistem, putându-se ajunge chiar şi la instabilitate [245]. Pentru creşterea eficienţei sistemelor se utilizează pe scară tot mai largă controlul defectelor (FTC), acesta presupunând detecţia rapidă a defectelor şi izolarea lor [6], [15], [34]. Detecţia defectelor se poate face fie pasiv, utilizând un model de detecţie şi izolare a acestora, fie prin reconfigurarea sistemului pentru a păstra „partea sănătoasă" a acestuia. După detecţia defectului, este nevoie de determinarea amplitudinii sale, iar, în final, este proiectat un controller pentru compensarea defectului [245]. În prezent, se acordă o atenţie deosebită observerelor adaptive pentru detecţia defectelor [10], [57], [111], [112], [234], [237].

În cele ce urmează, este prezentat un algoritm pentru estimarea rapidă a defectelor, acesta utilizând un observer adaptiv. Observerul a fost proiectat de către Zhang, Jiang şi Cocquempot [245] şi se bazează pe un algoritm nou de estimare a defectelor utilizând doar măsurarea vectorilor de intrare şi de ieşire ai sistemului; paşii algoritmului se bazează pe tehnica inegalităţilor matriceale (LMI) [245].

Se consideră cazul unui sistem liniar afectat de defectarea unui actuator; sistemul liniar este descris de ecuaţiile de stare [245]

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ef_a(t), \\ y(t) = Cx(t); \end{cases} \tag{1.444}$$

$x(t) \in \mathcal{M}^{n\times 1}, u \in \mathcal{M}^{m\times 1}, y(t) \in \mathcal{M}^{p\times 1}$ şi $f_a(t) \in \mathcal{M}^{r\times 1}$ reprezintă defectul actuatorului. A, B, C, E sunt matrice constante cunoscute; E are rang de coloană maxim, iar perechea (A, C) este observabilă. Semnalul $f_a(t)$ poate fi interpretat ca un semnal suplimentar, $f_a(t) = \beta(t - t_f) \cdot f(t)$, iar funcţia $\beta(t - t_f)$ are expresia [245]

$$\beta(t - t_f) = \begin{cases} 0, t \le t_f, \\ 1, t \ge t_f, \end{cases} \tag{1.445}$$

unde t_f este momentul în care apare defectul. Cu alte cuvinte, semnalul asociat defectului actuatorului se scrie

$$f_a(t) = \begin{cases} 0, t \le t_f, \\ f(t), t \ge t_f. \end{cases} \tag{1.446}$$

Se presupune că norma derivatei în timp a funcţiei $f(t)$ este mărginită $\Leftrightarrow \left\|\dot{f}(t)\right\| \le f_1$; $0 \le f_1 < \infty$. Observerul pentru estimarea defectului se construieşte astfel [245]:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + E\hat{f}(t) - L[\hat{y}(t) - y(t)], \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t), \end{cases} \tag{1.447}$$

unde $\hat{x}(t)$ este vectorul de stare estimat, $\hat{y}(t) \in \mathcal{M}^{p\times 1}$ – vectorul de ieşire estimat (ieşirea observerului), $\hat{f}(t) \in \mathcal{M}^{r\times 1}$ – estimarea semnalului asociat defectului. Dacă perecehea (A, C) este observabilă, matricea L din ecuaţia (1.447) se alege astfel încât matricea (A-LC) să fie stabilă [245]. Se fac notaţiile

$$e_x(t) = \hat{x}(t) - x(t), e_y(t) = \hat{y}(t) - y(t), e_f(t) = \hat{f}(t) - f(t) \tag{1.448}$$

şi, cu acestea, utilizând ecuaţiile (1.444) şi (1.447), rezultă [245]

$$e_y(t) = Ce_x(t), \tag{1.449}$$

$$\dot{e}_x(t) = (A - LC)e_x(t) + Ee_f(t). \tag{1.450}$$

Dacă defectul se consideră constant $\Rightarrow \dot{f}(t) = 0 \Rightarrow \dot{e}_f(t) = \dot{\hat{f}}(t)$. În continuare, pentru proiectarea observerului, se utilizează următoarea teoremă [111], [112], [234]:

<u>*Teorema 5*</u>

Considerându-se matricele simetrice şi pozitiv definite $P, Q \in \mathcal{M}^{n\times n}$, matricea de amplificare L a observerului şi o matrice $F \in \mathcal{M}^{n\times p}$ astfel încât să fie valabile relaţiile

$$P(A - LC) + (A - LC)^T P = -Q\,, E^T P = FC\,, \tag{1.451}$$

atunci

$$\dot{\hat{f}}(\mathrm{t}) = -\Gamma F e_y(t) \tag{1.452}$$

şi algoritmul de estimare adaptivă a defectului este convergent ($\lim\limits_{t\to\infty} e_x(t) = 0$ şi $\lim\limits_{t\to\infty} e_f(t) = \lim\limits_{t\to\infty} e_y(t) = 0$); în ecuaţia (1.452), Γ se numeşte rata de învăţare şi este o matrice simetrică si pozitiv definită.

Semnalul eroare estimat $\hat{f}(t)$ se obţine uşor din (1.452) prin integrare [245]

$$\hat{f}(t) = -\Gamma \cdot F\int_{t_f}^{t} e_y(\tau)d\tau. \tag{1.453}$$

Pentru obţinerea relaţiei (1.453) s-a presupus că defectul este constant. În acest caz estimarea sa se face uşor; există însă cazuri când defectul nu este constant şi, de aceea, algoritmul adaptiv de mai sus trebuie îmbunătăţit. Pentru prezentarea algoritmului [245] se fac presupunerile: $\mathrm{rang}(CE) = r$ şi (A, E, C) nu prezintă zerouri invariante; de asemenea, se utilizează şi două leme:

<u>*Lema 2*</u>

Considerând o constantă pozitivă μ şi o matrice simetrică şi pozitiv definită P, este valabilă următoarea inegalitate [112]:

$$2x^T y \le \frac{1}{\mu} x^T P x + \mu y^T P^{-1} y \,;\, x, y \in \mathcal{M}^{n\times 1}. \tag{1.454}$$

<u>*Lema 3*</u>

Cele două presupuneri făcute ($\operatorname{rang}(CE) = r$ şi (A, E, C) nu prezintă zerouri invariante) sunt echivalente cu existenţa relaţiilor (1.451) [47], [54].

Deoarece funcţia asociată defectului nu mai este constantă $\left(\dot{f}(t) \ne 0\right)$, rezultă

$$\dot{e}_f(t) = \dot{\hat{f}}(t) - \dot{f}(t). \tag{1.455}$$

În cazul defectului variabil $\left(\dot{f}(t) \ne 0\right)$, în proiectarea observerului adaptiv Zhang, Jiang şi Cocquempot au folosit următoarea teoremă [245]

<u>*Teorema 6*</u>

Dacă sunt valabile cele două presupuneri făcute, considerându-se în plus constantele pozitive $\sigma, \mu > 0$, dacă există matricele simetrice şi pozitiv definite $P \in \mathcal{M}^{n\times n}, G \in \mathcal{M}^{r\times r}$ şi matricea $F \in \mathcal{M}^{n\times p}$ astfel încât

$$\begin{cases} E^T P = FC\,, \\ \begin{bmatrix} PA + A^T P - PLC - (PLC)^T & -\frac{1}{\sigma}\left(A^T PE - (PLC)^T E\right) \\ \left(-\frac{1}{\sigma}\left(A^T PE - (PLC)^T E\right)\right)^T & -\frac{2}{\sigma} E^T PE + \frac{1}{\sigma\mu} G \end{bmatrix} < 0\,, \end{cases} \tag{1.456}$$

funcţia asociată defectului se calculează astfel:

$$\dot{\hat{f}}(t) = -\Gamma F\left[\dot{e}_y(t) + \sigma e_y(t)\right] \tag{1.457}$$

şi sistemul este convergent ($e_x(t) \to 0, e_f(t) \to 0$).

<u>*Demonstraţie*</u>

Se consideră funcţia Lyapunov [245]

$$V(t) = e_x^T(t)Pe_x(t) + \frac{1}{\sigma}e_f^T(t)\Gamma^{-1}e_f(t) \tag{1.458}$$

şi se calculează $\dot{V}(t)$; se obţine [245]

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \dot{e}_x^T(t)Pe_x(t) + e_x^T(t)P\dot{e}_x(t) + \frac{2}{\sigma}e_f^T(t)\Gamma^{-1}\dot{e}_f(t) \Leftrightarrow \\ \dot{V}(t) &= e_x^T(t)\left[P(A-LC) + (A-LC)^T P\right]e_x(t) + 2e_x^T(t)PEe_f(t) - \\ &\quad -\frac{2}{\sigma}e_f^T(t)\left[\dot{e}_y(t) + \sigma e_y(t)\right] - \frac{2}{\sigma}e_f^T(t)\Gamma^{-1}\dot{f}(t). \end{aligned} \tag{1.459}$$

Pentru obţinerea relaţiei anterioare s-a avut în vedere ecuaţia

$$e_f^T(t)E^T Pe_x(t) = \left[e_f^T(t)E^T Pe_x(t)\right]^T = e_x^T(t)PEe_f(t). \tag{1.460}$$

Dar [245],

$$-\frac{2}{\sigma}e_f^T(t)F\left[\dot{e}_y(t) + \sigma e_y(t)\right] \overset{(2.449)}{=} -\frac{2}{\sigma}e_f^T(t)\underbrace{FC}_{E^T P}\left[\dot{e}_x(t) + \sigma e_x(t)\right] \overset{(2.451)}{=} -\frac{2}{\sigma}e_f^T(t)E^T P\left[\dot{e}_x(t) + \sigma e_x(t)\right] \tag{1.461}$$

şi înlocuind în ecuaţia (1.459)

$$\dot{e}_y(t) = C\dot{e}_x(t) = C\left[(A-LC)e_x(t) + Ee_x(t)\right] \tag{1.462}$$

şi ţinând cont şi de ecuaţia (1.461), expresia lui $\dot{V}(t)$ (formula (1.459)) devine [245]

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= e_x^T(t)\left[P(A-LC) + (A-LC)^T P\right]e_x(t) - \frac{2}{\sigma}e_f^T(t)E^T P(A-LC)e_x(t) - \\ &\quad -\frac{2}{\sigma}e_f^T(t)E^T PEe_f(t) - \frac{2}{\sigma}e_f^T(t)\Gamma^{-1}\dot{f}(t). \end{aligned} \tag{1.463}$$

Se aplică în continuare proprietatea din lema 2, înlocuind x cu $e_f(t)$ şi y cu $\Gamma^{-1}\dot{f}(t)$; astfel, pentru o matrice $G > 0$, rezultă

$$\begin{aligned} -\frac{2}{\sigma}e_f^T(t)\Gamma^{-1}\dot{f}(t) &\le \frac{1}{\sigma\mu}e_f^T(t)Ge_f(t) + \frac{\mu}{\sigma}\dot{f}^T(t)\Gamma^{-1}G^{-1}\Gamma^{-1}\dot{f}(t) \le \\ &\le \frac{1}{\sigma\mu}e_f^T(t)Ge_f(t) + \frac{\mu}{\sigma}f_1^2\lambda_{\max}\left(\Gamma^{-1}G^{-1}\Gamma^{-1}\right). \end{aligned} \tag{1.464}$$

Înlocuind (1.464) în (1.463), se obţine [245]

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) \le\ & e_x^T(t)\left[P(A-LC)+(A-LC)^T P\right]e_x(t) - \frac{2}{\sigma}e_f^T(t)E^T P(A-LC)e_x(t) - \\ & -\frac{2}{\sigma}e_f^T(t)E^T PEe_f(t) + \frac{1}{\sigma\mu}e_f^T(t)Ge_f(t) + \frac{\mu}{\sigma}f_1^2\lambda_{\max}\left(\Gamma^{-1}G^{-1}\Gamma^{-1}\right)\end{aligned} \tag{1.465}$$

sau

$$\dot{V}(t) \le \xi^T(t)\Phi\xi(t) + \eta, \tag{1.466}$$

unde

$$\begin{aligned}&\xi(t) = \begin{bmatrix} e_x(t) \\ e_f(t) \end{bmatrix}, \eta = \frac{\mu}{\sigma}f_1^2\lambda_{\max}\left(\Gamma^{-1}G^{-1}\Gamma^{-1}\right), \\ &\Phi = \begin{bmatrix} P(A-LC)+(A-LC)^T P & -\frac{1}{\sigma}(A-LC)^T PE \\ \left(-\frac{1}{\sigma}(A-LC)^T PE\right)^T & -\frac{2}{\sigma}E^T PE + \frac{1}{\sigma\mu}G \end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{1.467}$$

Deoarece E are rang de coloană maxim, când $\Phi < 0 \Rightarrow \dot{V}(t) < \varepsilon\|\xi\|^2 + \eta$, unde $\varepsilon = \lambda_{\min}(-\Phi)$; rezultă $\dot{V}(t) < 0$ pentru $\eta < \varepsilon\|\xi\|^2$. Aşadar, inegalitatea (1.466) este echivalentă cu inegalitatea matriceală (1.456) sau cu LMI

$$\begin{bmatrix} P(A-LC)+(A-LC)^T P & -\frac{1}{\sigma}(A-LC)^T PE \\ \left(-\frac{1}{\sigma}(A-LC)^T PE\right)^T & -\frac{2}{\sigma}E^T PE + \frac{1}{\sigma\mu}G \end{bmatrix} < 0. \tag{1.468}$$

Aceasta, împreună cu prima ecuaţie (1.456), asigură convergenţa la zero a erorilor $e_x(t)$ şi $e_f(t)$ [245]. Algoritmul prezentat este valabil nu doar în cazul defectului variabil ci şi a unui defect constant. În acest caz, $\dot{f}(t) = 0 \Leftrightarrow f_1 = 0$ şi (1.466) devine

$$\dot{V}(t) \le \xi^T(t)\Phi\xi(t); \tag{1.469}$$

este, deci, din nou nevoie ca $\Phi < 0$. Estimarea semnalului eroare $f(t)$ în cazul unui defect constant se face cu ecuaţia (1.453); $\hat{f}(t)$ presupune un singur termen – termen integral. În cazul în care defectul nu este constant, observerul adaptiv de estimare a defectului actuatorului are un termen proporţional şi unul integral [245]

$$\hat{f}(t) = -\Gamma F\left[e_y(t) + \sigma\int_{t_f}^{t} e_y(\tau)\,d\tau\right]. \tag{1.470}$$

Introducerea termenului proporţional joacă un rol important în creşterea vitezei de estimare a defectului.

Algoritmul anterior [245] estimează, prin intermediul unui observer adaptiv, defectul asociat unui actuator; metoda poate fi însă extinsă şi la cazul defectării unui senzor. În acest caz, ecuaţiile de stare sunt

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t) + Df_s(t); \end{cases} \tag{1.471}$$

$x(t) \in \mathcal{M}^{n\times 1}, u \in \mathcal{M}^{m\times 1}, y(t) \in \mathcal{M}^{p\times 1}$ şi $f_s(t) \in \mathcal{M}^{r\times 1}$ reprezintă semnalul asociat defectării unui senzor. Matricele A, B, C, D sunt matrice constante cunoscute, iar matricea D are rang de coloană maxim; şi de această dată perechea (A, C) este observabilă.

Se construieşte un sistem îmbunătăţit [54]; astfel, se consideră o nouă stare $x_s(t) \in \mathcal{M}^{p\times 1}$ care este o versiune filtrată a ieşirii $y(t)$

$$\dot{x}_s(t) = -\widetilde{A}x_s(t) + \widetilde{A}Cx(t) + \widetilde{A}Df_s(t), \tag{1.472}$$

unde $\widetilde{A}$ este o matrice stabilă. Se face notaţia [245]

$$\overline{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x_s(t) \end{bmatrix} \tag{1.473}$$

şi ecuaţiile de stare ale noului sistem devin

$$\begin{cases} \dot{\overline{x}}(t) = \overline{A}\overline{x}(t) + \overline{B}u(t) + \overline{D}f_s(t), \\ \overline{y}(t) = \overline{C}\overline{x}(t), \end{cases} \tag{1.474}$$

în care

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ \tilde{A}C & -\tilde{A} \end{bmatrix}, \overline{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \overline{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{A}D \end{bmatrix}, \overline{C} = \begin{bmatrix} 0 & I_p \end{bmatrix}. \tag{1.475}$$

Sunt şi aici valabile presupunerile anterioare şi cele două leme utilizate. Astfel, considerând scalarii $\sigma, \mu > 0$, dacă există matricele pozitiv definite $\overline{P} \in \mathcal{M}^{(n+p)\times(n+p)}$, $\overline{G} \in \mathcal{M}^{r\times r}$ şi matricea $\overline{F} \in \mathcal{M}^{r\times p}$ astfel încât [245]

$$\begin{cases} \overline{D}^T \overline{P} = \overline{F}\overline{C}, \\ \begin{bmatrix} \overline{P}\overline{A} + \overline{A}^T \overline{P} - \overline{P}\overline{L}\overline{C} - \left(\overline{P}\overline{L}\overline{C}\right)^T & -\frac{1}{\sigma}\left(\overline{A}^T \overline{P}\overline{D} - \left(\overline{P}\overline{L}\overline{C}\right)^T \overline{D}\right) \\ \left(-\frac{1}{\sigma}\left(\overline{A}^T \overline{P}\overline{D} - \left(\overline{P}\overline{L}\overline{C}\right)^T \overline{D}\right)\right)^T & -\frac{2}{\sigma}\overline{D}^T \overline{P}\overline{D} + \frac{1}{\sigma\mu}\overline{G} \end{bmatrix} < 0, \end{cases} \tag{1.476}$$

semnalul asociat senzorului defect se estimează astfel

$$\dot{\hat{f}}(t) = -\Gamma \, \overline{F}\left[\dot{\overline{e}}_y(t) + \sigma \overline{e}_y(t)\right] \tag{1.477}$$

şi $\overline{e}_x(t) \to 0, \overline{e}_f(t) \to 0$.

1.8.3. OBSERVER ADAPTIV PENTRU SISTEMELE MIMO VARIABILE ÎN TIMP

În cele ce urmează este prezentat un nou algoritm de proiectare a observerelor adaptive pentru sistemele MIMO (multi input - multi output), liniar variabile în timp (LTV). Potenţialele aplicaţii ale observerelor adaptive sunt identificarea sistemelor continue în timp, detecţia şi izolarea defectelor şi controlul adaptiv.

Estimarea stării pentru sistemele liniare prezintă soluţii viabile prin intermediul observerelor şi a filtrului Kalman. Şi estimarea stării în cazul parametrilor necunoscuţi se face prin intermediul bine-cunoscutelor observere adaptive [7], [11], [137], [171]. Toate aceste lucrări privesc observerele adaptive pentru sistemele SISO (single input - single output); generalizarea algoritmilor obţinuţi pentru cazurile MIMO este dificil de făcut. Algoritmul prezentat în continuare este un algoritm pentru estimarea sistemelor

MIMO, liniare şi variabile în timp [246]; algoritmul este simplu, eficient din punct de vedere computaţional, deci este viabil şi uşor de implementat software.

Se consideră sistemul descris de ecuaţiile de stare [246]

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + \psi(t)\theta, \\ y(t) = C(t)x(t), \end{cases} \tag{1.478}$$

unde $x(t) \in \mathcal{M}^{n\times 1}, u(t) \in \mathcal{M}^{l\times 1}, y(t) \in \mathcal{M}^{m\times 1}, A, B, C -$ matrice cunoscute dar variabile în timp, $\theta \in \mathcal{M}^{p\times 1}$ – vectorul parametrilor necunoscuţi considerat constant, $\psi(t) \in \mathcal{M}^{n\times p}$ – matricea vectorului parametrilor necunoscuţi. Scopul algoritmului este estimarea vectorilor $x(t)$ şi θ, măsurând $y(t)$ şi considerând că intrarea sistemului este vectorul măsurabil $u(t)$.

Atât timp cât matricele A, B, C din ecuaţia (1.478) nu sunt constante, estimarea cu ajutorul filtrului Kalman este dificilă sau poate chiar imposibilă. O idee ar fi obţinerea unui sistem extins prin înglobarea vectorului θ în cadrul vectorului de stare $x(t)$. Sistemul ar rămâne variabil în timp, pentru estimarea noului vector de stare fiind nevoie de observabilitatea şi uniformitatea sistemului [107]. Acesta este motivul pentru care utilizarea filtrului Kalman la sistemele extinse nu este o problemă simplă [246].

Proiectarea unui observer adaptiv pentru sistemele MIMO rezidă din necesitatea identificării on-line a sistemului, scopul principal fiind în acest caz estimarea vectorului parametrilor necunoscuţi. Pentru sistemul descris de ecuaţiile (1.478) este de dorit ca componentele vectorului parametrilor necunoscuţi să fie coeficienţii în cadrul unor semnale măsurabile. Această condiţie nu este restrictivă pentru că există unele transformări pentru aducerea sistemului la forma dorită. De exemplu, pentru sistemele SISO [246]

$$y^{(n)} = a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_n y + b_1 u^{(n-1)} + b_2 u^{(n-2)} + \cdots + b_n u \tag{1.479}$$

cu vectorul parametrilor necunoscuţi $\theta = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix}^T$.

Sistemul (1.478) poate fi scris sub forma [11]

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} y & 0 & \cdots & 0 & u & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y & \cdots & 0 & 0 & u & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & y & 0 & 0 & \cdots & u \end{bmatrix} \theta, \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} x. \end{cases} \tag{1.480}$$

O altă utilizare a observerelor adaptive o reprezintă controlul adaptiv. Datorită posibilităţii de estimare on-line a parametrilor şi a vectorului de stare, observerele adaptive pot fi integrate în controllere. O altă utilizare o constituie detecţia şi izolarea defectelor (FDI). Defectele sunt modelate ca modificări ale parametrilor. Observerele adaptive pentru sistemele liniare au fost studiate încă din 1970 [246]. În [156] un estimator de stare a fost propus, acesta utilizând un algoritm adaptiv ce presupune integrarea ecuaţiei erorii de estimare a stării. Câţiva ani mai târziu, alte observere adaptive cu convergenţă exponenţială au fost propuse [137]; ele se bazau pe minimizarea unui criteriu de performanţă. Observerele adaptive de ultimă generaţie se bazează pe o transformare dinamică, aducând sistemul original la o formă canonică [7], [11], [171].

Sistemele cu o singură ieşire, după transformare, au forma [246]

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = A_0 z(t) + Bu + \gamma \xi^T(t)\theta, \\ y(t) = c_0 z(t), \end{cases} \tag{1.481}$$

unde matricea A_0 şi vectorul c_0 au o formă specială, $\gamma \in \mathcal{M}^{n\times 1}$ – vector coloană (vector constant), $\xi(t) \in \mathcal{M}^{p\times 1}$ – vector al semnalelor ce se obţine prin filtrarea semnalelor $u(t)$ şi $y(t)$. Vectorul parametrilor necunoscuţi θ „afectează” ecuaţia de stare prin produsul scalar $\xi^T(t)\theta$ şi vectorul coloană γ.

Principalul element de noutate al algoritmului prezentat în continuare este însăşi proiectarea observerului pentru sistemele liniar variabile în timp de tip MIMO. Algoritmul Zhang [246], până în 2001, a fost doar al doilea algoritm ce estimează starea şi vectorul parametrilor necunoscuţi pentru sistemele MIMO şi LTV. Primul a fost cel al lui Besancon [11], însă cel al lui Zhang se caracterizează printr-o mai bună convergenţă şi simplitatea. De asemenea, Zhang a reuşit corelaţia, printr-o formulă de tip „unificare”, a mai multor observere adaptive bazate pe transformări dinamice [246].

Pentru proiectarea observerului Zhang, prima ecuaţie (1.478) se scrie

$$\dot{x}(t) = [A(t) - K(t)C(t)]x(t) + B(t)u(t) + K(t)y(t) + \psi(t)\theta, \tag{1.482}$$

unde $K(t)$ este matricea de amplificare a observerului. Vectorul de stare $x(t)$ este influenţat de 2 „excitaţii exogene” $B(t)u(t) + K(t)y(t)$ şi $\psi(t)\theta$. Se împarte $x(t)$ în două părţi $x_u(t)$ şi $x_\theta(t)$ [246] astfel:

$$x(t) = x_u(t) + x_\theta(t), \tag{1.483}$$

cu

$$\begin{cases} \dot{x}_u(t) = [A(t) - K(t)C(t)]\, x_u(t) + B(t)\, u(t) + K(t) y(t), \\ \dot{x}_\theta(t) = [A(t) - K(t)C(t)]\, x_\theta(t) + \psi(t)\theta; \end{cases} \tag{1.484}$$

$x_u(t)$ se estimează cu ajutorul observerului [246]

$$\dot{\hat{x}}_u(t) = [A(t) - K(t)C(t)]\, \hat{x}_u(t) + B(t)u(t) + K(t)y(t), \tag{1.485}$$

iar $x_\theta(t)$ se estimează cu estimatorul de stare

$$\dot{\hat{x}}_\theta(t) = [A(t) - K(t)C(t)]\, \hat{x}_\theta(t) + \psi(t)\hat{\theta} + \omega(t), \tag{1.486}$$

unde $\hat{\theta}(t)$ este estimarea lui θ, iar rolul şi semnificaţia lui $\omega(t)$ se vor prezenta mai târziu în cadrul demonstraţiei.

Se presupune că între $\hat{\theta}(t)$ şi $\hat{x}_\theta(t)$ există relaţia de legătură [246]

$$\hat{x}_\theta(t) = \Gamma(t)\,\hat{\theta}(t), \tag{1.487}$$

unde $\Gamma(t) \in \mathcal{M}^{n\times p}$. Din ecuaţiile (1.486) şi (1.487) rezultă

$$\dot{\Gamma}(t)\hat{\theta}(t) + \Gamma(t)\dot{\hat{\theta}}(t) = [A(t) - K(t)C(t)]\,\Gamma(t)\hat{\theta}(t) + \psi(t)\hat{\theta}(t) + \omega(t). \tag{1.488}$$

Dacă se consideră [246]: $\omega(t) = \Gamma(t)\dot{\hat{\theta}}(t)$, ecuaţia (1.488) devine

$$\dot{\Gamma}(t) = [A(t) - K(t)C(t)]\Gamma(t) + \psi(t); \tag{1.489}$$

$\psi(t)$ este matrice cunoscută, deci, prin integrarea ecuaţiei (1.489), se determină $\Gamma(t)$.

Vectorul de stare estimat va fi

$$\hat{x}(t) = \hat{x}_u(t) + \hat{x}_\theta(t) \tag{1.490}$$

şi, conform ecuaţiilor (1.485) şi (1.486), rezultă [246]

$$\dot{\hat{x}}(t) = [A(t) - K(t)C(t)]\hat{x}(t) + B(t)u(t) + K(t)y(t) + \psi(t)\hat{\theta}(t) + \Gamma(t)\dot{\hat{\theta}}(t). \tag{1.491}$$

Se va demonstra în continuare că pentru orice vector al parametrilor θ, un observer exponenţial poate fi proiectat pentru estimarea stării $x(t)$ a sistemului (1.478); aşadar, rezultă un observer adaptiv pentru estimarea simultană a vectorilor $x(t)$ şi θ.

Se lucrează în următoarele 2 ipoteze (presupuneri):

Ipoteza 1 [246]

Se presupune că perechea de matrice $(A(t), C(t))$ este de aşa natură încât, pentru $K(t) \in \mathcal{M}^{n\times m}$ – matrice variabilă în timp şi mărginită, sistemul

$$\dot{\eta}(t) = [A(t) - K(t)C(t)]\eta(t) \tag{1.492}$$

este stabil.

Ipoteza 2 [246]

Fie $\Gamma(t) \in \mathcal{M}^{n\times p}$ – matrice a semnalelor generate de ecuaţia diferenţială (1.489). Presupunem că $\psi(t)$ este permanent excitantă astfel încât există 2 constante pozitive δ, T şi o matrice simetrică şi pozitiv definită $\Sigma(t) \in \mathcal{M}^{m\times m}$ astfel încât $(\forall)t$, următoarea inegalitate este valabilă

$$\int_t^{t+T} \Gamma^T(\tau)C^T(t)\Sigma(t)C(t)\Gamma(\tau)d\tau \geq \delta I. \tag{1.493}$$

Ipoteza 1 precizează că, pentru orice vector al parametrilor θ, un observer de stare poate fi proiectat pentru sistemul (1.478) utilizând matricea de amplificare $K(t)$. Ipoteza 2 este o condiţie de excitaţie permanentă şi este necesară pentru estimarea celor doi vectori. Proiectarea observerului se bazează pe următoarea teoremă [246]:

Teorema 7

Considerăm $M \in \mathcal{M}^{p\times p}$ – orice matrice simetrică şi pozitiv definită. Dacă sunt valabile ipotezele 1 şi 2, pentru orice vector constant θ, estimarea vectorului de stare $x(t)$ şi a vectorului parametrilor necunoscuţi θ se face cu ecuaţiile [246]

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t) + \psi(t)\hat{\theta}(t) + \left[K(t) + \Gamma(t)M\Gamma^T(t)C^T(t)\Sigma(t)\right]\left[y(t) - C(t)\hat{x}(t)\right], \\ \dot{\hat{\theta}}(t) = M\Gamma^T(t)C^T(t)\Sigma(t)\left[y(t) - C\hat{x}(t)\right], \end{cases} \tag{1.494}$$

ecuaţii asociate unui observer adaptiv exponenţial pentru sistemul (1.478); pentru orice condiţii iniţiale $x(t_0), \hat{x}(t_0), \hat{\theta}(t_0)$ şi $(\forall)\theta \in \mathcal{M}^{p\times 1}$, erorile $\hat{x}(t) - x(t)$ şi $\hat{\theta}(t) - \theta(t)$ tind exponenţial la zero când $t \to \infty$. Ecuaţiile (1.494) conduc la ecuaţia (1.491).

Pentru a demonstra teorema se utilizează două leme:

Lema 4 [246]

Fie $\Phi(t) \in \mathcal{M}^{m\times p}$ – matrice continuă şi $M \in \mathcal{M}^{p\times p}$ – matrice simetrică şi pozitiv definită. Dacă există constantele pozitive T, α, β astfel încât $(\forall)t$ este valabilă inegalitatea

$$\alpha I \le \int_t^{t+T} \Phi^T(\tau)\Phi(\tau)\mathrm{d}\tau \le \beta I, \tag{1.495}$$

atunci sistemul

$$\dot{z}(t) = -M\Phi^T(t)\Phi(t)z(t) \tag{1.496}$$

este exponenţial stabil.

Lema 5 [246]

Dacă sistemul liniar şi variabil în timp

$$\dot{\zeta}(t) = F(t)\zeta(t) \tag{1.497}$$

este exponenţial stabil, $u(t)$ – semnal mărginit şi integrabil şi $\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$, atunci $z(t)$ descris de ecuaţia

$$\dot{z}(t) = F(t)z(t) + u(t) \tag{1.498}$$

va converge la zero $\left(\lim_{t\to\infty} z(t) = 0\right)$.

Demonstraţia celor două leme sunt prezentate pe larg în [246]. Pentru demonstraţia teoremei 7, pentru început, se elimină $M\Gamma^T(t)C^T(t)\Sigma(t)[y(t) - C\hat{x}(t)]$ între cele două ecuaţii (1.494) şi se obţine [246]

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + \psi\hat{\theta} + K(y - C\hat{x}) + \Gamma\dot{\hat{\theta}}. \tag{1.499}$$

Fie

$$\tilde{x} = \hat{x} - x, \tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta \tag{1.500}$$

şi, ţinând seama că $\dot{\theta} = 0 \Leftrightarrow \dot{\tilde{\theta}} = \dot{\hat{\theta}}$, rezultă

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + \psi\hat{\theta} + K(y - C\hat{x}) + \Gamma\dot{\hat{\theta}}, \\ \dot{x} = Ax + Bu + \psi\theta \end{cases} \tag{1.501}$$

sau, prin scăderea celor două ecuaţii de mai sus,

$$\dot{\tilde{x}} = (A - KC)\tilde{x} + \psi\tilde{\theta} + \Gamma\dot{\tilde{\theta}}. \tag{1.502}$$

Se defineşte $\eta(t)$ ca o combinaţie liniară a vectorilor eroare $\tilde{x}(t)$ şi $\tilde{\theta}(t)$ [246]

$$\eta(t) = \tilde{x}(t) - \Gamma(t)\tilde{\theta}(t). \tag{1.503}$$

Derivând ecuaţia (1.503) se obţine

$$\dot{\eta} = (A - KC)\eta + \left[(A - KC)\Gamma + \Psi - \dot{\Gamma}\right]\tilde{\theta}. \tag{1.504}$$

Din ecuaţia (1.489) rezultă $\dot{\Gamma} = (A - KC)\Gamma + \psi$ şi ecuaţia (1.504) devine

$$\dot{\eta} = (A - KC)\eta . \tag{1.505}$$

Lucrând în ipoteza 1, sistemul (1.505) este stabil şi convergent la zero $\left(\lim_{t\to\infty} \eta(t) = 0\right)$. În continuare se calculează $\dot{\tilde{\theta}}$ [246]

$$\dot{\tilde{\theta}} = \dot{\hat{\theta}} - \dot{\theta} = \dot{\hat{\theta}} \overset{(1.494)}{=} M\Gamma^T C^T \Sigma(y - C\hat{x}) = -M\Gamma^T C^T \Sigma C\tilde{x} \overset{(1.503)}{=} -M\Gamma^T C^T \Sigma C\left(\eta + \Gamma\tilde{\theta}\right). \tag{1.506}$$

Aşadar, partea omogenă a sistemului (1.506) este

$$\dot{\tilde{\theta}} = -M\Gamma^T C^T \Sigma C\Gamma\tilde{\theta} . \tag{1.507}$$

Dacă ψ - mărginită, iar Γ este generată de sistemul exponenţial stabil (1.489), rezultă Γ - mărginită. Din condiţia (1.493) a excitaţiei permanente şi din Lema 4, cu $\Phi = \Sigma^{1/2}C\Gamma$, rezultă că sistemul (1.507) este stabil [246]. S-a arătat că sistemul (1.507) este exponenţial stabil şi $\lim_{t\to\infty} \eta(t) = 0$; rezultă, conform lemei 5, cu $F = -M\Gamma^T C^T \Sigma C\Gamma$, $\lim_{t\to\infty} \tilde{\theta}(t) = 0$. Deoarece $\eta \to 0, \tilde{\theta} \to 0,$ conform (1.503), rezultă $\tilde{x} \to 0$ [246].

Dacă condiţia de excitaţie (ipoteza 2) nu este îndeplinită, algoritmul nu garantează că $\tilde{\theta}(t) \to 0$ şi $\tilde{x}(t) \to 0$. Se poate doar arăta că $C(t)\tilde{x}(t) \to 0$ [248], adică convergenţa la zero doar a erorii de predicţie $C(t)\hat{x}(t) - y(t)$. Matricea $K(t)$ stabilizează procesul de estimare a stării; $\Sigma(t)$ poate fi orice matrice mărginită şi pozitiv definită, iar M poate fi orice matrice constantă şi pozitiv definită. Alegerea celor două matrice influenţează viteza de estimare a stării şi a vectorului necunoscutelor θ [246].

Teorema 7 de proiectare a observerului adaptiv presupune, în prealabil, calculul matricei $K(t)$. În cazul sistemelor variabile în timp, acest lucru nu este uşor de realizat; se poate folosi metodologia de la filtrul Kalman pentru determinarea matricei $K(t)$, însă anumite condiţii trebuie respectate [246]. Astfel,

$$K(t) = P(t)C^T(t)R^{-1}(t), \tag{1.508}$$

unde $P(t)$ este soluţia ecuaţiei Riccati

$$\dot{P}(t) = A(t)P(t) + P(t)A^T(t) - P(t)C^T(t)R^{-1}(t)C(t)P(t) + Q(t), \tag{1.509}$$

în care $Q \in \mathcal{M}^{n\times n}$, $R \in \mathcal{M}^{m\times m}$ sunt matrice simetrice şi pozitiv definite.

O altă metodă de determinare a matricei $K(t)$ ar putea fi tehnica poziţionării polilor pentru a se obţine o matrice (A-KC) stabilă [246]. Schema bloc a ansamblului sistem - observer adaptiv Zhang (Fig. 1.31) se construieşte utilizând ecuaţiile (1.478), (1.489), (1.494), (1.508) şi (1.509).

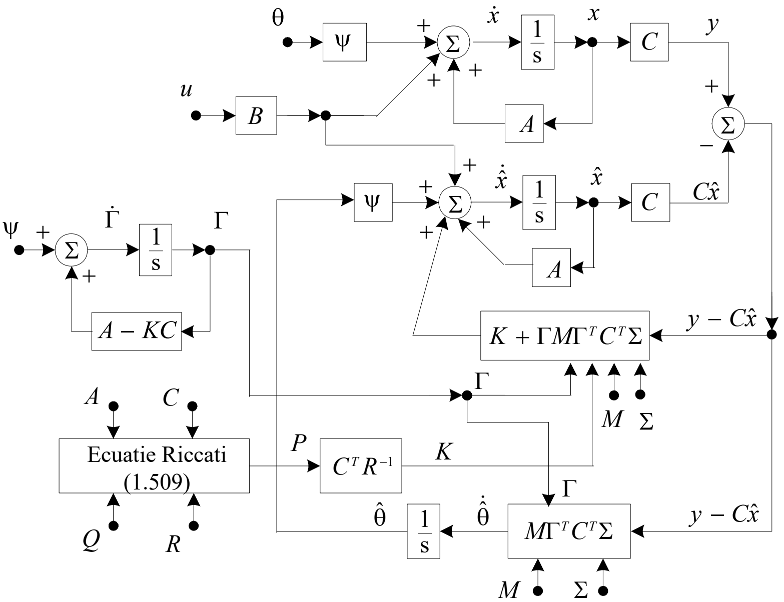

Fig. 1.31. Schema bloc a ansamblului sistem – observer adaptiv Zhang

În cele ce urmează, se validează algoritmul Zhang de proiectare a observerelor adaptive pentru două cazuri concrete ale mişcărilor longitudinală, respectiv laterală ale aeronavelor.

Pentru început, se consideră mişcarea longitudinală a unei aeronave, descrisă de ecuaţia în variabile adimensionale [157]

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{V}} \\ \dot{\hat{\alpha}} \\ \dot{\hat{\theta}} \\ \dot{\hat{\omega}}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.026 & 0.025 & -0.1 & 0 \\ -0.36 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.4212 & -38.49 & 0 & -3.67 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{V} \\ \hat{\alpha} \\ \hat{\theta} \\ \hat{\omega}_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \delta_p , \qquad (1.510)$$

unde

$$\hat{V} = \frac{\Delta V}{V^*}, \hat{t} = \frac{t}{\tau_a}, \hat{\omega}_y = \frac{\bar{b}}{V^*}\omega_y, \hat{\theta} = \Delta\theta, \hat{\alpha} = \Delta\alpha; \quad (1.511)$$

$\tau_a = 2.1\sec$ - constanta de timp aerodinamică. Programul Matlab ce urmăreşte pas cu pas algoritmul Zhang (mişcarea longitudinală) este prezentat în anexa A1.7. Programul apelează modelul Matlab/Simulink *Zhang_sch_long* (Fig. 1.32) - model ce a fost construit pe baza schemei bloc din Fig. 1.31.

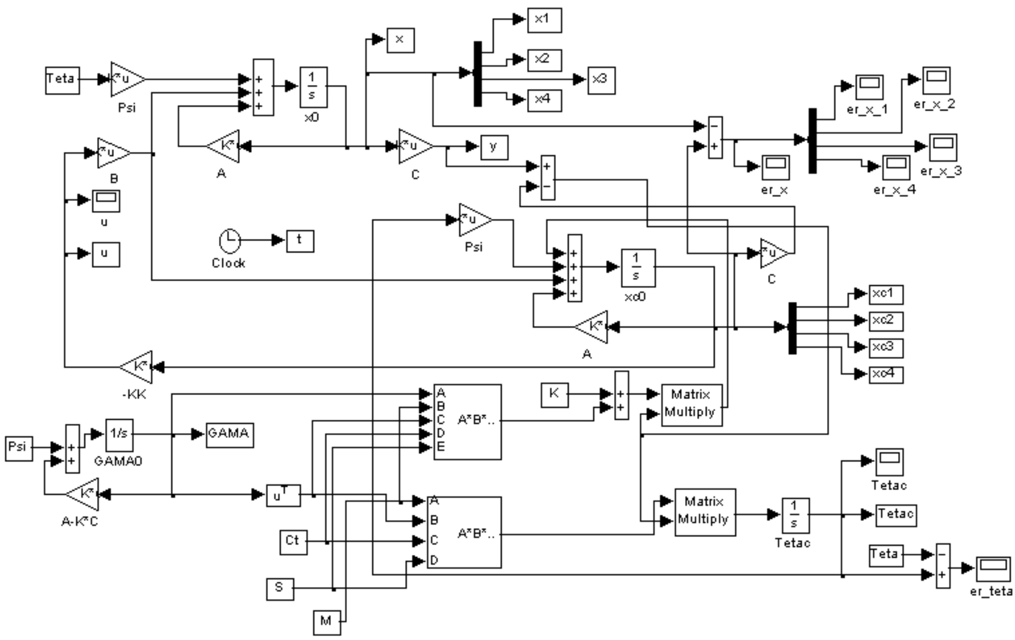

Fig. 1.32. Modelul Matlab/Simulink (*Zhang_sch_long*) asociat mişcării longitudinale

Ca mărime de intrare a sistemului (u) se poate considera un semnal de tip treaptă unitate, un semnal de tip sinusoidal sau orice alt semnal de tip aleator. În cadrul simulării s-a calculat, prin intermediul algoritmului ALGLX [157], matricea de amplificare a sistemului $\bar{K}$ şi s-a considerat ca vector de intrare $u = \delta_p = -\bar{K}\hat{x}$. Prin rularea programului se obţin caracteristicile grafice din Fig. 1.33 (dependenţele de timp ale erorilor de estimare a vectorului de stare $\tilde{x}_i, i = \overline{1,4}$, variaţia în timp a erorii de estimare a vectorului parametrilor necunoscuţi $\tilde{\theta}$ şi variaţia în timp a vectorului θ) şi

Fig. 1.34 (cele 4 componente ale vectorului de stare $x_i, i = \overline{1,4}$ – cu linie continuă şi cele 4 componente ale vectorului de stare estimat $\hat{x}_i, i = \overline{1,4}$ – cu linie întreruptă).

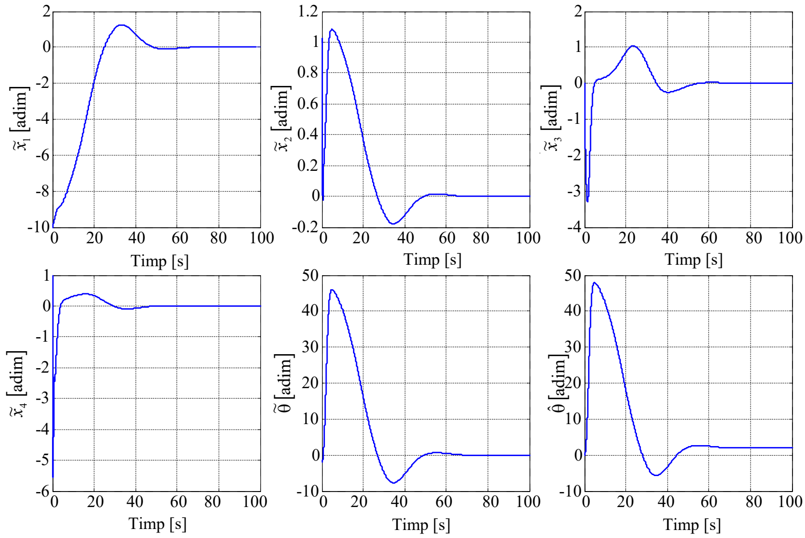

Fig. 1.33. Erorile de estimare a stării şi vectorului parametrilor necunoscuţi (mişcarea longitudinală)

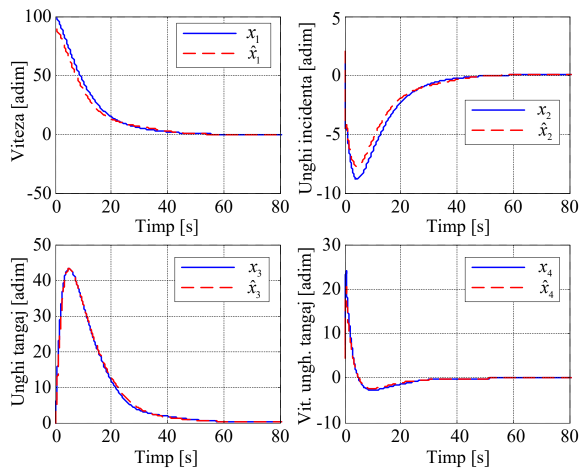

Fig. 1.34. Variabile de stare (x_i) şi variabilele de stare estimate $(\hat{x}_i)$ - mişcarea longitudinală

După cum se poate observa, erorile de estimare a vectorului de stare şi vectorului parametrilor necunoscuţi tind către zero, iar graficele variabilelor de stare $x_i, i = \overline{1,4}$ se suprapun peste graficele variabilelor de stare estimate $\hat{x}_i, i = \overline{1,4}$. Singurul inconvenient al algoritmului pare să fie valoarea ridicată a duratei regimului tranzitoriu. În realitate, procesul este mult mai rapid, în cadrul simulării alegerea matricelor M, Σ, Q şi R influenţând mult caracteristicile dinamice ale sistemului. Algoritmul Zhang nu stabileşte o modalitate de alegere a acestor matrice pentru o convergenţă cât mai rapidă, lucru care reprezintă un dezavantaj al metodei. Vectorul parametrilor necunoscuţi are în acest caz o singură componentă şi anume θ=2. Matricea $\overline{K}$ din legea de conducere $u = \delta_p = -\overline{K}\hat{x}$ (notată cu *KK* în cadrul modelului Matlab/ Simulink) se determină prin rularea programului Matlab *prog1sec.*

În continuare, se studiază mişcarea laterală a unui avion Boeing 747 - ecuaţia (1.49). Programul Matlab ce urmăreşte pas cu pas algoritmul Zhang (mişcarea laterală) este similar celui din anexa A1.7. Programul apelează modelul Matlab/ Simulink *Zhang_sch_lat* - model similar celui din Fig. 1.32. În cadrul simulării s-a calculat, prin intermediul algoritmului ALGLX [157], matricea de amplificare a sistemului $\overline{K}$ şi s-a considerat ca vector de intrare $u = [\delta_d \;\; \delta_e]^T = -\overline{K}\hat{x}$. Matricea $\overline{K}$ se determină prin rularea programului Matlab *prog3sec*.

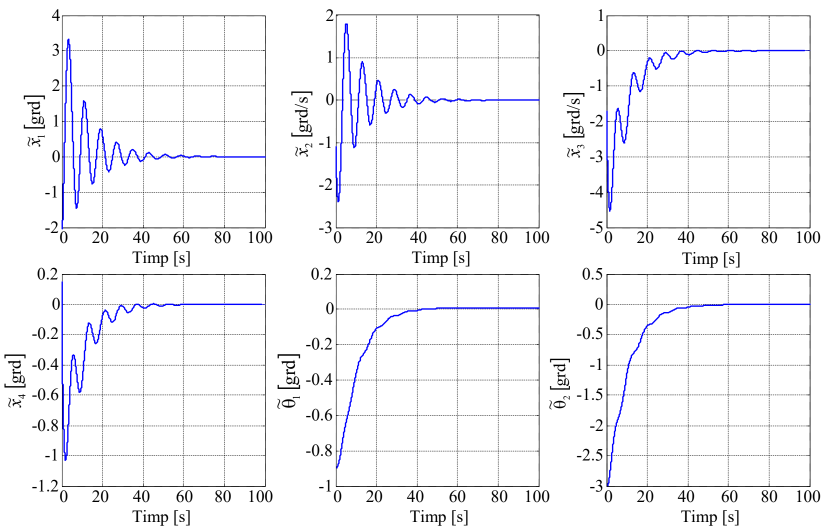

Fig. 1.35. Erorile de estimare a stării şi vectorului parametrilor necunoscuţi (mişcarea laterală)

Rulând programul, se obţin caracteristicile grafice din Fig. 1.35 (dependenţele de timp ale erorilor de estimare a vectorului de stare $\tilde{x}_i, i = \overline{1,4}$ şi variaţia în timp a erorii de estimare a vectorului parametrilor necunoscuţi $\tilde{\theta}$) şi Fig. 1.36 (cele 4 componente ale vectorului de stare $x_i, i = \overline{1,4}$ – cu linie continuă şi cele 4 componente ale vectorului de stare estimat $\hat{x}_i, i = \overline{1,4}$ – cu linie întreruptă). Vectorul parametrilor necunoscuţi are în acest caz 2 componente - $\theta = [0.9 \quad 3]^T$.

Se pot face aceleaşi observaţii ca în cazul mişcării longitudinale cu privire la convergenţa estimatorului de stare adaptiv şi viteza de convergentă a acestuia.

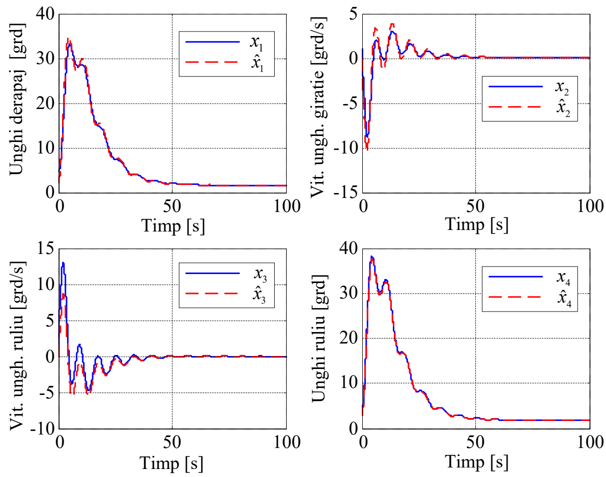

Fig. 1.36. Variabile de stare (x_i) şi variabilele de stare estimate $(\hat{x}_i)$ - mişcarea laterală

1.9. PROIECTAREA OBSERVERELOR ADAPTIVE BAZATE PE REŢELE NEURONALE

1.9.1. NEURO-OBSERVER ADAPTIV PENTRU SISTEME NELINIARE

În cele ce urmează se proiectează un observer pentru sistemele neliniare ce utilizează reţele neuronale (NN) [145]. Acesta va avea în componenţă o reţea neuronală de tip feed-forward, cu 3 straturi de neuroni, ce va fi antrenată cu algoritmul de propagare inversă a erorii utilizându-se un termen de corecţie ce garantează buna antrenare a reţelei neuronale. Stabilitatea neuro-observerului obţinut se analizează utilizându-se metoda directă a lui Lyapunov [145].

În multe cazuri, doar intrarea (intrările) şi ieşirea (ieşirile) unui sistem sunt măsurabile şi, de aceea, estimarea variabilelor de stare joacă un rol important în controlul procesului [66], [225]. În ultimii ani au fost propuse numeroase observere neliniare precum observerele cu amplificare mare (high-gain observer), „sliding mode observers" [1], [2], [105] etc.; acestea sunt însă complexe şi pot fi utilizate pentru sisteme la care se cunoaşte structura. Utilizarea NN în identificarea şi controlul sistemelor dinamice este pe larg prezentată în articolele de specialitate [181], [175], [204]. Rezultatele bune pe care le au reţelele neuronale se datorează capacităţii lor de aproximare a funcţiilor neliniare [186], [190].

Majoritatea sistemelor sunt neliniare şi este dificilă proiectarea unui controller sau observer. Până în prezent, tehnicile de liniarizare au fost folosite pentru depăşirea acestor inconveniente. Liniarizarea limitează însă performanţele controllerului sau observerului proiectat; în astfel de cazuri se folosesc reţelele neuronale pentru aproximarea funcţiilor neliniare [145].

Pentru reţeaua neuronală a neuro-observerului (fig. 1.37) se alege o configuraţie feed-forward cu 3 straturi de neuroni (un singur strat ascuns). Fiecare neuron de intrare este conectat printr-o pondere cu fiecare neuron din stratul ascuns, iar fiecare neuron din stratul ascuns este conectat printr-o pondere cu neuronii de ieşire. Astfel, ieşirea neuronului j din stratul ascuns este [145]

$$a_j = \sigma(z_j) \tag{1.512}$$

cu

$$z_j = \sum_i v_{ji} x_i + \mu_j ; \tag{1.513}$$

v_{ji} este ponderea între intrarea i şi neuronul j din stratul ascuns, μ_j – biasul pentru neuronul j din stratul ascuns, iar $\sigma(\cdot)$ este funcţia de activare a neuronilor din stratul ascuns (funcţia sigmoidală)

$$\sigma(z_j) = \frac{1}{1 + e^{-z_j}};\qquad(1.514)$$

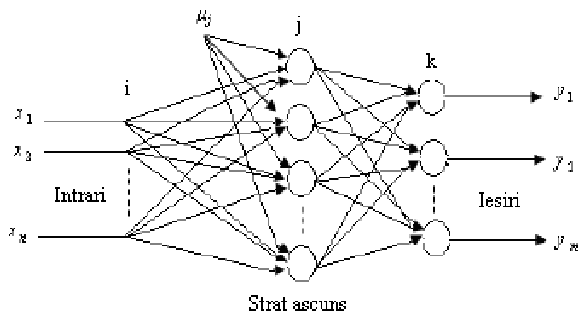

Fig. 1.37. Structura NN din cadrul neuro-observerului

Ieşirea neuronului k din stratul de ieşire este

$$y_k = \sum_j w_{kj} a_j ;\qquad(1.515)$$

w_{ij} este ponderea între neuronul j din stratul ascuns şi neuronul de ieşire k.

Dacă NN are n neuroni de intrare (pseudo-neuroni), s neuroni pe stratul ascuns şi m neuroni de ieşire, ecuaţia asociată reţelei neuronale se poate scrie şi sub formă matriceală considerând vectorul intrărilor $x^T = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]$, vectorul ieşirilor $y^T = [y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_m]$ şi matricele ponderilor şi biasurilor $W^T = \lfloor w_{kj} \rfloor, V = \lfloor v_{ji} \rfloor$, $\mu = [\mu_1 \ \mu_2 \ \cdots \ \mu_s]$. Vectorul biasurilor μ poate fi inclus ca primă coloană în matricea V. Astfel, $W \in \mathcal{M}^{s \times m}, V \in \mathcal{M}^{s \times n}$ şi ieşirea y a NN are forma [145]

$$y = W^T \sigma(V^T x).\qquad(1.516)$$

Există câţiva algoritmi pentru antrenarea NN; cel mai des utilizat este algoritmul de propagare inversă a erorii [69]. Antrenarea este astfel privită ca o problemă de optimizare a unei funcţii neliniare. Se vor modifica permanent ponderile şi biasul reţelei neuronale astfel încât să se minimizeze eroarea medie pătratică dintre ieşirea NN şi ieşirea dorită a NN [175].

În cele ce urmează, se proiectează un neuro-observer pentru estimarea stării; în cadrul său, o reţea neuronală este folosită pentru estimarea funcţiei neliniare necunoscute. Se consideră sistemul [145]

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + g(x,u), \\ y(t) = Cx(t); \end{cases} \tag{1.517}$$

$x(t) \in \mathcal{M}^{n\times 1}$ este vectorul de stare, $u(t) \in \mathcal{M}^{m_u \times 1}$ – vectorul intrărilor, $y(t) \in \mathcal{M}^{m_y \times 1}$ – vectorul ieşirilor, $g(x,u)$ – funcţie neliniară necunoscută. Matricea A este o matrice Hurwitz, iar perechea (A, C) trebuie să fie observabilă pentru a putea fi construit neuro-observerul. Se proiectează estimatorul de stare descris de ecuaţia [145]

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + \hat{g}(\hat{x},u) + L(y - \hat{y}), \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t), \end{cases} \tag{1.518}$$

unde $\hat{x}$ – starea observerului şi $\hat{y}$ – ieşirea observerului pentru sistemul neliniar. Matricea de amplificare L a observerului se alege astfel încât (A-LC) să fie matrice Hurwitz (stabilă). Schema bloc a neuro-observerului este cea din fig. 1.38 [145].

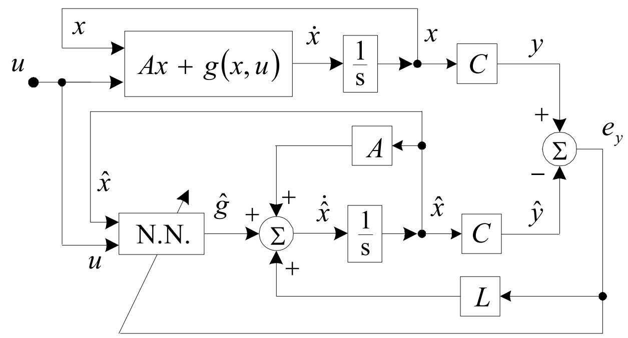

Fig. 1.38. Schema bloc a neuro-observerului

După cum se observă în fig. 1.38, o reţea neuronală este utilizată pentru estimarea funcţiei neliniare necunoscute g. Principala proprietate a NN, utilizată aici, este deci aproximarea funcţiilor [82].

Se consideră funcţia $\gamma(x): R^n \to R^m$; s-a arătat în [203] că pentru un număr suficient de neuroni din stratul ascuns (s) există ponderile şi biasul astfel încât orice funcţie continuă pe un set compact poate fi reprezentată astfel [225]:

$$\gamma(x) = W\sigma(Vx) + \varepsilon(x), \tag{1.519}$$

unde $\varepsilon(x)$ este eroarea de aproximare a funcţiei neliniare; $\|\varepsilon(x)\| \leq \varepsilon_N$. Mai mult, pentru $\varepsilon_N > 0$ se poate găsi o reţea neuronală astfel încât $\|\varepsilon(x)\| \leq \varepsilon_N\ (\forall)x$ [149], [203]. Se presupune că ponderile W şi V sunt mărginite de valori cunoscute astfel încât $\|W\| \leq W_M$ şi $\|V\| \leq V_M$ [132], [149]. În concluzie, funcţia $g(x, u)$, din prima ecuaţie (1.517), poate fi aproximată de o NN cu matricele ponderilor W şi V [145]

$$g(x, u) = W\sigma(Vz) + \varepsilon(x), \tag{1.520}$$

unde $z = [x\ u]$ şi $\varepsilon(x) = g(x, u) - \hat{g}(\hat{x}, u)$. Estimata $\hat{g}(\hat{x}, u)$ a funcţiei $g(x, u)$ se scrie

$$\hat{g}(\hat{x}, u) = \hat{W}\sigma(\hat{V}\hat{z}), \tag{1.521}$$

unde $\hat{z} = [\hat{x}\ u]$.

Aşadar, ecuaţiile neuro-observerului (1.518) devin

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + \hat{W}\sigma(\hat{V}\hat{z}) + L(y - \hat{y}), \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t). \end{cases} \tag{1.522}$$

Se definesc erorile

$$e_x = x - \hat{x}, e_y = y - \hat{y}, e_W = W - \hat{W} \tag{1.523}$$

şi, utilizând ecuaţiile (1.517), (1.520) şi (1.522), rezultă [145]

$$\dot{e}_x = Ge_x + e_W\sigma(\hat{V}\hat{z}) + \xi(t), \tag{1.524}$$

unde

$$G = A - LC, \xi(t) = W\left[\sigma(Vz) - \sigma(\hat{V}\hat{z})\right] + \varepsilon(x); \tag{1.525}$$

$\xi(t)$ este termen de tip perturbaţie mărginită; $\|\xi(t)\| \leq \overline{\xi} = ct.$ datorită mărginirii funcţiei şi matricelor ponderilor W şi V [229]. În consecinţă,

$$\begin{cases} \dot{e}_x(t) = Ge_x(t) + e_W \sigma(\hat{V}\hat{z}) + \xi(t), \\ \dot{e}_y(t) = Ce_x(t). \end{cases} \tag{1.526}$$

Pentru antrenarea NN este nevoie de o regulă (lege) de învăţare astfel încât să fie garantată stabilitatea observerului. Mai mult, mecanismul de actualizare a ponderilor, folosind tehnica Lyapunov standard, se bazează pe algoritmul propagării inverse a erorii în cadrul căruia s-au mai adăugat câţiva termeni pentru stabilitatea observerului şi a erorilor asociate ponderilor NN [145]. Actualizarea ponderilor este prezentată în [2], făcându-se în cadrul lucrării [145] câteva modificări asupra ecuaţiilor diferenţiale asociate ponderilor NN. Mai mult, termenii corecţie sunt preluaţi din [203]. Astfel, în cadrul lucrării [145], s-au obţinut următoarele ecuaţii diferenţiale pentru determinarea ponderilor $\hat{W}$ şi $\hat{V}$ [145]:

$$\begin{cases} \dot{\hat{W}} = Se_x\sigma^T(\hat{V}\hat{z}) - k\|e_x\|S\hat{W}, \\ \dot{\hat{V}} = \left[\hat{W}\sigma(\hat{V}\hat{z})(1-\sigma(\hat{V}\hat{z}))\right]^T Fe_x\hat{z}^T - k\|e_x\|F\hat{V}, \end{cases} \tag{1.527}$$

unde matricele simetrice şi pozitiv definite S şi F (S=S^T>0, F=F^T>0) au expresiile

$$S = -\eta_1 G^{-T}C^T C, F = -\eta_2 G^{-T}C^T C; \tag{1.528}$$

$\eta_1, \eta_2 > 0$ sunt ratele de învăţare ale NN, iar $k > 0$ este o constantă pozitivă mică.

Introducerea matricelor S şi F în ecuaţiile (1.527) permite simplificarea studiului stabilităţii neuro-observerului. Acest studiu este prezentat pe larg în [145] şi, în cele ce urmează, nu se insistă pe el.

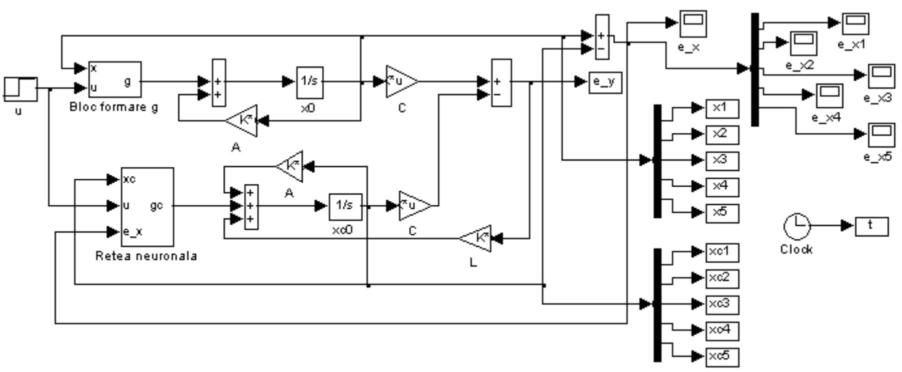

Fig. 1.39. Modelul Matlab/Simulink al neuro-observerului

Testarea algoritmului mai sus prezentat pentru estimarea stării unui sistem neliniar utilizând un neuro-observer (observer cu reţea neuronală) se face, în continuare, pentru cazul mişcării longitudinale a unui avion cu unghi de incidenţă mare. Astfel, dinamica mişcării longitudinale, în general instabile, a unui astfel de avion este descrisă în [56] şi [165] de ecuaţia de stare

$$\dot{x} = Af(x) + Bu, \tag{1.529}$$

în care

$$f^T(x) = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_2x_5 \ x_1^{1/3} \ x_1^3 \ x_2^{1/3} \ x_2^2 \ x_2^3 \ x_3^{1/3} \ x_3^3 \ x_4^3 \ x_5^3], \tag{1.530}$$

$x_1 = \Delta V, x_2 = \Delta\alpha, x_3 = \Delta\omega_y$, $x_4 = \Delta c_p$ (variaţia coeficientului de portanţă), $x_5 = \Delta C_m$ (variaţia coeficientului momentului aerodinamic de tangaj), $u = \delta_p$ (bracajul profundorului) şi

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & 0 & a_{3,5} & a_{3,6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & 0 & 0 & a_{4,7} & a_{4,8} & a_{4,9} & a_{4,10} & a_{4,11} & a_{4,12} & a_{4,13} & a_{4,14} & 0 \\ a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3} & 0 & a_{5,5} & 0 & a_{5,7} & a_{5,8} & a_{5,9} & a_{5,10} & a_{5,11} & a_{5,12} & a_{5,13} & 0 & a_{5,15} \end{bmatrix}, \tag{1.531}$$

$$B^T = [b_{11} \ b_{12} \ b_{13} \ b_{14} \ b_{15}].$$

Modelul anterior este echivalent cu următorul:

$$\dot{x} = Ax + g(x,u), u = \delta_p, x^T = \lfloor \Delta V \ \ \Delta\alpha \ \ \Delta\omega_y \ \ \Delta c_p \ \ \Delta C_m \rfloor, \tag{1.532}$$

unde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & 0 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & 0 & a_{55} \end{bmatrix}, g(x,u) = \begin{bmatrix} b_{11}u \\ b_{12}u \\ b_{13}u + g_3(x) \\ b_{14}u + g_4(x) \\ b_{15}u + g_5(x) \end{bmatrix}, \tag{1.533}$$

$$\begin{aligned} g_3(x) &= a_{36}x_2x_5, \\ g_4(x) &= a_{47}x_1^{1/3} + a_{48}x_1^3 + a_{49}x_2^{1/3} + a_{4,10}x_2^2 + a_{4,11}x_2^3 + a_{4,12}x_3^{1/3} + a_{4,13}x_3^3 + a_{4,14}x_4^3, \\ g_5(x) &= a_{57}x_1^{1/3} + a_{58}x_1^3 + a_{59}x_2^{1/3} + a_{5,10}x_2^2 + a_{5,11}x_2^3 + a_{5,12}x_3^{1/3} + a_{5,13}x_3^3 + a_{5,15}x_5^3 . \end{aligned} \tag{1.534}$$

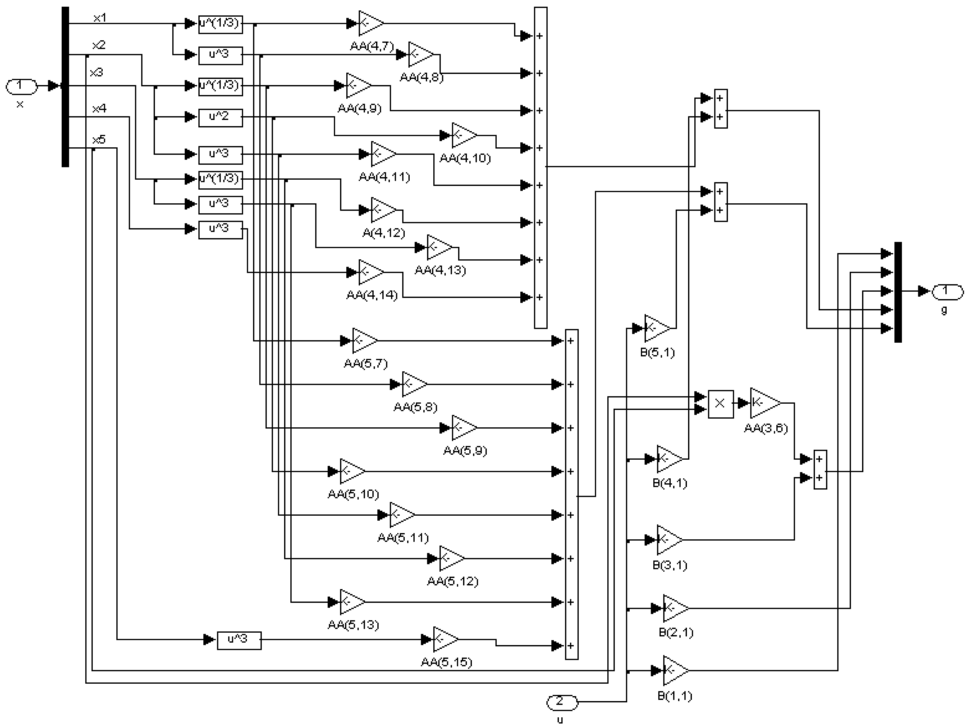

Fig. 1.40. Modelul Matlab/Simulink al subsistemului „*Bloc formare g*”

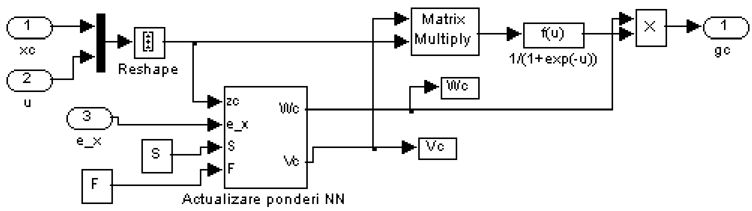

Fig. 1.41. Modelul Matlab/Simulink al subsistemului „*Retea neuronala*”

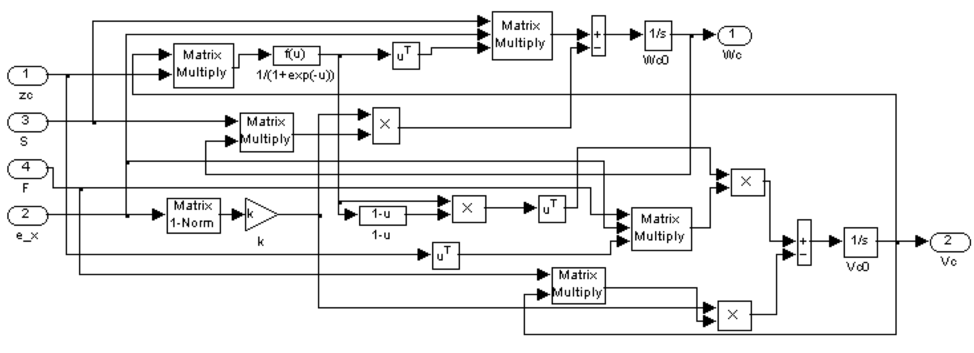

Fig. 1.42. Modelul Matlab/Simulink al subsistemului „*Actualizare ponderi NN*”

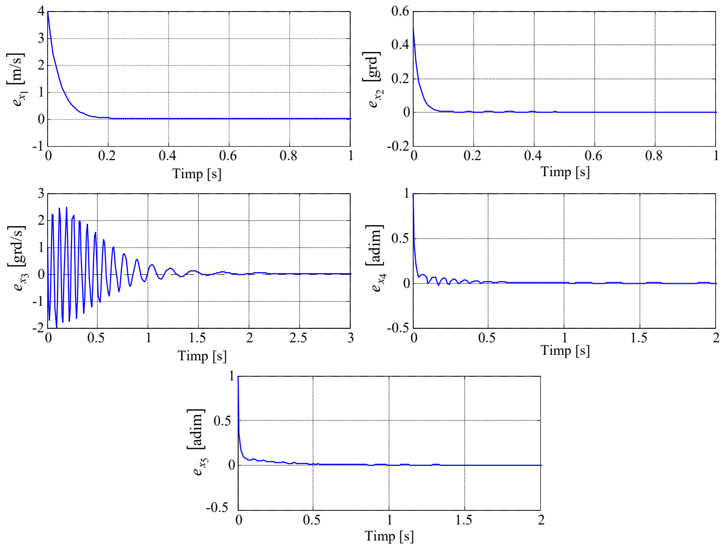

Fig. 1.43. Cele 5 componente ale erorii de estimare

Validarea algoritmului s-a făcut utilizând mediul Matlab/Simulink. În acest sens, s-a elaborat programul Matlab din anexa A1.8 şi modelul Matlab/Simulink din fig. 1.39. În cadrul modelului Matlab/Simulink din fig. 1.39 se observă prezenţa a două subsisteme: *Bloc formare g* (subsistemul prin intermediul căruia se construieşte vectorul g utilizând vectorul de stare x şi vectorul intrărilor u - ecuaţia (1.533)) – fig. 1.40 şi *Retea neuronala* (subsistemul prin care se aproximează funcţia neliniară g; acest subsistem are 3 intrări: $\hat{x}$ (xc), u (u) şi e_x (e_x), precum şi o singură ieşire $\hat{g}$ (gc)) - fig.2.41. Subsistemul *Retea neuronala* are, la rândul ei, un subsistem - *Actualizare ponderi NN* (fig. 1.42). Acesta calculează ponderile $\hat{W}$ şi $\hat{V}$ (Wc şi Vc) utilizând, conform ecuaţiilor (1.527), semnalele $\hat{z}$ (zc), e_x (e_x) şi matricele S, F. Structura NN a fost aleasă astfel: reţea neuronală feed-forward, cu 3 straturi (stratul de intrare conţine 6 neuroni, stratul ascuns are 5 neuroni, iar stratul de ieşire are un singur neuron). Funcţia de activare utilizată pentru neuronul din stratul de ieşire este funcţia sigmoidală. Ponderile $\hat{W}$ şi $\hat{V}$ se actualizează la fiecare pas de calcul, în final rezultând:

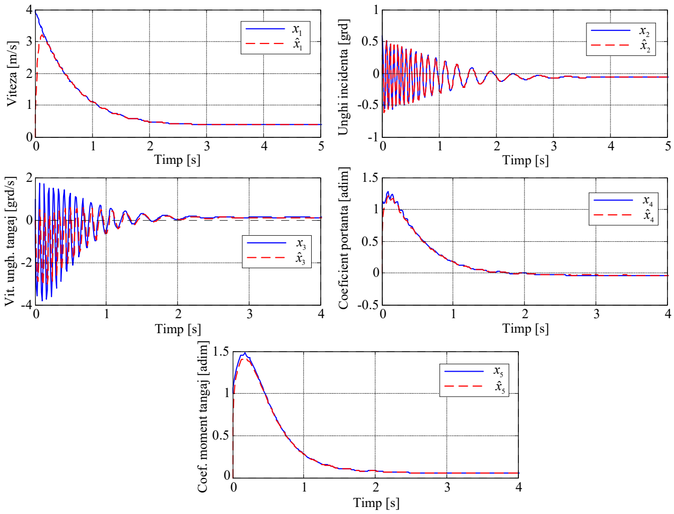

Fig. 1.44. Variabilele de stare (x_i) şi variabilele de stare estimate $(\hat{x}_i)$

$$\hat{W}^T = [1.162 \;\; 1.173 \;\; -0.035 \;\; 0.325 \;\; 0.173],$$

$$\hat{V} = \begin{bmatrix} -0.179 & 0.11 & 0.284 & 0.836 & -0.387 & 0.651 \\ 0.716 & 1.052 & -1.318 & 1.237 & 0.68 & 1.175 \\ -0.581 & 0.058 & 0.707 & -1.579 & 0.809 & -1.191 \\ 2.168 & -0.095 & 1.612 & -1.431 & 0.707 & -0.019 \\ -0.135 & -0.827 & -0.688 & 0.568 & 1.283 & -0.155 \end{bmatrix}; \qquad (1.535)$$

prima coloană a matricei ponderilor $\hat{V}$ este vectorul biasurilor pentru neuronii din stratul ascuns. Reţeaua neuronală a neuro-observerului estimează funcţia neliniară necunoscută $g(x, u)$, urmând ca apoi neuro-observerul să estimeze vectorul de stare x, calculând $\hat{x}$. Sunt reprezentate în acelaşi sistem de axe (fig. 1.44) dependenţele de timp ale celor 5 variabile de stare $\left(x_i, i = \overline{1,5}\right)$ şi ale celor 5 variabile de stare estimate $\left(\hat{x}_i, i = \overline{1,5}\right)$. Variaţiile în timp a celor 5 componente ale erorii $e_x = x - \hat{x}$ sunt reprezentate în fig. 1.43. Toate cele 5 componente $e_{x_i}, i = \overline{1,5}$, tind către zero într-un timp foarte scurt, lucru care dovedeşte atât funcţionarea corectă a reţelei neuronale (estimarea funcţiei neliniare a sistemului (1.532)) cât şi estimarea foarte bună a variabilelor de stare (fig. 1.43, fig. 1.44).

1.9.2. NEURO-OBSERVER ADAPTIV BAZAT PE FILTRUL KALMAN PENTRU SISTEMELE NELINIARE

Reţelele neuronale se folosesc pentru aproximarea funcţiilor (de obicei a celor neliniare) sau pentru compensarea erorilor ce rezultă în urma inversării dinamice, aproximării funcţiilor sau liniarizării modelelor neliniare asociate mişcărilor.

Unul dintre cele mai utilizate observere este estimatorul (filtrul) Kalman-Bucy; acesta însă nu are rezultate foarte bune în cazul prezenţei în sistem a unor neliniarităţi (dinamica neliniară a sistemului). De aceea, în cele ce urmează, se construieşte un observer adaptiv [205] bazat pe filtrul Kalman la care se adaugă o reţea neuronală pentru compensarea erorilor de liniarizare a ecuaţiilor neliniare asociate sistemului. Ca reţea neuronală se utilizează o reţea cu funcţii radiale [210], antrenarea sa făcându-se pe baza unui algoritm de adăugare şi/sau eliminare a unui număr de neuroni din stratul ascuns al reţelei neuronale [205].

Se consideră sistemul neliniar descris de ecuaţiile

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u), \\ y = h(x,u) \cong Cx + Du, \end{cases} \tag{1.536}$$

în care x este vectorul de stare, y - vectorul de ieşire, u - vectorul format din intrările sistemului, iar f şi h sunt funcţii liniare. Sistemul (1.536) trebuie liniarizat, în acest sens, existând numeroşi algoritmi în literatura de specialitate pentru liniarizarea dinamicii unui sistem. În urma liniarizării sistemului neliniar se obţin ecuaţiile de stare

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx + Du, \end{cases} \tag{1.537}$$

unde

$$A = \left[\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\right]_{x_0,\,u_0}, B = \left[\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\right]_{x_0,\,u_0}, C = \left[\frac{\partial h(x,u)}{\partial x}\right]_{x_0,\,u_0}, D = \left[\frac{\partial h(x,u)}{\partial u}\right]_{x_0,\,u_0}; \tag{1.538}$$

x_0 şi u_0 sunt valorile asociate punctului în jurul căruia se face liniarizarea sistemului.

Pentru ca neuro-observerul bazat pe filtrul Kalman-Bucy (neuro-observer Shankar

& Yedavally [205]) să poată fi proiectat este necesar ca perechea (A, B) să fie controlabilă şi perechea (A, C) să fie detectabilă (observabilă). Dacă liniarizarea sistemului neliniar s-ar face perfect (fără erori de liniarizarare) şi ar fi îndeplinite cele două condiţii anterioare, s-ar construi observerul descris de ecuaţiile [205]

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}), \\ \hat{y} = C\hat{x} + Du, \end{cases} \tag{1.539}$$

dinamica erorii observerului $(e = x - \hat{x})$ fiind

$$\dot{e} = (A - LC)e; \tag{1.540}$$

matricea L a observerului se calculează astfel încât matricea (A-LC) să fie stabilă. Dacă (A-LC) – stabilă, eroarea tinde asimptotic la zero. În ecuaţia (1.540) $\dot{e}$ s-a calculat scăzând din $\dot{x}$ (având forma dată de prima ecuaţie (1.537)) pe $\dot{\hat{x}}$ (având forma dată de prima ecuaţie (1.539)); dacă însă $\dot{x} = f(x,u)$, ecuaţia ce descrie dinamica erorii observerului este [205]

$$\dot{e} = f(x,u) - A\hat{x} - Bu - L(y - \hat{y}). \tag{1.541}$$

Din ecuaţia (1.541) se observă că $\dot{e}$ are forma (1.540), adică eroarea e converge la zero, dacă liniarizarea dinamicii sistemului se face fără erori $(f(x,u) \cong Ax + Bu)$. În realitate, liniarizarea se face cu erori şi, scriind pe $\dot{x}$ şi $\dot{\hat{x}}$ sub forma

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u) + Ax - Ax + Bu - Bu, \\ \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}), \end{cases} \tag{1.542}$$

se obţine ecuaţia erorii [205]

$$\dot{e} = (A - LC)e + \Delta(x,u), \tag{1.543}$$

în care

$$\Delta(x,u) = f(x,u) - Ax - Bu \tag{1.544}$$

este eroarea de liniarizare. Pentru ca $\dot{e} = (A - LC)e$, ecuaţia observerului adaptiv (prima ecuaţie (1.539)) trebuie completată cu termenul $\psi(y,u)$ ce reprezintă aproximarea erorii de liniarizare. Astfel, ecuaţia observerului adaptiv devine [205]

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}) + \psi(y,u); \tag{1.545}$$

în aceste condiţii, ecuaţia asociată erorii este

$$\dot{e} = (A - LC)e + \Delta(x,u) - \psi(y,u). \tag{1.546}$$

În acest caz, chiar dacă liniarizarea sistemului nu se face perfect, rezultând o eroare de liniarizare, observerul adaptiv funcţionează corect întrucât $\psi(y,u) \cong \Delta(x,u)$ şi $\dot{e}$ va avea forma (1.540). Componenta adaptivă $\psi(y,u)$ a observerului este furnizată de către o reţea neuronală cu funcţii radiale, aceasta fiind antrenată off-line pentru aproximarea erorii de liniarizare [205]. Reţeaua neuronală (NN) are 3 straturi (un strat de intrare, un strat ascuns şi un strat de ieşire). Neuronii din stratul ascuns furnizează un set de funcţii neliniare ce sunt baza pentru vectorii de intrare. Se consideră că NN are p neuroni de intrare, q neuroni în stratul ascuns şi r neuroni de ieşire. Actualizarea ponderilor asociate neuronilor din stratul ascuns $(W_{k,j})$ şi a ponderilor asociate neuronilor de ieşire (b_k) se face cu formulele [205]

$$W_{k,j}(n+1) = W_{k,j}(n) + \eta(\bar{y}_k - y_k)\varphi_j\,,\, b_k(n+1) = b_k(n) + \eta(\bar{y}_k - y_k), \tag{1.547}$$

unde $W_{k,j}$ reprezintă ponderea între neuronul j din stratul ascuns şi neuronul de ieşire k, b_k - biasul neuronului k din stratul de ieşire, $y_k, \bar{y}_k$ – ieşirea, respectiv ieşirea dorită a neuronului k din stratul de ieşire, η - rata de învăţare a NN, iar φ_j - funcţia neliniară asociată neuronului j din stratul ascuns. Expresia funcţiei φ_j este [205]:

$$\varphi_j = \exp\left[\sum_{i=1}^{p} -\left(c_{j,i} - I_i\right)^2 / \sigma_j^2\right], \tag{1.548}$$

în care $c_{j,i}$ reprezintă centrul neuronului j corespunzător intrării $i(I_i)$, iar σ_j este variaţia sa. Antrenarea reţelei neuronale se face prin minimizarea diferenţei dintre ieşirea dorită $\bar{y}_k$ şi ieşirea y_k pentru toţi neuronii de ieşire $k = \overline{1,r}$ [205].

Schema bloc a neuro-observerului adaptiv pentru sistemele neliniare se bazează pe filtrul Kalman (observer Shankar & Yedavally [205]) şi este prezentată în fig. 1.45.

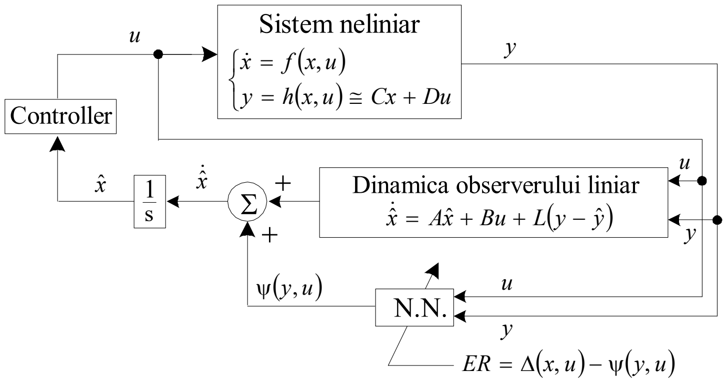

Fig. 1.45. Schema bloc a neuro-observerului pentru sistemele neliniare bazat pe filtrul Kalman

Antrenarea NN se face prin intermediul algoritmului de „adăugare şi tăiere". Acesta presupune adăugarea sau ştergerea (reducerea) de neuroni din stratul ascuns în funcţie de intrările NN şi de actualizarea ponderilor stratului de ieşire. Aşadar, algoritmul presupune adăugarea sau ştergerea de neuroni din stratul ascuns concomitent cu actualizarea centrelor neuronilor rămaşi în stratul ascuns. Actualizarea centrelor neuronilor rămaşi în stratul ascuns se face prin metoda propagării inverse [205]

$$c_{j,i}(n+1) = c_{j,i}(n) + \frac{2\eta}{\sigma_j}\left(I_i - c_{j,i}(n)\right)\varphi_j\left[\sum_{k=1}^{r}(\bar{y}_k - y_k)W_{k,j}\right]. \tag{1.549}$$

Adăugarea de neuroni

Dacă intrarea, de exemplu *I*, este de aşa natură încât există o distanţă mai mare decât o distanţă predefinită d_{ad} de la centrul fiecărui neuron din stratul ascuns, un nou neuron cu acea intrare ca centru este adăugat. Parametrii noului neuron adăugat sunt

$$c_{nou,i} = I_i;\sigma_{nou} = k_{ad}\, d_{\min}; W_{k,new} = \bar{y}_k - y_k; b_{k,nou} = 0. \tag{1.550}$$

k_{ad} este o constantă predefinită, iar $d_{\min}$ este distanţa minimă între centrele neuronilor existenţi în stratul ascuns şi intrarea I^{nou} [205].

Ştergerea (reducerea) de neuroni

Dacă intrările ce ajung la NN sunt de aşa natură astfel încât sunt apropiate de centrele unor neuroni dar depărtate de centrele altor neuroni, ultimul set de neuroni se şterge. Procesul este finalizat prin verificarea distanţei absolute de la intrare a centrelor neuronilor în raport cu pragul sub care orice neuron ce primeşte această intrare nu va furniza vreo ieşire [205]. Pragul pentru ştergerea neuronilor este

$$d_{stergere} = M_{stergere}\, d_{\min}, \tag{1.551}$$

unde $M_{stergere}>1$ şi $d_{\min}$ - distanţa minimă de la neuroni la intrare. Ştergerea se face la finalul fiecărui ciclu de antrenare [205].

1.9.3. NEURO-OBSERVER BAZAT PE UTILIZAREA REŢELELOR NEURONALE ORTOGONALE PENTRU ESTIMAREA STĂRII SISTEMELOR HAOTICE

În domeniul analizei şi controlului haosului, un subiect interesant şi mult studiat îl reprezintă sincronizarea şi supresia haosului, acest lucru având multiple aplicaţii inginereşti precum comunicaţia sigură, reacţii chimice etc [113]. Multe dintre eforturi au fost făcute în direcţia sincronizării şi supresiei haosului [113]; majoritatea cercetărilor făcute consideră că informaţia de la toate stările unui sistem este disponibilă, lucru care nu se întâmplă în realitate, doar informaţiile de la mărimile de ieşire fiind disponibile. În acest sens, au fost proiectate recent câteva observere.

În practică, majoritatea sistemelor haotice au necunoscute şi observerele clasice nu pot fi folosite cu succes [113]. De aceea, este nevoie de un nou observer adaptiv pentru sincronizarea şi controlul sistemelor haotice. Acest observer adaptiv are în componenţă o reţea neuronală ortogonală, eficienţa observerului putând fi analizată prin intermediul teoriei Lyapunov. Legea de actualizare a ponderilor NN derivă din analiza funcţiilor Lyapunov.

Se consideră cazul general al unor sisteme haotice

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B^{*}g(x) + Bu, \\ y = Cx; \end{cases} \tag{1.552}$$

u, y sunt vectorii de intrare, respectiv de ieşire, $x \in \mathcal{M}^{n\times 1}$ – vectorul de stare, A, B, C –

matrice constante, $g(x) \in \mathcal{M}^{m \times 1}$ – funcţie neliniară necunoscută.

Se presupune că perechea (C, A) este observabilă şi se alege matricea L astfel încât (A-LC) să fie stabilă. Din lema lui Kalman & Yakubovich rezultă o matrice M şi 2 matrice pozitiv definite P şi Q astfel încât să fie verificate următoarele 2 ecuaţii matriceale [113]

$$(A - LC)^T P + P(A - LC) = -Q, \tag{1.553}$$

$$B^{*T} P = MC. \tag{1.554}$$

Ecuaţiile (1.553) şi (1.554) sunt valabile pentru multe sisteme neliniare, inclusiv sistemele haotice.

Unul dintre cele mai cunoscute tipuri de reţele neuronale este reţeaua neuronală ortogonală (ONN); aceasta are 3 straturi cu neuroni: un strat de intrare, un strat ascuns şi un strat de ieşire. Intrarea reţelei neuronale este vectorul de stare estimat $\hat{x} \in \mathcal{M}^{n \times 1}$; fie p numărul neuronilor din stratul ascuns. În aceste condiţii se calculează [113]

$$net = \sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i \, , \; X = \left[1 + e^{-\sigma \cdot net}\right]^{-1}, \tag{1.555}$$

unde σ este o constantă pozitivă.

Ieşirile stratului ascuns a reţelei neuronale ortogonale se bazează pe polinoame Chebyshev şi sunt

$$G_1(\hat{x}) = 1 \, , \; G_2(\hat{x}) = X \, , \; G_i(\hat{x}) = 2XG_{i-1}(\hat{x}) - G_{i-2}(\hat{x}), \tag{1.556}$$

cu $i = \overline{1, p}$. Ieşirea reţelei neuronale $(\tilde{y})$ se calculează astfel [113]:

$$\tilde{y} = WG(\hat{x}), \tag{1.557}$$

unde W este matricea ponderilor NN.

Având în vedere că funcţia neliniară $g(x)$ este necunoscută, ea poate fi aproximată (modelată) utilizând o reţea neuronală, neuro-observerul ce rezultă fiind descris de ecuaţiile

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(y - C\hat{x}) + B^*\left[WG(\hat{x}) + v\right] + Bu \, , \\ \hat{y} = C\hat{x} \, , \end{cases} \tag{1.558}$$

în care $v \in \mathcal{M}^{m\times 1}$ este legea de comandă. Scopul neuro-observerului este acela de a estima vectorul de stare $x\left(\hat{x} \to x\right)$ printr-o proiectare prealabilă a lui v şi W.

Legea de actualizare a matricei ponderilor (W) şi legea de comandă (v) au expresiile [113]

$$\dot{W} = -\eta M e_y G^T\left(\hat{x}\right),\, v = -k\, \mathrm{sgn}\left(Me_y\right),\, \dot{k} = \gamma\left(Me_y\right)^T \mathrm{sgn}\left(Me_y\right), \tag{1.559}$$

unde $e_y = \hat{y} - y$, iar γ şi η sunt constante pozitive ce trebuie alese.

Schema bloc a estimatorului de stare este prezentată în fig. 1.46.

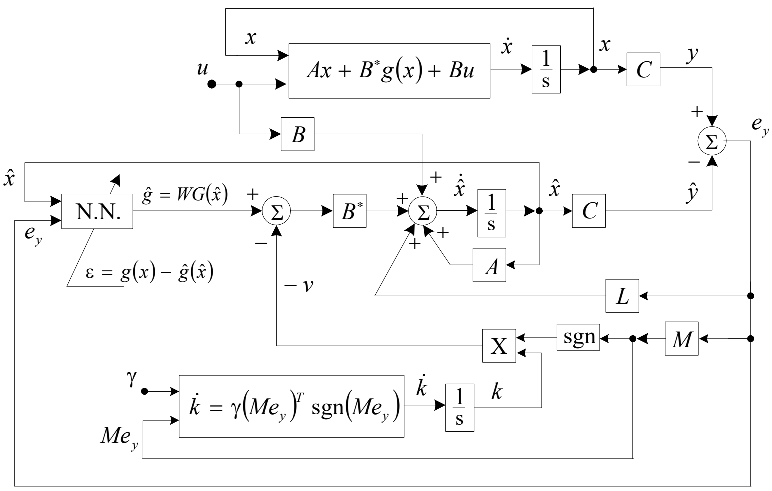

Fig. 1.46. Schema bloc a observerului pentru estimarea stării sistemelor haotice

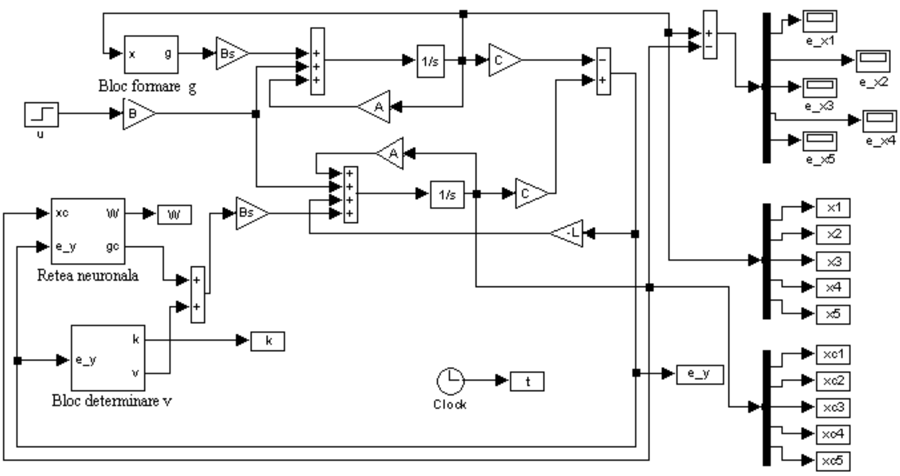

Fig. 1.47. Modelul Matlab/Simulink a neuro-observerului cu reţea neuronală ortogonală

Testarea algoritmului mai sus prezentat pentru estimarea stării unui sistem haotic utilizând un neuro-observer (observer cu reţea neuronală ortogonală) se face, şi în acest caz, utilizându-se dinamica mişcării longitudinale a unui avion cu unghi de incidenţă mare [56], [165]. Astfel, dinamica mişcării longitudinale, în general instabile, a unui astfel de avion este descrisă de ecuaţia de stare

$$\dot{x} = Ax + B^* g(x) + Bu, \tag{1.560}$$

în care $u = \delta_p, x^T = \lfloor \Delta V \;\; \Delta\alpha \;\; \Delta\omega_y \;\; \Delta c_p \;\; \Delta C_m \rfloor$, $g(x)$ are forma

$$g(x) = [0 \;\; 0 \;\; g_3(x) \;\; g_4(x) \;\; g_5(x)]^T, \tag{1.561}$$

cu $g_3(x), g_4(x), g_5(x)$ având forma (1.534); matricele A, B^* şi B din ecuaţia (1.560) sunt de forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & 0 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & 0 & a_{55} \end{bmatrix}, B^T = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ b_{13} \\ b_{14} \\ b_{15} \end{bmatrix}, B^* = I_n; \tag{1.562}$$

elementele matricelor de mai sus sunt constante cu valorile prezentate în programul din anexa A.2.9.

Validarea algoritmului s-a făcut utilizând mediul Matlab/Simulink. În acest sens, s-a elaborat programul Matlab din anexa A.2.9 şi modelul Matlab/Simulink din fig. 1.47. În cadrul modelului Matlab/Simulink din fig. 1.47 se observă prezenţa a trei subsisteme: *Bloc formare g* (subsistemul prin intermediul căruia se construieşte funcţia $g(x)$) - fig. 1.48, *Retea neuronala* (subsistemul prin care se aproximează funcţia neliniară $g(x)$ - ecuaţiile (1.555)-(1.557) şi prima ecuaţie (1.559)) – fig. 1.49 şi *Bloc determinare v* (subsistemul prin care se construieşte legea de comandă v - ultimele două ecuaţii (1.559)) – fig. 1.50. Subsistemul *Bloc formare g* are o singură intrare (x) şi o singură ieşire ($g(x)$); subsistemul *Retea neuronala* are 2 intrări: $\hat{x}$ (xc), e_y (e_y) şi două ieşiri: $\hat{g}$ (gc) şi W (W)); subsistemul *Bloc determinare v* are o singură intrare e_y (e_y) şi două ieşiri: constanta k şi legea de comandă v.

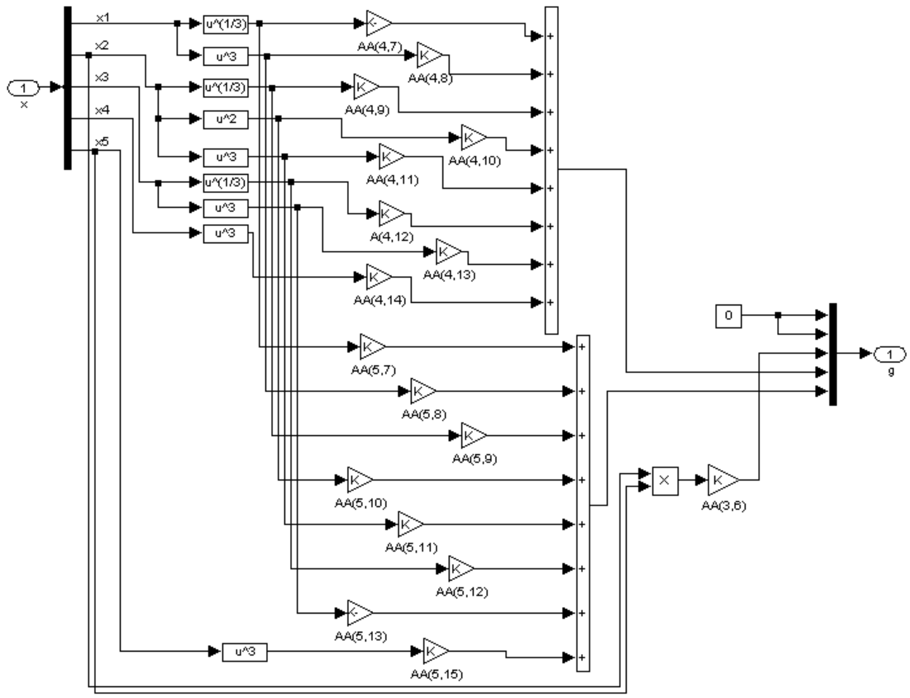

Fig. 1.48. Modelul Matlab/Simulink al subsistemului „*Bloc formare g*”

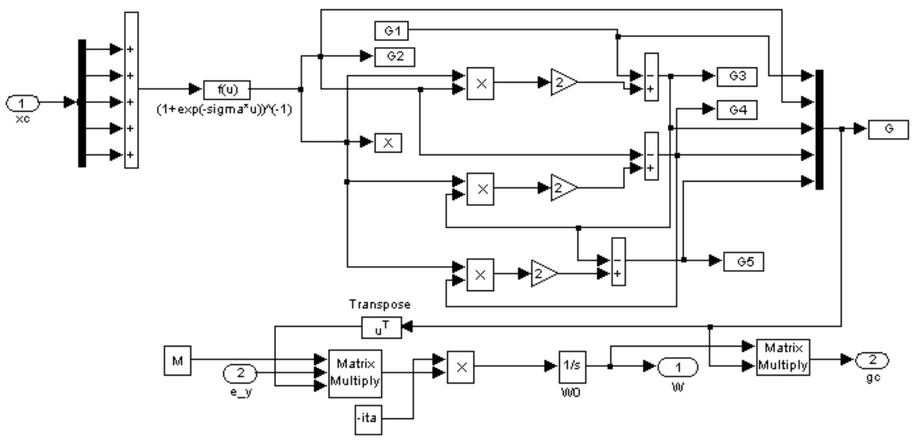

Fig. 1.49. Modelul Matlab/Simulink al subsistemului „*Retea neuronala*”

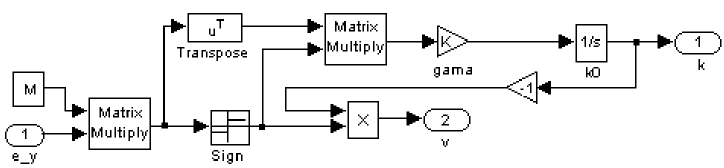

Fig. 1.50. Modelul Matlab/Simulink al subsistemului „*Bloc determinare v*”

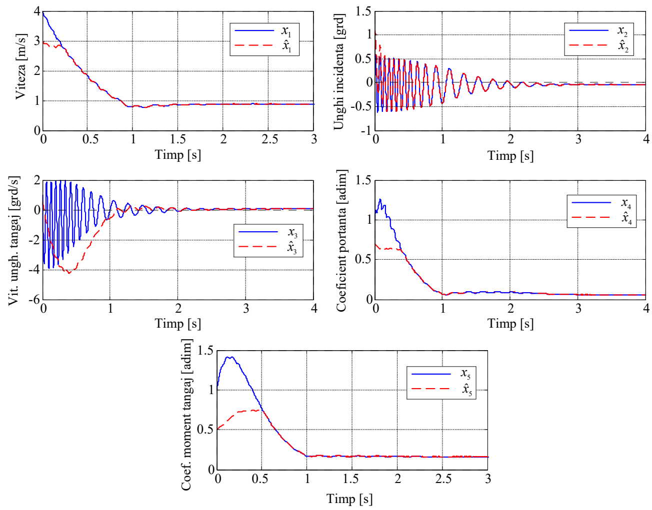

Fig. 1.51. Variabilele de stare (x_i) şi variabilele de stare estimate $(\hat{x}_i)$

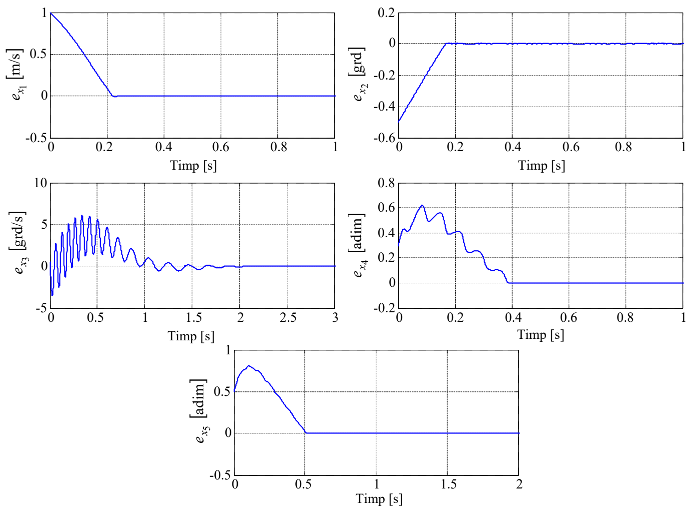

Fig. 1.52. Variabilele de stare (x_i) şi variabilele de stare estimate $(\hat{x}_i)$

Structura NN a fost aleasă astfel: reţea neuronală ortogonală, cu 3 straturi (stratul de intrare conţine 5 neuroni, stratul ascuns are 5 neuroni, iar stratul de ieşire are un singur neuron). Matricea *W* se actualizează la fiecare pas de calcul, în final obţinându-se

$$W = \begin{bmatrix} 0.567 & 0.566 & 0.565 & 0.560 & 0.554 \\ -0.099 & -0.1 & -0.1 & -0.1 & -0.1 \\ 3.382 & 0.982 & -2.052 & -0.805 & 1.754 \\ 0.167 & 0.151 & 0.125 & 0.119 & 0.129 \\ 0.253 & 0.196 & 0.117 & 0.130 & 0.181 \end{bmatrix}; \tag{1.563}$$

constanta *k*, la finalul simulării, este *k*=3,1045.

Reţeaua neuronală ortogonală a neuro-observerului estimează funcţia neliniară necunoscută $g(x)$, urmând ca apoi neuro-observerul să estimeze vectorul de stare x, calculând $\hat{x}$. Sunt reprezentate în acelaşi sistem de axe (fig. 1.51) dependenţele de timp ale celor 5 variabile de stare $\left(x_i, i = \overline{1,5}\right)$ şi ale celor 5 variabile de stare estimate $\left(\hat{x}_i, i = \overline{1,5}\right)$. Variaţia în timp a celor 5 componente ale erorii $e_x = x - \hat{x}$ este reprezentată în fig. 1.52. Toate cele 5 componente $e_{x_i}, i = \overline{1,5}$, tind către zero într-un timp foarte scurt, lucru care dovedeşte atât funcţionarea corectă a reţelei neuronale ortogonale (estimarea funcţiei neliniare a sistemului (1.552)), cât şi estimarea foarte bună a variabi-lelor de stare (fig. 1.51, fig. 1.52).

1.9.4. OBSERVER ADAPTIV PENTRU ESTIMAREA STĂRII PROCESELOR NELINIARE MĂRGINITE

În cele ce urmează, un observer liniar este îmbunătăţit prin adăugarea unui element adaptiv (2 reţele neuronale ce sunt antrenate on-line). Scopul adăugării elementelor adaptive este îmbunătăţirea performanţelor observerului liniar [480].

Se consideră dinamica unui proces (sistem) observabil şi mărginit [480]

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = f_0(x_0, u, v), \\ y = g_0(x_0, u, v), \end{cases} \tag{1.564}$$

unde $x_0 \in \mathcal{M}^{n_0 \times 1}$ este vectorul de stare, $u \in \mathcal{M}^{m \times 1}, y \in \mathcal{M}^{l \times 1}$ – vectorii de intrare, respectiv ieşire ai sistemului, $v \in \mathcal{M}^{k \times 1}$ – intrare necunoscută de tip perturbaţie; f_0 şi g_0 sunt funcţii continue parţial cunoscute.

Se presupune că perturbaţiile aparţin unei clase de funcţii continue descrisă de ecuaţiile [480]

$$\dot{x}_v = f_v(x_0, x_v), v = g_v(x_0, x_v), \tag{1.565}$$

în care $x_v \in \mathcal{M}^{n_v \times 1}$. Cu notaţiile $x = \begin{bmatrix} x_0^T & x_v^T \end{bmatrix}^T \in \mathcal{M}^{n \times 1}, n = n_0 + n_v, \bar{f} = \begin{bmatrix} f_0^T & f_v^T \end{bmatrix}^T \in \mathcal{M}^{n \times 1}$, ecuaţiile (1.564) şi (1.565) conduc la [480]

$$\begin{cases} \dot{x} = \bar{f}(x, u), \\ y = g_0(x, u). \end{cases} \tag{1.566}$$

Ecuaţiile (1.566) sunt echivalente cu

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + f(x, u), \\ y = Cx + Du + g(x, u), \end{cases} \tag{1.567}$$

unde

$$\begin{cases} f(x, u) = \bar{f}(x, u) - Ax - Bu, \\ g(x, u) = g_0(x, u) - Cx - Du. \end{cases} \tag{1.568}$$

Sistemul de ecuaţii (1.567) conţine o parte liniară şi una neliniară descrisă de funcţiile neliniare $f(x, u)$ şi $g(x, u)$. Pentru partea liniară [480]

$$\begin{cases} \dot{x}_L = Ax_L + Bu, \\ y_L = Cx_L + Du, \end{cases} \tag{1.569}$$

se construieşte observerul liniar

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_L = A\hat{x}_L + Bu + K(y_L - \hat{y}_L), \\ \hat{y}_L = C\hat{x}_L + Du \end{cases} \tag{1.570}$$

prin intermediul căruia se estimează vectorul de stare x_L astfel încât $\hat{x}_L - x_L \to 0$ când $t \to \infty$. Obiectivul lucrării [480] a fost acela de a îmbunătăţii observerul liniar (1.570) cu un element adaptiv astfel încât estimarea să fie mai bună, având în vedere că $\hat{x}_L$ reprezintă vectorul de stare estimat al subsistemului liniar (1.569) şi nu al întregului sistem (1.567).

Principala utilizare a reţelelor neuronale o reprezintă aproximarea funcţiilor. Astfel, funcţia neliniară $f(x,u)$ poate fi aproximată cu ajutorul unei reţele neuronale cu un singur strat ascuns [481]

$$f(x,u) = M_1^T \sigma\left(N_1^T \mu\right) + \varepsilon_1(\mu), \tag{1.571}$$

unde M_1 şi N_1 sunt matricele ponderilor asociate NN, σ este funcţia de activare a neuronilor din stratul ascuns (de exemplu funcţia sigmoidală $\sigma(x) = 1/\left(1+e^{-x}\right)$), iar vectorul μ (vector de intrare) are forma [480]

$$\mu(t) = \left[1 \;\; \bar{y}_d^T(t) \;\; \bar{u}_d^T(t)\right]^T, \tag{1.572}$$

în care $\bar{y}_d$ şi $\bar{u}_d$ conţin valori ale ieşirii, respectiv intrării la momente anterioare; ε_1 este eroarea de reconstrucţie (eroarea de aproximare) a funcţiei f. Dacă observerul liniar este îmbunătăţit cu o singură reţea neuronală (pentru aproximarea funcţiei $f(x, u)$) se poate considera, pentru simplitate, $g(x, u)=0$ şi dinamica sistemului descris de ecuaţiile (1.567) devine [480]

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + M_1^T \sigma\left(N_1^T \mu\right) + \varepsilon_1(\mu), \\ y = Cx + Du, \end{cases} \tag{1.573}$$

iar observerul pentru estimarea lui x este

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + \hat{M}_1^T \sigma\left(\hat{N}_1^T \mu\right) + K(y - \hat{y}), \\ \hat{y} = C\hat{x} + Du, \end{cases} \tag{1.574}$$

în care $\hat{M}_1$ şi $\hat{N}_1$ sunt estimările matricelor pondere M_1 şi N_1 (ponderi ajustate on-line).

Observerul poate fi privit ca unul liniar pentru partea liniară a dinamicii liniare (1.567), îmbunătăţit cu o reţea neuronală pentru modelarea funcţiei f (ecuaţia (1.571)). Cu notaţiile $E = \hat{x} - x, z = \hat{y} - y$, se obţin ecuaţiile [480]

$$\begin{cases} \dot{E} = \bar{A}E + \hat{M}_1^T \sigma\left(\hat{N}_1^T \mu\right) - M_1^T \sigma\left(N_1^T \mu\right) - \varepsilon_1(\mu), \\ z = CE, \end{cases} \tag{1.575}$$

unde $\overline{A} = A - KC$; K se calculează astfel încât $\overline{A}$ să fie stabilă.

Este nevoie de legile de actualizare a ponderilor NN. Pentru aceasta, se introduce mai întâi observerul liniar descris de ecaţiile [480]

$$\begin{cases} \dot{\hat{E}} = \overline{A}\hat{E} + \overline{K}(z - \hat{z}), \\ \hat{z} = C\hat{E}, \end{cases} \tag{1.576}$$

unde $\overline{K}$ este o matrice de amplificare ce se calculează astfel încât $\widetilde{A} = \overline{A} - \overline{K}C$ să fie asimptotic stabilă. Acest lucru este utilizat doar pentru a genera un semnal de eroare ce este necesar pentru actualizarea ponderilor NN. Considerând $\widetilde{E} = \hat{E} - E$, rezultă

$$\dot{\widetilde{E}} = \widetilde{A}\widetilde{E} - \hat{M}_1^T\sigma\left(\hat{N}_1^T\mu\right) + M_1^T\sigma\left(N_1^T\mu\right) + \varepsilon_1(\mu). \tag{1.577}$$

Ponderile reţelei neuronale $\hat{M}_1$ şi $\hat{N}_1$ se actualizează utilizând următoarele legi de adaptare [480]:

$$\dot{\hat{N}}_1 = -G_1\left[2\mu\hat{E}^T P\hat{M}_1^T\hat{\sigma}' + k_1\left(\hat{N}_1 - N_{1_0}\right)\right], \dot{\hat{M}}_1 = -F_1\left[2\left(\hat{\sigma} - \hat{\sigma}'\hat{N}_1^T\mu\right)\hat{E}^T P + k_1\left(\hat{M}_1 - M_{1_0}\right)\right], \tag{1.578}$$

în care P este soluţia ecuaţiei Lyapunov

$$\overline{A}^T P + P\overline{A} + Q = 0, \tag{1.579}$$

Q, G_1, F_1 – matrice pozitiv definite, $\hat{\sigma} = \sigma\left(\hat{N}_1\mu\right), \hat{\sigma}' = \sigma'\left(\hat{N}_1\mu\right)$ – Jacobianul vectorului $\hat{\sigma}$, M_{1_0} şi N_{1_0} – valorile iniţiale ale ponderilor NN; $k_1>0$ - constantă de actualizare [480].

Analiza stabilităţii estimatorului de stare (1.574) este prezentată pe larg în [482]. Observerul construit până acum (observer liniar îmbunătăţit cu o NN) s-a obţinut pentru cazul $g(x, u)=0$. În cazul în care această funcţie neliniară nu se neglijează, este nevoie de o a doua reţea neuronală pentru estimarea ei [480]. Ca şi în cazul anterior, $g(x, u)$ se obţine astfel:

$$g(x,u) = M_2^T\sigma\left(N_2^T\mu\right) + \varepsilon_2(\mu); \tag{1.580}$$

în aceste condiţii dinamica sistemului descris de ecuaţiile (1.567) devine

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + M_1^T \sigma\left(N_1^T \mu\right) + \varepsilon_1(\mu), \\ y = Cx + Du + M_2^T \sigma\left(N_2^T \mu\right) + \varepsilon_2(\mu). \end{cases} \tag{1.581}$$

Pentru sistemul anterior se obţine dinamica observerului

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + \hat{M}_1^T \sigma\left(\hat{N}_1^T \mu\right) + K(y - \hat{y}), \\ \hat{y} = C\hat{x} + Du + \hat{M}_2^T \sigma\left(\hat{N}_2^T \mu\right); \end{cases} \tag{1.582}$$

$\hat{M}_2$ şi $\hat{N}_2$ sunt estimările ponderilor M_2 şi N_2 ale celei de-a doua reţele neuronale. Folosind aceleaşi notaţii $E = \hat{x} - x, z = \hat{y} - y$, rezultă [480]

$$\begin{cases} \dot{E} = \overline{A}E + \hat{M}_1^T \sigma\left(\hat{N}_1^T \mu\right) - M_1^T \sigma\left(N_1^T \mu\right) - \varepsilon_1(\mu) - K\left[\hat{M}_2^T \sigma\left(\hat{N}_2^T \mu\right) - M_2^T \sigma\left(N_2^T \mu\right) - \varepsilon_2(\mu)\right], \\ z = CE + \hat{M}_2^T \sigma\left(\hat{N}_2^T \mu\right) - M_2^T \sigma\left(N_2^T \mu\right) - \varepsilon_2(\mu). \end{cases} \tag{1.583}$$

Ponderile celei de-a doua reţele neuronale se actualizează cu legi de adaptare de tipul (1.578):

$$\dot{\hat{N}}_2 = -G_2\left[2\mu \hat{E}^T \widetilde{P}\widetilde{K}\hat{M}_2^T \hat{\sigma}' + k_2 \hat{N}_2\right], \dot{\hat{M}}_2 = -F_2\left[2\left(\hat{\sigma} - \hat{\sigma}'\hat{N}_2^T \mu\right)\hat{E}^T \widetilde{P}\widetilde{K} + k_2 \hat{M}_2\right]; \tag{1.584}$$

de această dată $\hat{\sigma} = \sigma\left(\hat{N}_2 \mu\right), \hat{\sigma}' = \sigma'\left(\hat{N}_2 \mu\right), k_2 > 0 -$ constantă de actualizare, F_2, G_2>0.

Schema bloc asociată observerului descris de ecuaţiile (1.582) este prezentată în Fig. 1.53.

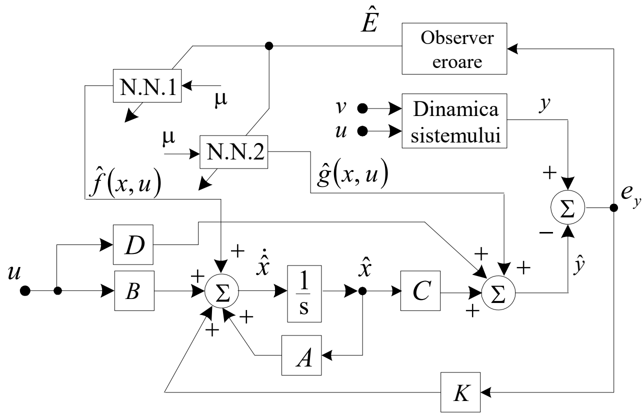

Fig. 1.53. Schema bloc a observerului adaptiv pentru procese neliniare mărginite

CAPITOLUL 2

PROIECTAREA OBSERVERELOR MULTIPLE

2.1. OBSERVERUL MULTIMPLU AKHENAK (VARIANTA 1)

Deoarece majoritatea sistemelor sunt neliniare şi este dificil de sintetizat un observer pentru astfel de sisteme, în [5] sistemele neliniare au fost reprezentate prin intermediul unor modele multiple. Ideea modelului multiplu se leagă de necesitatea înţelegerii comportamentului sistemelor prin intermediul unor modele locale liniare, fiecare model local caracterizând comportamentul unui sistem într-o anumită regiune de funcţionare [5]. Un model multiplu poate fi obţinut prin identificare [72], liniarizare în jurul diverselor puncte de funcţionare sau prin intermediul transformărilor convexe politopice [205]; în cazul obţinerii modelului multiplu prin liniarizare în jurul unor puncte de funcţionare, fiecare model local este un sistem liniar, afin şi invariant în timp ca urmare a prezenţei constantelor de liniarizare. În cazul sistemelor neliniare afectate de intrări necunoscute, se utilizează observerele multiple, observerele de tip alunecător [6], [34] sau combinaţii ale acestora.

2.1.1. STRUCTURA MODELULUI MULTIPLU

Modelul multiplu este obţinut prin interpolarea câtorva modele liniare;

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi(t))\left[A_i x(t) + B_i u(t) + d_i\right], \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \tag{2.1}$$

unde $x(t) \in \mathcal{M}^{n\times 1}$ este vectorul de stare al sistemului, $u(t) \in \mathcal{M}^{m\times 1}$ – vectorul intrărilor, $y(t) \in \mathcal{M}^{p\times 1}$ – vectorul de ieşire, iar $C \in \mathcal{M}^{p\times n}$ este matricea de ieşire a sistemului. Pentru modelul local „*i*”, $A_i \in \mathcal{M}^{n\times n}$ este matricea asociată stării, $B_i \in \mathcal{M}^{n\times m}$ – matricea de intrare, iar $d_i \in \mathcal{M}^{n\times 1}$ – vectori constanţi. Funcţiile de activare $\mu_i(\xi(t)), i = \overline{1, M}$, au proprietăţile următoare [5]

$$\sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi(t)) = 1, 0 \le \mu_i(\xi(t)) \le 1, (\forall)\ i = \overline{1, M}; \tag{2.2}$$

vectorul $\xi(t)$ se numeşte vector de decizie şi depinde de intrări şi/sau variabilele măsurabile. Numărul modelelor locale (*M*) depinde de precizia cu care se face modelarea, de complexitatea sistemului neliniar aproximat prin modelul multiplu, precum şi de structura funcţiilor de activare.

În cazul în care modelul multiplu este afectat de intrări necunoscute şi incertitudini, ecuaţiile asociate acestuia sunt [5]

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi(t))[(A_i + \Delta A_i(t))x(t) + B_i u(t) + D_i v(t) + d_i], \\ y(t) = Cx(t). \end{cases} \tag{2.3}$$

Intrările necunoscute se consideră mărginite $(\|v(t)\| < \rho)$, ρ fiind o constantă pozitivă; matricele variabile în timp $\Delta A_i(t)$ fiind, de asemenea, mărginite $\Leftrightarrow \|\Delta A_i(t)\| < \delta_i$. În ecuaţiile (2.3), $D_i \in \mathcal{M}^{n\times q}$ se numesc matrice de trasmisie. În cele ce urmează, pentru uşurinţa notaţiilor, dependenţa de timp (*t*) este omisă.

2.1.2. PROIECTAREA OBSERVERULUI MULTIPLU

În [5] estimarea stării modelului multiplu (2.1) se face prin intermediul unui observer multiplu bazat pe combinarea observerelor de tip Luenberger şi a unor termeni de alunecare cu rol în compensarea incertitudinilor $\Delta A_i(t)$ şi a intrărilor necunoscute. Se presupune că perechile (A_i, C) sunt observabile şi că există matricele $G_i \in \mathcal{M}^{n\times p}$ astfel încât $\overline{A}_i = A_i - G_i C, i = \overline{1, M}$, sunt matrice stabile; cu alte cuvinte, se presupune că există matricele simetrice şi pozitiv definite *P* şi Q_i, precum şi matricele $F_i \in \mathcal{M}^{q\times p}$

care satisfac condiţiile (constrângerile [5])

$$\begin{cases} \overline{A}_i^T P + P\overline{A}_i = -Q_i \,, \\ C^T F_i^T = PD_i \,, i = \overline{1, M} \,. \end{cases} \tag{2.4}$$

Observerul multiplu propus pentru estimarea stării modelului multiplu (2.3) este de forma [5]

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi)\left[A_i \hat{x} + B_i u + d_i + G_i(y - C\hat{x}) + \alpha_i + D_i\gamma_i\right], \\ \hat{y} = C\hat{x}. \end{cases} \tag{2.5}$$

Vectorii $\gamma_i \in \mathcal{M}^{q\times 1}$ compensează erorile datorate intrărilor necunoscute, iar $\alpha_i \in \mathcal{M}^{n\times 1}$ compensează erorile datorate incertitudinilor sistemului. Pentru proiectarea observerului (2.5) este nevoie de calculul matricelor $G_i \,, i = \overline{1, M}$ şi a vectorilor $\alpha_i \,, \gamma_i \,, i = \overline{1, M}$. Pentru a realiza acest lucru, se definesc erorile

$$e = x - \hat{x} \,, r = y - \hat{y} = C(x - \hat{x}) = Ce\,; \tag{2.6}$$

cu acestea, dinamica erorii observerului multiplu este [5]

$$\dot{e} = \sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi)\left[(A_i - G_i C)e + \Delta A_i x + D_i v - R_i \gamma_i - \alpha_i\right]. \tag{2.7}$$

Proiectarea observerului multiplu (2.5) este concentrată în următoarea teoremă:

<u>*Teorema 2.1*</u> [5]

Eroarea de estimare a stării observerului (2.5) converge asimptotic la zero dacă

$$\begin{aligned} \gamma_i &= \begin{cases} \rho \dfrac{F_i r}{\|F_i r\|}, & r \neq 0 \\ 0, & r = 0 \end{cases}, \\ \alpha_i &= \begin{cases} \beta_1(1 + \beta_2)\delta_i^2 \dfrac{\hat{x}^T \hat{x}}{2r^T r} P^{-1} C^T r, & r \neq 0 \\ 0, & r = 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{2.8}$$

şi dacă există o matrice P>0, matricele F_i şi scalarii pozitivi β_1 şi β_2 care satisfac următtoarele constrângeri

$$\begin{cases} \overline{A}_i^T P + P\overline{A}_i + \beta_1^{-1} P^2 + \beta_1 \left(1 + \beta_2^{-1}\right) \delta_i^2 \, I < 0\,, \\ C^T F_i^T = PD_i \,, i = \overline{1, M}\,, \end{cases} \tag{2.9}$$

unde

$$\overline{A}_i = A_i - G_i C\,, i = \overline{1, M}\,, \tag{2.10}$$

sunt matrice stabile.

În cadrul demonstraţiei acestei teoreme, se foloseşte următoarea lemă

<u>*Lema 2.1*</u> [5]

Pentru orice matrice X şi Y şi orice scalar $\beta > 0$, este valabilă inegalitatea

$$X^T Y + Y^T X \leq \beta X^T X + \beta^{-1} Y^T Y\,. \tag{2.11}$$

Pentru demonstraţia teoremei 2.1, se consideră funcţia Lyapunov

$$V(e) = e^T Pe \tag{2.12}$$

şi se calculează

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi)\left[e^T\left(\overline{A}_i^T P + P\overline{A}_i\right)e - 2\alpha_i^T Pe + 2e^T PD_i v - 2e^T PD_i R_i \gamma_i\right] \\ &+ \sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi)\left(x^T \Delta A_i^T Pe + e^T P\Delta A_i x\right); \end{aligned} \tag{2.13}$$

s-a ţinut cont de relaţiile

$$\begin{cases} v^T D_i^T Pe + e^T PD_i v = 2e^T PD_i v\,, \\ \alpha_i^T Pe + e^T P\alpha_i = 2\alpha_i^T Pe\,, \\ \gamma_i^T D_i^T Pe + e^T PD_i \gamma_i = 2e^T PD_i \gamma_i\,. \end{cases} \tag{2.14}$$

Folosind lema 2.1, particularizată pentru $X = \Delta A_i x$, $Y = Pe$, $\beta = \beta_1$, rezultă [5]

$$\begin{aligned}\dot{V} \le &\sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi)\left[e^T\left(\overline{A}_i^T P + P\overline{A}_i\right)e - 2\alpha_i^T Pe + 2e^T PD_i v - 2e^T PD_i R_i \gamma_i\right] + \\ &+ \sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi)\left(\beta_1 x^T \Delta A_i^T \Delta A_i x + \beta_1^{-1} e^T P^2 e\right).\end{aligned} \tag{2.15}$$

Utilizând prima expresie (2.6), termenul $\beta_1 x^T \Delta A_i^T \Delta A_i x$ devine

$$\begin{aligned}\beta_1 x^T \Delta A_i^T \Delta A_i x &= \beta_1 \left[(e + \hat{x})^T \Delta A_i^T \Delta A_i (e + \hat{x})\right] = \\ &= \beta_1 \left[e^T \Delta A_i^T \Delta A_i (e + \hat{x}) + \hat{x}^T \Delta A_i^T \Delta A_i (e + \hat{x})\right] = \\ &= \beta_1 \left[e^T \Delta A_i^T \Delta A_i e + e^T \Delta A_i^T \Delta A_i \hat{x} + \hat{x}^T \Delta A_i^T \Delta A_i e + \hat{x}^T \Delta A_i^T \Delta A_i \hat{x}\right];\end{aligned} \tag{2.16}$$

se obţine

$$\begin{aligned}\dot{V} \le &\sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi)\left[e^T\left(\overline{A}_i^T P + P\overline{A}_i + \beta_1^{-1}P^2\right)e + 2e^T PD_i v - 2\alpha_i^T Pe - 2e^T PD_i R_i \gamma_i\right] + \\ &+ \sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi)\left[\beta_1 \delta_i^2\left(\hat{x}^T \hat{x} + e^T e\right) + \beta_1 \delta_i^2\left(e^T \hat{x} + \hat{x}^T e\right)\right].\end{aligned} \tag{2.17}$$

Se foloseşte din nou lema 2.1, particularizată pentru $X = \hat{x}$, $Y = e$, $\beta = \beta_2$; astfel, utilizând inegaliatea $\hat{x}^T e + e^T \hat{x} \le \beta_2 \hat{x}^T \hat{x} + \beta_2^{-1} e^T e$, expresia (2.17) capătă forma [5]

$$\begin{aligned}\dot{V} \le &\sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi)\left[e^T\left(\overline{A}_i^T P + P\overline{A}_i + \beta_1^{-1}P^2 + \beta_3\delta_i^2 I\right)e + 2e^T PD_i v - 2e^T PD_i R_i \gamma_i\right] + \\ &+ \sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi)\left[\beta_1(1+\beta_2)\delta_i^2 \hat{x}^T \hat{x} - 2\alpha_i^T Pe\right],\end{aligned} \tag{2.18}$$

unde $\beta_3 = \beta_1\left(1 + \beta_2^{-1}\right)$.

Folosind proprietăţile inversei matricelor $\left((XY)^{-1} = Y^{-1}X^{-1}, \left(X^T\right)^{-1} = \left(X^{-1}\right)^T\right)$, se demonstrează, pentru $r \ne 0$, cea de-a doua expresie (2.8); aceasta conduce la anularea celei de-a doua sume din inecuaţia (2.18). În consecinţă, se obţine [5]

$$\dot{V} \le \sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi)\left[e^T\left(\overline{A}_i^T P + P\overline{A}_i + \beta_1^{-1}P^2 + \beta_3\delta_i^2 I\right)e + 2e^T PD_i v - 2e^T PD_i R_i \gamma_i\right]. \tag{2.19}$$

Utilizând acum a doua condiţie de existenţă a observerului, adică $C^T F_i^T = PD_i$, rezultă

$$2e^T PD_i v - 2e^T PD_i R_i \gamma_i = 2\underbrace{e^T C^T}_{r^T} F_i^T v - 2\underbrace{e^T C^T}_{r^T} F_i^T \gamma_i = 2r^T F_i^T v - 2r^T F_i^T \gamma_i \,. \quad (2.20)$$

Înlocuind în (2.20) pe γ_i cu expresia (2.8), rezultă [5]

$$2e^T PD_i v - 2e^T PD_i R_i \gamma_i = 2r^T F_i^T v - 2\rho \left\| F_i r \right\| < 0\,; \quad (2.21)$$

s-au folosit $\|v\| < \rho$ şi $\left\| r^T F_i^T \right\| = \left\| (F_i r)^T \right\| = \left\| F_i r \right\|$. În aceste condiţii, inegalitatea (2.19) devine

$$\dot{V} \le \sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi) \left[e^T \left(\overline{A}_i^T P + P\overline{A}_i + \beta_1^{-1} P^2 + \beta_3 \delta_i^2 I \right) e \right]. \quad (2.22)$$

Acelaşi rezultat se obţine şi pentru r=0. Analizând expresia (2.22), se concluzionează că observerul multiplu este convergent $(\dot{V} < 0)$ şi eroarea de estimare a stării converge asimptotic la zero dacă sunt îndeplinite condiţiile (2.8) şi (2.9). Cu alte cuvinte, rămâne de rezolvat inecuaţia matriceală

$$\overline{A}_i^T P + P\overline{A}_i + \beta_1^{-1} P^2 + \beta_1 \left(1 + \beta_2^{-1}\right) \delta_i^2 I < 0. \quad (2.23)$$

Ţinând cont de (2.10), inecuaţia matriceală (2.9) este neliniară în raport P şi G_i. Pentru rezolvarea sa prin metode specifice inecuaţiilor matriceal-liniare (LMI), este nevoie de transformarea sa dintr-o inecuaţie neliniară într-una liniară; pentru aceasta, se utilizează tehnica schimbării de variabilă. Astfel, utilizând schimbarea de variabilă [5]

$$W_i = PG_i \,, \quad (2.24)$$

inegalitatea (2.23) devine

$$A_i^T P + PA_i - C^T W_i^T - W_i C + \beta_1^{-1} P^2 + \beta_1 \left(1 + \beta_2^{-1}\right) \delta_i^2 I < 0 \quad (2.25)$$

sau

$$\begin{bmatrix} A_i^T P + PA_i - C^T W_i^T - W_i C + \beta_1 \left(1 + \beta_2^{-1}\right) \delta_i^2 I & P \\ P & -\beta_1 I \end{bmatrix} < 0\,. \quad (2.26)$$

Echivalenţa inecuaţiilor (2.25) şi (2.26) s-a obţinut ţinând cont de lema Schur scrisă sub forma: $\begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} < 0$ dacă şi numai dacă $R < 0$ şi $Q - SR^{-1}S^T < 0$; lema Schur a fost particularizată astfel: $Q = A_i^T P + PA_i - C^T W_i^T - W_i C + \beta_1\left(1 + \beta_2^{-1}\right)\delta_i^2 I$, $S = P$, $R = -\beta_1 I$. Inecuaţia matriceal-liniară (2.26) se rezolvă în raport cu P şi W_i; apoi, prin intermediul ecuaţiei (2.24), se determină $G_i = P^{-1}W_i$.

Schema bloc ce modelează ecuaţiile (2.3), (2.5) şi (2.9) este prezentată în fig. 2.1.

O problemă ce poate apărea în procesul de implementare a observerului multiplu (2.5) este asociată cazului când, deşi $r = y - \hat{y} \to 0$, α_i şi γ_i sunt nemărginite. În [5] este rezolvată această problemă astfel: α_i şi γ_i sunt nule când $\|r\| < \varepsilon$, unde ε>0 este o constantă cu valori mici, aleasă de proiectantul estimatorului de stare.

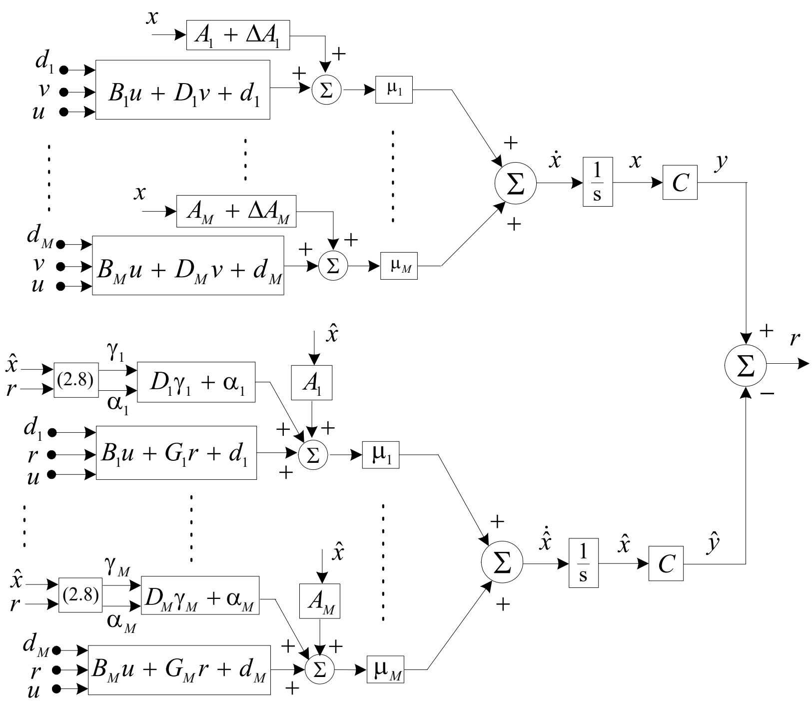

Fig. 2.1. Schema bloc de modelare a observerului multiplu Akhenak

În acest caz, eroarea de estimare nu mai converge asimptotic la zero ci aproape de zero în funcţie de valoarea aleasă pentru ε. Proiectarea observerului multiplu din [5] se face prin parcurgerea următorilor paşi:

Algoritmul Akhenak (varianta 1)

Pasul 1: Se declară matricele $A_i, B_i, D_i, d_i, C, i = \overline{1, M}$, limitele superioare ρ şi δ_i, şi se alege valoarea constantei pozitive ε. Se stabilesc expresiile vectorului de decizie $\xi(t)$ şi expresiile funcţiilor de activare $\mu_i(\xi(t)), i = \overline{1, M}$.

Pasul 2: Se aleg scalarii pozitivi β_1 şi β_2 şi se rezolvă inecuaţia matriceal-liniară (2.26) cu necunoscutele P şi W_i , $i = \overline{1, M}$.

Pasul 3: Pentru fiecare $i = \overline{1, M}$, se calculează $G_i = P^{-1}W_i$ şi apoi se verifică dacă matricele $\overline{A}_i = A_i - G_i C$ sunt stabile.

Pasul 4: Se calculează F_i din ecuaţia (2.9) după cum urmează $F_i = (PD_i)^T C^+$. În continuare, utilizând ecuaţiile (2.8), se determină vectorii γ_i (cu rol de compensare a erorilor datorate intrărilor necunoscute) şi α_i (cu rol de compensare a erorilor datorate incertitudinilor sistemului).

Pasul 5: Utilizând matricele şi vectorii calculaţi la paşii 3 şi 4, se proiectează observerul descris de ecuaţiile (2.5); pentru validarea estimatorului de stare, se utilizează şi ecuaţiile ce descriu dinamica modelului multiplu (ecuaţiile de stare - ieşire (2.3)).

2.1.3. VALIDAREA OBSERVERULUI MULTIPLU AKHENAK

Observerul Akhenak este validat în Matlab/Simulink; a fost aleasă, pentru validarea observerului, mişcarea longitudinală a unei aeronave, dinamica acesteia fiind descrisă de ecuaţiile (2.3) în care

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.007 & 0.012 & -9.81 & 0 \\ -0.128 & -0.54 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.065 & 0.96 & 0 & -0.99 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.04 \\ 0 \\ -12.5 \end{bmatrix}, D_1 = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.25 \\ 0.25 \\ 0.25 \end{bmatrix}, d_1 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -0.01 & 0.01 & -9.81 & 0 \\ -0.128 & -0.6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.1 & 1.2 & 0 & -1.5 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.1 \\ 0 \\ -10.8 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} 0.35 \\ 0.5 \\ 0.25 \\ 0.2 \end{bmatrix}, d_2 = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.3 \\ 0.3 \\ 0.3 \end{bmatrix}, \tag{2.27}$$

$$\Delta A_1 = 0.01 \cdot A_1 , \Delta A_2 = 0.01 \cdot A_2 , x^T = \begin{bmatrix} \Delta V_x & \Delta\alpha & \Delta\theta & \Delta\omega_y \end{bmatrix}, u = \delta_p , C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vectorul intrărilor necunoscute v a fost ales aleatoriu; pentru matricele de mai sus, au rezultat $M = 2$, $n = 4$, $m = q = 1$, $p = 2$. Funcţia de decizie şi funcţiile de activare au fost alese de forma: $\xi(t) = u(t)$, $\mu_1(\xi(t)) = 0.5\left(1 - \tanh(\xi(t))\right)$, $\mu_2(\xi(t)) = 0.5\left(1 + \tanh(\xi(t))\right)$. Aşa cum se observă din ecuaţia (2.27), s-a considerat că incertitudinile ΔA_1 şi ΔA_2 reprezintă variaţii de 1% ale matricelor A_1 şi A_2. Marginile superioare δ_i sunt superioare normelor variaţiilor ΔA_1 şi ΔA_2; s-au obţinut $\delta_1 = \delta_2 = 0.1$. Eroarea maximă de convergenţă a erorii a fost aleasă $\varepsilon = 0.25$. Într-o primă fază, se aleg $\beta_1 = \beta_2 = 0.5$, după care, aceste valori se micşorează pentru a analiza influenţa acestor constante asupra vitezei de convergenţă a observerului multiplu Akhenak.

Rezolvarea inecuaţiei matriceal-liniare (2.26) se face în Matlab/Simulink, în raport cu necunoscutele P şi W_i, i=1, 2, utilizând LMI tool (instrucţiunile *setlmis*, *newlmi*, *lmivar*, *lmiterm*, *getlmis*, *feasp* şi *dec2mat*); s-au obţinut matricele

$$P = \begin{bmatrix} 0.279 & 0 & 0.042 & 0.029 \\ 0 & 0.279 & -0.003 & -0.027 \\ 0.042 & -0.003 & 0.273 & -0.024 \\ 0.029 & -0.027 & -0.024 & 0.333 \end{bmatrix}, W_1 = \begin{bmatrix} 0.424 & -0.016 \\ 0.01 & 0.247 \\ -2.738 & -0.021 \\ 0.038 & 0.639 \end{bmatrix}, W_2 = \begin{bmatrix} 0.512 & 0 \\ -0.001 & 0.337 \\ -2.742 & -0.027 \\ 0.032 & 0.735 \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

Apoi, în cadrul paşilor 3 şi 4, se determină matricele $G_1 = P^{-1}W_1$, $G_2 = P^{-1}W_2$, $F_1 = (PD_1)^T C^+$ şi $F_2 = (PD_2)^T C^+$;

$$G_1 = \begin{bmatrix} 3.245 & -0.296 \\ -0.173 & 1.090 \\ -10.625 & 0.164 \\ -0.969 & 2.043 \end{bmatrix}, G_2 = \begin{bmatrix} 3.579 & -0.271 \\ -0.219 & 1.444 \\ -10.700 & 0.171 \\ -1.025 & 2.358 \end{bmatrix}; F_1^T = \begin{bmatrix} 0.087 \\ 0.062 \end{bmatrix}, F_2^T = \begin{bmatrix} 0.114 \\ 0.133 \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

Matricele F_1 şi F_2 sunt apoi folosite pentru calculul termenilor compensatori γ_i, în timp ce, pentru calculul termenilor compensatori α_i, se utilizează semnalele $r(t), \hat{x}(t)$, precum şi matricele P şi C; s-au obţinut caracteristicilor de timp din fig. 2.2 şi fig. 2.3.

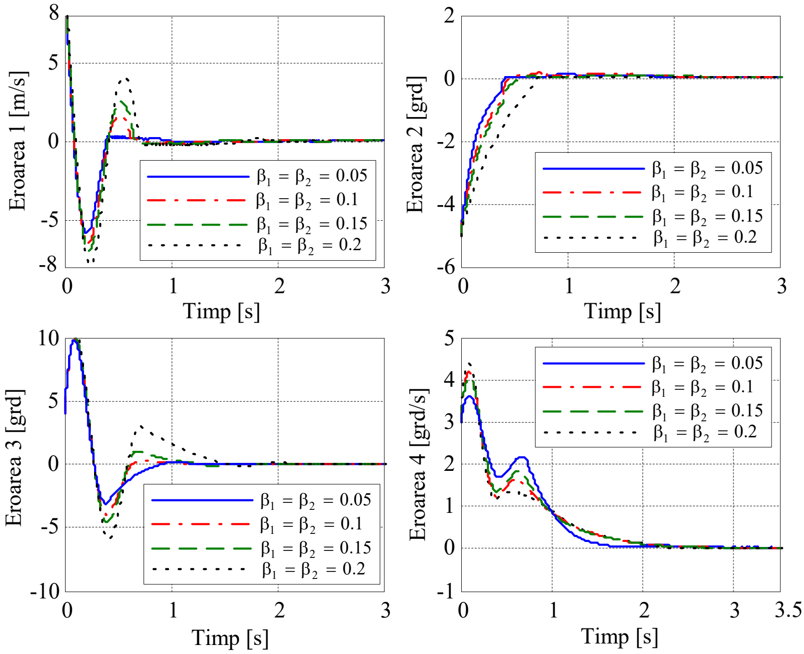

Fig. 2.2. Erorile de estimare ale observerului Akhenak (intrare aleatoare)

Parcurgerea paşilor algoritmului se face pentru două cazuri: intrarea aleatoare (fig. 2.2) şi intrare de tipul $u = -K\hat{x}$ (fig. 2.3), unde K este matricea de amplificare determinată printr-un algoritm optimal (de exemplu algoritmul ALGLX [140]). În fig. 2.2 sunt reprezentate grafic erorile de estimare ale observerului multiplu Akhenak (cazul 1: intrarea u de tip aleator) pentru 4 valori ale constantelor de proiectare β_1 şi β_2 (β_1=β_2= 0.2, β_1=β_2=0.15, β_1=β_2=0.1, β_1=β_2=0.05); se observă că alegerea acestor două constante influentează viteza de convergenţă a observerului multiplu. Cu cât se aleg valori mai mici pentru constantele pozitive β_1 şi β_2, cu atât viteza de convergenţă a observerului scade. Acelaşi lucru se observă şi analizând fig. 2.3 (erorile de estimare ale observerului Akhenak pentru intrare de tipul $u = -K\hat{x}$).

În fig. 2.4 sunt reprezentate grafic variabilele de stare $x_i(t)$ – cu linie continuă şi variabilele de stare estimate $\hat{x}_i(t)$ – cu linie întreruptă asociate observerului Akhenak pentru β_1=β_2=0.2 şi intrare de tipul $u = -K\hat{x}$. În figurile 2.2-2.4 se observă anularea erorilor de estimare a variabilelor de stare, deci o bună funcţionare a observerului multiplu de tip Akhenak. Singurul dezavantaj îl constituie suprareglajele mari; motivul este legat de necunoaşterea valorilor iniţiale ale variabilelor de stare, aceste valori iniţiale fiind alese de autorii lucrării. O îmbunătăţire a suprareglajului şi a vitezei de convergenţă se poate obţine micşorând constantele de proiectare β_1 şi β_2 şi modificând expresiile funcţiei de decizie şi funcţiilor de activare.

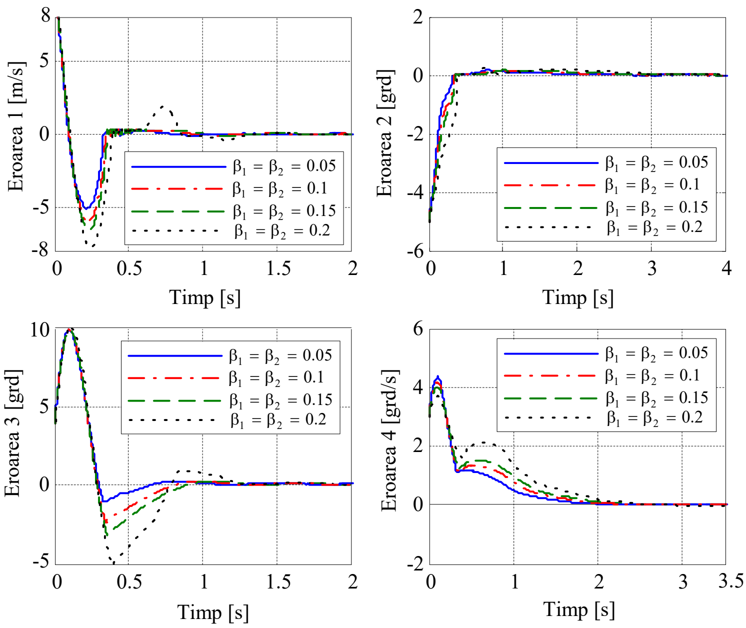

Fig. 2.3. Erorile de estimare ale observerului Akhenak (intrare de tipul $u = -K\hat{x}$)

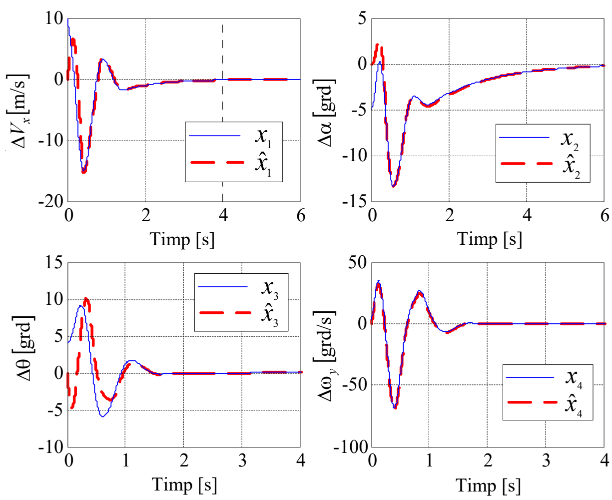

Fig. 2.4. Variabilele de stare $x_i(t)$ şi variabilele de stare estimate $\hat{x}_i(t)$

2.2. OBSERVERUL MULTIMPLU JAMEL

Un alt observer multiplu ce permite estimarea stării unui sistem neliniar este prezentat în [96]; sistemului neliniar, pentru care se proiectează observerul multiplu, îi corespunde un model multiplu Takagi-Sugeno, acesta fiind influenţat de necunoscute de modelare (incertitudini) şi de intrări necunoscute.

Există două structuri pentru modelele multiple în funcţie de conexiunea ce există între modelele locale. Pentru primul dintre acestea, modelele locale au acelaşi vector de stare şi, în consecinţă, modelul multiplu, numit şi model multiplu Takagi-Sugeno, se compune din submodele omogene [103]. Pentru cel de-al doilea tip de model multiplu, modelele locale nu au aceeaşi stare şi modelul multiplu foloseşte modele locale heterogene. Dintre cele două tipuri de modele multiple, primul este mai utilizat; acesta a fost propus de Takagi & Sugeno [200] în cadrul modelării fuzzy şi de către Johansen & Foss [104] în cadrul modelării ce utilizează noţiunea de model multiplu.

2.2.1. STRUCTURA MODELULUI MULTIPLU TAKAGI-SUGENO

Reprezentarea modelului multiplu de tip Takagi-Sugeno se face prin intermediul următoarelor ecuaţii

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi(t))\left[A_i x(t) + B_i u(t) + d_i\right], \\ y(t) = \sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi(t))\left[C_i x(t) + E_i u(t) + N_i\right], \end{cases} \tag{2.30}$$

unde semnificaţiile vectorilor $x(t), u(t), \xi(t), d_i$, ale matricelor A_i, B_i şi ale funcţiilor de activare μ_i sunt aceleaşi ca în cazul ecuaţiilor (2.1); dacă $E_i = N_i$, ieşirea sistemului este liniară, adică [96]: $C_1 = C_2 = \cdots = C_M = C$ şi ecuaţiile ce descriu dinamica modelului multiplu sunt de tipul (2.1). Ca şi în cazul observerului multiplu proiectat în [5], $x(t) \in \mathcal{M}^{n\times 1}, u(t) \in \mathcal{M}^{m\times 1}, y(t) \in \mathcal{M}^{p\times 1}, A_i \in \mathcal{M}^{n\times n}, B_i \in \mathcal{M}^{n\times m}, C \in \mathcal{M}^{p\times n}$, iar M este numărul modelelor locale, acesta depinzând de precizia de modelare şi de complexitatea sistemului neliniar. Matricele A_i , B_i , C şi vectorii d_i pot fi obţinuţi prin liniarizarea directă a modelului neliniar în jurul câtorva puncte de funcţionare (operare) sau prin utilizarea procedurii de identificare [3], [105]. Funcţiile de activare $\mu_i(\xi(t)), i = \overline{1, M}$, cuantifică contribuţia relativă a fiecărui model local la modelul multiplu; aceste funcţii sunt neliniare în raport cu $\xi(t)$ şi verifică condiţiile (2.2). Expresiile funcţiilor de activare pot fi [96]

$$\mu_i(\xi(t)) = \frac{\omega_i(\xi(t))}{\sum_{j=1}^{M} \omega_j(\xi(t))}, \tag{2.31}$$

unde

$$\omega_i(\xi(t)) = \exp\left[\frac{-\xi(t) - \left(\xi(t)^{(i)}\right)^2}{\sigma^2}\right]; \tag{2.32}$$

vectorul de decizie $\xi(t)$ este accesibil în timp real şi depinde de intrările şi de ieşirile sistemului în cauză, adică $\xi(t) = f(u(t), y(t))$.

În continuare, este prezentată o nouă structură de observer multiplu pentru modelele multiple afectate de intrări necunoscute (ecuaţiile (2.3)).

2.2.2. PROIECTAREA OBSERVERULUI MULTIPLU

Se consideră modelul multiplu afectat de intrări necunoscute $\left(v(t) \in \mathcal{M}^{q \times 1}\right)$, a cărui dinamică este [96]

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi(t))\left[A_i x(t) + B_i u(t) + Dv(t) + d_i\right], \\ y(t) = Cx(t); \end{cases} \tag{2.33}$$

s-a considerat, faţă de dinamica (2.3), că $D_1 = D_2 = \cdots = D_M = D$.

Fie observerul multiplu [96]

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi(t))[N_i z(t) + G_{i1}u(t) + G_{i2} + L_i y(t)], \\ \hat{x}(t) = z(t) - Ey(t), \end{cases} \tag{2.34}$$

unde $N_i \in \mathcal{M}^{n\times n}, G_{i1} \in \mathcal{M}^{n\times m}, L_i \in \mathcal{M}^{n\times p}$ (amplificarea observerului local „*i*”), $G_{i2} \in \mathcal{M}^{n\times 1}$ este un vector constant, iar $E \in \mathcal{M}^{n\times p}$ – matrice de transformare. Matricele N_i , G_{i1} L_i , E şi vectorii G_{i2} trebuie determinaţi astfel încât vectorul de stare estimat $\hat{x}(t)$ să tindă către $x(t)$. Pentru uşurinţa notaţiei, în continuare, se omite dependenţa de timp (t).

Se consideră eroarea observerului multiplu $e = x - \hat{x}$, care se exprimă, utilizând ecuaţiile (2.34) şi notaţia Q=I+EC, după cum urmează [96]

$$e = x - \hat{x} = x - z + ECx = Qx - z\,. \tag{2.35}$$

Dinamica erorii observerului este [96]

$$\dot{e} = \sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi)[N_i e + (QA_i - N_i - K_i C)x] + \sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi)[(QB_i - G_{i1})u + QDv + Qd_i - G_{i2}], \tag{2.36}$$

în care $K_i = N_i E + L_i$. Analizând dinamica (2.36) şi având în vedere notaţiile utilizate până acum, adică

$$Q = I + EC\,, K_i = N_i E + L_i\,, \tag{2.37}$$

dinamica (2.36) se reduce la

$$\dot{e} = \sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi) N_i e \tag{2.38}$$

dacă şi numai dacă sunt îndeplinite simultan condiţiile [96]

$$QA_i - N_i - K_i C = 0\,, QD = 0\,, Qd_i - G_{i2} = 0\,, QB_i - G_{i1}\,. \tag{2.39}$$

Dacă, în plus,

$$\widetilde{N} = \sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi) N_i \tag{2.40}$$

este o matrice stabilă, eroarea estimatorului de stare tinde la zero.

În continuare, se derivează funcţia Lyapunov (2.12) şi rezultă

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi) e^T \left(N_i^T P + P N_i\right) e; \tag{2.41}$$

$\dot{V} < 0$, deci convergenţa la zero a erorii observerului multiplu este garantată dacă sunt îndeplinite simultan condiţiile (2.37) şi (2.39) şi, în plus, există o matrice simetrică şi pozitiv definită *P* astfel încât, $(\forall) i = \overline{1, M}$,

$$N_i^T P + P N_i < 0. \tag{2.42}$$

Sintetizând, eroarea observerului multiplu (2.34) tinde la zero, dacă $(\forall) i = \overline{1, M}$, perechile (A_i, C) sunt observabile, matricea (2.40) este stabilă şi sunt îndeplinite simultan condiţiile [96]

$$\begin{cases} N_i^T P + P N_i < 0, N_i = Q A_i - K_i C, \\ Q = I + EC, QD = 0, L_i = K_i - N_i E, \\ G_{i1} = Q B_i, G_{i2} = Q d_i. \end{cases} \tag{2.43}$$

Rezolvarea sistemului de ecuaţii (2.43), pentru determinarea matricelor *Q*, *E*, K_i, P, N_i, L_i, G_{i1} şi a vectorilor G_{i2}, se face în 3 etape după cum urmează:

Etapa 1:

Din ecuaţiile 3 şi 4 ale sistemului (2.43), dacă $\mathrm{rang}(CD) = \mathrm{rang}(D)$, se obţine [96]

$$E = -D(CD)^+ + H_0\left[I - (CD)(CD)^+\right], \tag{2.44}$$

sau, pentru $H_0 = 0_{n \times p}$,

$$E = -D(CD)^+; \tag{2.45}$$

cu aceasta, se determină expresia matricei *Q*

$$Q = I + EC = I - D(CD)^+ C. \tag{2.46}$$

Etapa 2:

Din primele trei relaţii (2.43) se obţine [96]

$$\left(QA_i - K_iC\right)^T P + P\left(QA_i - K_iC\right) < 0\,, i = \overline{1, M}\,; \tag{2.47}$$

inecuaţia matriceală (2.47) este neliniară în raport cu necunoscutele P şi K_i. Pentru rezolvarea sa prin metode specifice inecuaţiilor matriceal-liniare (LMI), este nevoie de transformarea sa într-o inecuaţie liniară, pentru aceasta utilizându-se metoda schimbării de variabilă. Astfel, utilizând schimbarea de variabilă $W_i = PK_i$, se obţine

$$\left(QA_i\right)^T P + P\left(QA_i\right) - C^T W_i^T - W_i C < 0 \tag{2.48}$$

sau

$$\begin{bmatrix} \left(QA_i\right)^T P + P\left(QA_i\right) - C^T W_i^T - W_i C & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} < 0\,. \tag{2.49}$$

Echivalenţa inecuaţiilor (2.48) şi (2.49) s-a obţinut ţinând cont de lema Schur scrisă sub forma: $\begin{bmatrix} \widetilde{Q} & \widetilde{S} \\ \widetilde{S}^T & \widetilde{R} \end{bmatrix} < 0$ dacă şi numai dacă $\widetilde{R} < 0$ şi $\widetilde{Q} - \widetilde{S}\widetilde{R}^{-1}\widetilde{S}^T < 0$; lema Schur a fost particularizată astfel: $\widetilde{Q} = \left(QA_i\right)^T P + P\left(QA_i\right) - C^T W_i^T - W_i C\,, \widetilde{S} = 0\,, \widetilde{R} = -I$. Inecuaţia matriceal-liniară (2.49) se rezolvă în raport cu P şi W_i şi apoi se determină matricele

$$K_i = P^{-1} W_i\,. \tag{2.50}$$

Etapa 3:

Cunoscând matricele E (ecuaţia (2.45)), Q (ecuaţia (2.46)) şi K_i (ecuaţia (2.50)), din a doua ecuaţie (2.43) se obţin $N_i, i = \overline{1, M}$; din a 5-a ecuaţie se calculează $L_i, i = \overline{1, M}$, iar din ultimele două ecuaţii (2.43) se determină matricele G_{i1} şi vectorii $G_{i2}\,, i = \overline{1, M}$.

Schema bloc ce modelează ecuaţiile (2.33) şi (2.34) este prezentată în fig. 2.5; proiectarea observerului multiplu Jamel se face prin parcurgerea următorilor paşi:

Algoritmul Jamel

Pasul 1: Se declară matricele $A_i\,, B_i\,, d_i\,, C\,, D\,, i = \overline{1, M}$ şi se stabilesc expresiile vectorului de decizie $\xi(t)$ şi expresiile funcţiilor de activare $\mu_i(\xi(t)), i = \overline{1, M}$.

Pasul 2: Se determină matricele Q şi E utilizând ecuaţiile (2.45) şi (2.46).

Pasul 3: Se rezolvă inecuaţia matricel-liniară (2.49) în raport cu necunoscutele P şi W_i, şi, pentru fiecare $i = \overline{1, M}$, se calculează $K_i = P^{-1}W_i$.

Pasul 4: Se calculează matricele N_i din a doua ecuaţie (2.43), L_i - a 5-a ecuaţie (2.43), G_{i1}, G_{i2} – ultimele două ecuaţii (2.43).

Pasul 5: Se verifică dacă matricea $\widetilde{N}$ (expresia (2.40)) este stabilă şi, de asemenea, se verifică dacă toate condiţiile (2.43) sunt verificate.

Pasul 6: Utilizând matricele şi vectorii calculaţi la paşii 4 şi 5, se proiectează observerul descris de ecuaţiile (2.34); pentru validarea estimatorului de stare, se utilizează şi ecuaţiile ce descriu dinamica modelului multiplu (ecuaţiile de stare – ieşire (2.33)).

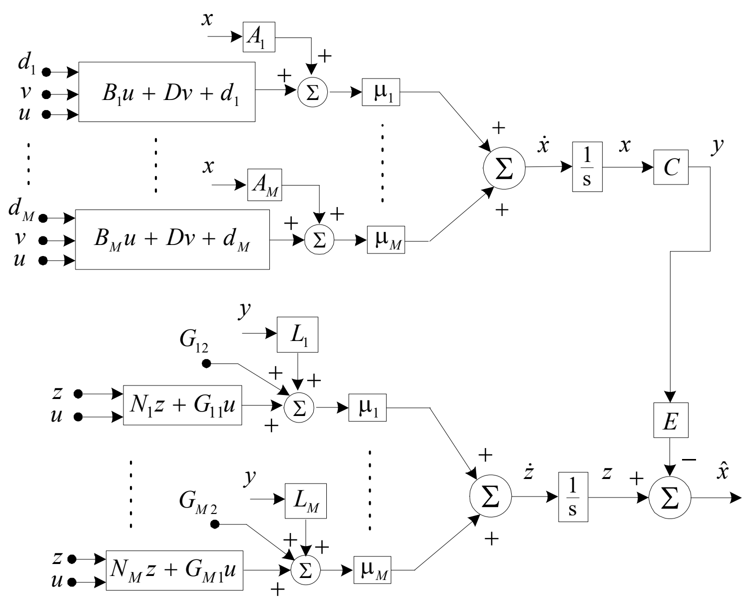

Fig. 2.5. Schema bloc de modelare a observerului multiplu Jamel

2.2.3. CREŞTEREA ROBUSTEŢEI OBSERVERULUI MULTIPLU

Dacă modelul multiplu este afectat de necunoscute de modelare (incertitudini), dinamica sa este reprezentată prin intermediul următoarelor ecuaţii [96]

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi(t))\left[(A_i \pm \Delta A_i)x(t) + (B_i \pm \Delta B_i)u(t) + d_i\right], \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \tag{2.51}$$

sau

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi(t))\left[A_i\, x(t) + B_i u(t) + \bar{u}_i(t) + d_i\right], \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \tag{2.52}$$

unde

$$\bar{u}_i(t) = \pm\Delta A_i\, x(t) \pm \Delta B_i\, u(t); \tag{2.53}$$

ΔA_i reprezintă matricele incertitudinilor de modelare, iar ΔB_i – incertitudinile legate de intrările sistemului.

În [96], pentru cazul modelului multiplu afectat de incertitudini, estimarea stării se face considerând vectorii $\bar{u}_i(t)$, formaţi din erorile de modelare şi erorile de intrare, ca vectori asociaţi intrărilor necunoscute. În acest caz, dinamica (2.26) este de tipul (2.33) cu modificările: $D \to I_{n\times q}, v(t) \to \bar{u}_i(t)$; rezultatele obţinute mai sus rămân valabile cu modificările tocmai menţionate.

O altă metodă de estimare a stării în condiţiile modelului multiplu afectat de incertitudini este descrisă pe scurt în continuare [96]. Se consideră dinamica (2.51) şi observerul multiplu (2.34); dinamica erorii devine în acest caz

$$\dot{e} = \sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi)\left[N_i e + (QA_i - N_i - K_i C)x\right] + \sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi)\left[(QB_i - G_{i1})u + Q\bar{u}_i + Qd_i - G_{i2}\right]. \tag{2.54}$$

Dacă sunt îndeplinite simultan condiţiile

$$Q = I + EC, N_i = QA_i - K_i C, L_i = K_i - N_i E, G_{i1} = QB_i, G_{i2} = Qd_i \tag{2.55}$$

şi matricea (2.40) este stabilă, dinamica erorii estimatorului de stare este

$$\dot{e} = \sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi)\left(N_i e + Q\,\bar{u}_i\right). \tag{2.56}$$

Se consideră din nou funcţia Lyapunov (2.12) şi se calculează $\dot{V}(t)$. Problema proiectării observerului multiplu robust pentru estimarea stării şi defectelor constă în determinarea matricelor Q, E, K_i, P, N_i, L_i, G_{i1}, G_{i2} astfel încât, pentru $\bar{u}_i(t) = 0$, eroarea de estimare să fie nulă $\Leftrightarrow \lim\limits_{t\to\infty} e(t) = 0$ şi, pentru $\bar{u}_i(t) \neq 0$, eroarea de estimare a stării să fie mărginită, adică

$$\| e(t) \| Q_e \le \lambda \| \bar{u}_i(t) \| Q_u\,, \tag{2.57}$$

unde $\lambda > 0$ se numeşte nivel de atenuare, iar Q_e şi Q_u sunt 2 matrice pozitiv definite. Pentru a satisface condiţia $\lim\limits_{t\to\infty} e(t) = 0$, este suficientă determinarea funcţiei Lyapunov $V(t)$ astfel încât [96]

$$\dot{V}(t) + e^T(t) Q_e e(t) - \lambda^2 \bar{u}_i^{\,T}(t) Q_u(t) \bar{u}_i(t) < 0; \tag{2.58}$$

conform [117], inegalitatea (2.58) se scrie sub forma

$$\psi^T(t)\,\Omega\,\psi(t) < 0, \tag{2.59}$$

cu

$$\psi(t) = \begin{bmatrix} e(t) \\ \bar{u}_i(t) \end{bmatrix}, \Omega = \begin{bmatrix} N_i^T P + P N_i + Q_e & PQ \\ Q^T P & -\lambda^2 Q_u \end{bmatrix}. \tag{2.60}$$

Inegalitatea (2.59) este adevărată dacă $\Omega < 0$; cu alte cuvinte, este nevoie de rezolvarea inecuaţiei matriceal-neliniare

$$\begin{bmatrix} N_i^T P + P N_i + Q_e & PQ \\ Q^T P & -\lambda^2 Q_u \end{bmatrix} < 0. \tag{2.61}$$

Ţinând cont de a doua ecuaţie (2.55) şi utilizând notaţiile $W_i = PK_i$, $n = \lambda^2$, inecuaţia (2.61) se transformă în inecuaţia matriceal-liniară

$$\begin{bmatrix} (QA_i)^T P + P(QA_i) - C^T W_i^T - W_i C + Q_e & PQ \\ Q^T P & -mQ_u \end{bmatrix} < 0\,, \tag{2.62}$$

inecuaţie uşor revolvabilă utilizând LMI tool. Prin rezolvarea acesteia, se determină W_i, P şi m; apoi, se determină uşor K_i cu ecuaţia (2.50). Determinarea celorlalte matrice necunoscute din ecuaţiile observerului robust se face rezolvând ecuaţiile (2.55).

2.2.4. VALIDAREA OBSERVERULUI MULTIPLU

Observerul Jamel este validat în Matlab/Simulink; a fost aleasă, pentru validarea observerului, mişcarea longitudinală a unei aeronave, dinamica acesteia fiind descrisă de ecuaţiile (2.3) şi (2.27), cu modificarea $D_1 = D_2 = D = [0.5 \quad 0.5 \quad 0.5 \quad 0.5]^T$. Validarea observerului se face pentru două cazuri: 1) dinamica modelului multiplu fără necunoscute de modelare (incertitudini) dar cu intrări necunoscute (modelulul multiplu (2.33)); 2) dinamica modelului multiplu cu necunoscute de modelare, acestea fiind interpretate ca intrări necunoscute (modelulul multiplu (2.52)). Pentru primul caz, vectorul intrărilor necunoscute v a fost ales aleatoriu; pentru matricele de mai sus, au rezultat M=2, n=4, m=q=1, p=2. Funcţia de decizie şi funcţiile de activare au fost alese de forma

$$\begin{aligned} &\xi(t) = u(t), \\ &\mu_1(\xi(t)) = 1.2\,(1 - \tanh(\xi(t))), \\ &\mu_2(\xi(t)) = 1 - \mu_1(\xi(t)), \end{aligned} \tag{2.63}$$

însă, la fel de bine, ele puteau fi descrise de ecuaţiile (2.31) şi (2.32). Pentru cazul al doilea de simulare, s-a considerat că incertitudinile $\Delta A_1, \Delta A_2, \Delta B_1, \Delta B_2$ reprezintă variaţii de 5% ale matricelor A_1, A_2, B_1 şi B_2; în primul caz de simulare, aceste incertitudini sunt nule. Creşterea robusteţei observerului multiplu (2.34) se face utilizând prima metodă prezentată anterior deoarece aceasta are mulţi paşi comuni cu algoritmul Jamel pentru cazul fără incertitudini. Rezolvarea inecuaţiei matriceal-liniare (2.49) se face în Matlab/Simulink, în raport cu necunoscutele P şi W_i, i=1, 2, prin intermediul instrucţiunilor: *setlmis*, *newlmi*, *lmivar*, *lmiterm*, *getlmis*, *feasp* şi *dec2mat*.

Pentru cazul 1 de simulare (dinamică fără incertitudini) s-au obţinut matricele

$$Q=\begin{bmatrix}0.5 & -0.5 & 0 & 0\\ -0.5 & 0.5 & 0 & 0\\ -0.5 & -0.5 & 1 & 0\\ -0.5 & -0.5 & 0 & 1\end{bmatrix}, E=\begin{bmatrix}-0.5 & -0.5\\ -0.5 & -0.5\\ -0.5 & -0.5\\ -0.5 & -0.5\end{bmatrix}, P=\begin{bmatrix}1.051 & -0.000 & 0.229 & 0.064\\ -0.000 & 1.051 & -0.229 & -0.064\\ 0.229 & -0.229 & 0.591 & -0.235\\ 0.064 & -0.064 & -0.235 & 0.284\end{bmatrix},$$

$$W_1=\begin{bmatrix}0.613 & 7.375\\ -7.033 & 0.096\\ -3.678 & 3.710\\ -0.476 & 0.828\end{bmatrix}, W_2=\begin{bmatrix}0.957 & -0.070\\ 0.500 & 0.419\\ -3.691 & 3.677\\ -0.503 & 0.934\end{bmatrix}, K_1=\begin{bmatrix}7.957 & 4.081\\ -14.065 & 3.026\\ -25.913 & 10.308\\ -28.061 & 11.193\end{bmatrix}, K_2=\begin{bmatrix}5.957 & -5.673\\ -4.570 & 6.005\\ -17.824 & 19.505\\ -18.876 & 22.040\end{bmatrix},$$

$$N_1=\begin{bmatrix}-7.896 & -3.805 & -4.905 & -0.500\\ 14.004 & -3.302 & 4.905 & 0.500\\ 25.980 & -10.044 & 4.905 & 0.500\\ 28.193 & -9.969 & 4.905 & -1.490\end{bmatrix}, N_2=\begin{bmatrix}-5.943 & 5.978 & -4.905 & -0.500\\ 4.556 & -6.310 & 4.905 & 0.500\\ 17.938 & -19.210 & 4.905 & 0.500\\ 19.090 & -20.545 & 4.905 & -2.000\end{bmatrix},$$

$$L_1=\begin{bmatrix}-0.596 & -4.472\\ -6.011 & 11.080\\ -15.242 & 20.978\\ -17.241 & 22.012\end{bmatrix}, L_2=\begin{bmatrix}3.272 & -8.358\\ -2.744 & 7.830\\ -15.758 & 21.572\\ -18.151 & 22.765\end{bmatrix}, G_{11}=\begin{bmatrix}0.02\\ -0.02\\ 0.02\\ -12.48\end{bmatrix}, G_{21}=\begin{bmatrix}0.1\\ -0.1\\ 0\\ -10.8\end{bmatrix},$$

$$G_{11}=10^{-16}\,[0.69\ 0.69\ 0.55\ 0.55]^T,\ G_{21}=10^{-16}\,[0.83\ 0.83\ 0.55\ 0.55]^T,$$

în timp ce, pentru cazul 2 de simulare (dinamică cu incertitudini) au rezultat matricele

$$Q=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, E=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, P=10^8\begin{bmatrix}3.402 & 0.129 & -0.064 & -0.036\\ 0.129 & 3.842 & -1.482 & -1.162\\ -0.064 & -1.482 & 2.019 & 0.541\\ -0.036 & -1.162 & 0.541 & 4.503\end{bmatrix}, W_1=10^8\begin{bmatrix}3.529 & -0.104\\ -0.104 & 2.677\\ 0.225 & 1.320\\ 0.104 & 1.896\end{bmatrix},$$

$$W_2=10^8\cdot\begin{bmatrix}5.053 & -0.126\\ -0.126 & 3.965\\ 0.233 & 1.392\\ 0.145 & 2.337\end{bmatrix}, K_1=\begin{bmatrix}1.040 & -0.051\\ -0.005 & 1.497\\ 0.137 & 1.586\\ 0.013 & 0.616\end{bmatrix}, K_2=\begin{bmatrix}1.488 & -0.069\\ -0.022 & 2.037\\ 0.140 & 1.966\\ 0.021 & 0.807\end{bmatrix},$$

$$N_1=\begin{bmatrix}-1.040 & 0.051 & 0 & 0\\ -0.122 & -2.037 & 0 & 1\\ -0.137 & -1.586 & 0 & 1\\ 0.051 & 0.343 & 0 & -0.990\end{bmatrix}, N_2=\begin{bmatrix}-1.488 & 0.069 & 0 & 0\\ -0.105 & -2.637 & 0 & 1\\ -0.140 & -1.966 & 0 & 1\\ 0.078 & 0.392 & 0 & -1.5\end{bmatrix}, L_1=\begin{bmatrix}0 & -0.051\\ -0.128 & 1.497\\ 0 & 1.586\\ 0.065 & 0.616\end{bmatrix},$$

$$L_2=\begin{bmatrix}0 & -0.069\\ -0.128 & 2.037\\ 0 & 1.966\\ 0..1 & 0.807\end{bmatrix}, G_{11}=\begin{bmatrix}0\\ -0.04\\ 0\\ -12.5\end{bmatrix}, G_{21}=\begin{bmatrix}0\\ -0.1\\ 0\\ -10.8\end{bmatrix}, G_{11}=\begin{bmatrix}0\\ 0.2\\ 0.2\\ 0.2\end{bmatrix}, G_{21}=\begin{bmatrix}0\\ 0.3\\ 0.3\\ 0.3\end{bmatrix}.$$

S-au obţinut caracteristicile de timp din fig. 2.6 – erorile $e_i(t)=\hat{x}_i(t)-x_i(t)$; în primul dintre cele două grafice 2.6 sunt prezentate erorile de estimare asociate vectorului de stare pentru primul caz de simulare (model multiplu fără incertitudini), în timp ce în cel de-al doilea grafic 2.6 sunt prezentate erorile de estimare asociate vectorului de stare pentru al doilea caz de simulare (model multiplu cu incertitudini).

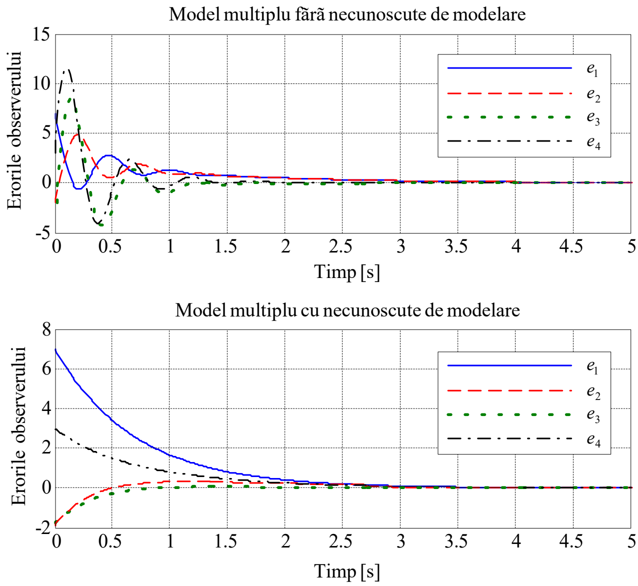

Fig. 2.6. Erorile de estimare ale observerului Jamel (cu şi fără incertitudini)

Un alt observer multiplu ce permite estimarea stării unui sistem neliniar este prezentat în [7]; sistemului neliniar, pentru care se proiectează observerul multiplu, îi corespunde modelul multiplu Takagi-Sugeno (2.33), observerul asociat acestuia fiind descris de ecuaţiile (2.34). Autorii lucrării [7] folosesc acelaşi observer multiplu pentru estimarea stării, diferenţa fiind făcută de modul în care se determină matricele P şi K_i, precum şi de modul în care se verifică stabilitatea matricei (2.40). Astfel, utilizând din nou notaţia $Q=I+EC$, în [7] se arată că eroarea observerului (ecuaţia (2.35)) tinde la zero dacă sunt îndeplinite simultan condiţiile (2.43) şi dacă este asigurată stabilitatea matricei $\widetilde{N}$ (expresia (2.40)). În [96], determinarea matricelor P şi K_i se face prin rezolvarea inecuaţiei matriceale (2.42), care, utilizând a doua ecuaţie (2.43) şi notaţia $W_i=PK_i$, conduce la inecuaţia matriceal-liniară (2.49) - inecuaţie cu necunoscutele P şi W_i. În cadrul lucrărilor [7] şi [31], se arată că rezolvarea inecuaţiei (2.42) este echivalentă cu rezolvarea inecuaţiei

$$\frac{1}{2}\left(N_i + N_i^T\right)P + \frac{1}{2}P\left(N_i + N_i^T\right) < 0, \tag{2.64}$$

care, prin înlocuirea matricelor N_i cu $QA_i - K_i C$, conduce la

$$\frac{1}{2}\left[\left(QA_i - K_i C\right) + \left(QA_i - K_i C\right)^T\right]P + \frac{1}{2}P\left[\left(QA_i - K_i C\right) + \left(QA_i - K_i C\right)^T\right] < 0. \tag{2.65}$$

Inecuaţia (2.65) este neliniară în raport cu P şi W_i; în locul utilizării notaţiei $W_i=PK_i$, pentru a transforma inecuaţia într-una liniară, se poate folosi procedura din [31]. Procedura se bazează pe liniarizarea în jurul unor valori iniţiale K_{0i} şi P_0. Astfel [7],

$$K_i = K_{0i} + \Delta K_i,\ P = P_0 + \Delta P_i; \tag{2.66}$$

cu acestea, inecuaţia (2.65) conduce la sistemul de inecuaţii

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\left\{\left[QA_i - \left(K_{0i} + \Delta K_i\right)C\right] + \left[QA_i - \left(K_{0i} + \Delta K_i\right)C\right]^T\right\}\left(P_0 + \Delta P\right) + \\ \quad + \frac{1}{2}\left(P_0 + \Delta P\right)\left\{\left[QA_i - \left(K_{0i} + \Delta K_i\right)C\right] + \left[QA_i - \left(K_{0i} + \Delta K_i\right)C\right]^T\right\} < 0, \\ P_0 + \Delta P > 0. \end{cases} \tag{2.67}$$

În continuare, negljijând termenii de ordinul 2, prima inecuaţie (2.67) devine

$$\begin{aligned} &\left[\left(QA_i - K_{0i}C\right) + \left(QA_i - K_{0i}C\right)^T\right]\Delta P + \Delta P\left[\left(QA_i - K_{0i}C\right) + \left(QA_i - K_{0i}C\right)^T\right] - \\ &- \Delta K_i C P_0 - P_0^T C^T \Delta K_i^T - C^T \Delta K_i^T P_0 + \left[\left(QA_i - K_{0i}C\right) + \left(QA_i - K_{0i}C\right)^T\right]P_0 + \\ &+ P_0\left[\left(QA_i - K_{0i}C\right) + \left(QA_i - K_{0i}C\right)^T\right] - P_0 \Delta K_i C < 0. \end{aligned} \tag{2.68}$$

Rezolvarea inecuaţiei (2.68) în raport cu ΔP şi ΔK_i este o operaţiune destul de dificilă datorită faptului că nu există o metodă efectivă de alegere a valorilor iniţiale K_{0i} şi P_0, putând astfel exista alegeri nefavorabile pentru care inecuaţia matriceal-liniară (2.68) nu conduce la o soluţie. Pentru a limita variaţia lui K_i şi P, în [7] se introduc câteva constrângeri suplimentare:

$$\begin{cases} \|\Delta K_i\| \le \varepsilon \|\Delta K_{0i}\|, \\ \|\Delta P\| \le \varepsilon \|\Delta P_0\|; \end{cases} \tag{2.69}$$

constrângerile (2.69) pot fi scrise şi sub forma inecuaţiilor matriceale

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \varepsilon \|P_0\| I_n & \Delta P \\ \Delta P & \varepsilon \|P_0\| I_n \end{bmatrix} > 0, \\ \begin{bmatrix} \varepsilon \|K_{0i}\| I_n & \Delta K_i \\ \Delta K_i^T & \varepsilon \|K_{0i}\| I_p \end{bmatrix} > 0. \end{cases} \tag{2.70}$$

În consecinţă, determinarea matricei simetrice şi pozitiv definite P şi a matricelor K_i se face rezolvând inecuaţiile matriceal-liniare (2.68) şi (2.70) în raport cu ΔP şi ΔK_i şi apoi utilizând ecuaţiile (2.66).

Tot în [7] este analizată viteza de convergenţă a observerului multiplu (2.34) şi se arată că această viteză depinde de valorile proprii ale matricei $\widetilde{N} = \sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi) N_i$; mai mult, este prezentată o metodă de îmbunătăţire a performanţelor observerului multiplu. În acest sens, se utilizează o proprietate din [176], conform căreia observerul multiplu (2.34) este observabil local dacă perechiile $(QA_i\,, C), i = \overline{1, M}$, sunt observabile. Pentru a fi siguri de convergenţa erorii de estimare a observerului, se defineşte, în planul complex, o zonă $S(\alpha, \beta)$ care este intersecţia dintre cercul de centru (0,0) şi rază β şi semiplanul stâng complex delimitat de verticala cu ecuaţia x=-α, unde α este o constantă pozitivă. În [7] se arată că valorile proprii ale matricei $\widetilde{N}$ aparţin zonei $S(\alpha\,, \beta)$ dacă există matricele ΔP şi ΔK_i astfel încât, $(\forall) i = \overline{1, M}$,

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} -\beta\left(P_0 + \Delta P\right) & N_{0i}^T P - C^T \Delta K_i^T P_0 \\ P N_{0i} - P_0 \Delta K_i C & -\beta\left(P_0 + \Delta P\right) \end{bmatrix} < 0, \\ N_{0i}^T \Delta P + \Delta P N_{0i} - C^T \Delta K_i^T P_0 - P_0 \Delta K_i C + N_{0i}^T P_0 + P_0 N_{0i} + 2\alpha\left(P_0 + \Delta P\right) < 0, \end{cases} \tag{2.71}$$

unde $N_{0i} = QA_i - K_{0i} C$.

2.3. OBSERVERUL MULTIMPLU AKHENAK (VARIANTA 2)

Un alt observer multiplu a fost proiectat în [8]; faţă de cazurile prezentate până acum, observerul din [8] este dedicat sistemelor neliniare cu intrări necunoscute ce influenţează atât vectorul de stare cât şi vectorul de ieşire. Scopul estimatorului de stare este acela de a estima vectorul de stare şi vectorul intrărilor necunoscute. Metodologia de proiectare a observerului multiplu din [8] este prezentată în continuare.

2.3.1. STRUCTURA MODELULUI MULTIPLU

Se consideră modelul multiplu descris de ecuaţiile [8]

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi(t))\left[A_i x(t) + B_i u(t) + D_i v(t)\right], \\ y(t) = Cx(t) + Fv(t), \end{cases} \tag{2.72}$$

unde $x(t) \in \mathcal{M}^{n\times 1}$ este vectorul de stare al sistemului, $u(t) \in \mathcal{M}^{m\times 1}$ – vectorul intrărilor cunoscute, $v(t) \in \mathcal{M}^{q\times 1}$ – vectorul intrărilor necunoscute, $y(t) \in \mathcal{M}^{p\times 1}$ – vectorul de ieşire, iar $C \in \mathcal{M}^{p\times n}$ este matricea de ieşire a sistemului. Pentru modelul local „i”, $A_i \in \mathcal{M}^{n\times n}$ este matricea asociată stării, $B_i \in \mathcal{M}^{n\times m}$ – matricea de intrare, $D_i \in \mathcal{M}^{n\times q}$ şi $F \in \mathcal{M}^{p\times q}$ – matrice de trasmisie. Funcţiile de activare $\mu_i(\xi(t)), i = \overline{1,M}$, au proprietăţile (2.2). În cele ce urmează, pentru uşurinţa notaţiilor, dependenţa de timp (t) este omisă.

2.3.2. PROIECTAREA OBSERVERULUI MULTIPLU

Se consideră observerul multiplu [8]

$$\begin{cases} \dot{z} = \sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi)\left(N_i z + G_i u + L_i y\right), \\ \hat{x} = z - Ey, \end{cases} \tag{2.73}$$

unde $N_i \in \mathcal{M}^{n\times n}, G_i \in \mathcal{M}^{n\times m}, L_i \in \mathcal{M}^{n\times p}$ sunt matrice de amplificare ale observerului local „i”, iar $E \in \mathcal{M}^{n\times p}$ – matrice de transformare. Matricele N_i, G_i, L_i şi E trebuie determinate astfel încât vectorul de stare estimat $\hat{x}$ să tindă către x.

Se consideră eroarea observerului multiplu $e = x - \hat{x}$, care se exprimă, utilizând ecuaţiile (2.72), (2.73) şi notaţia $Q = I + EC$, după cum urmează [8]

$$e = x - \hat{x} = x - z + E\left(Cx + Fv\right) = x - z + ECx + EFv = Qx - z + EFv. \tag{2.74}$$

Utilizând ecuaţiile (2.72)-(2.74), dinamica erorii observerului este [8]

$$\dot{e} = \sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi)\left[N_i e + \left(QA_i - N_i - K_i C\right)x + \left(QB_i - G_i\right)u + \left(QD_i - K_i F\right)v\right] + EF\dot{v}, \tag{2.75}$$

unde K_i are forma (2.37). Dacă sunt îndeplinite simultan condiţiile

$$QD_i = K_i F, G_i = QB_i, N_i = QA_i - K_i C, EF = 0, \tag{2.76}$$

eroarea are dinamica (2.38) şi tinde la zero dacă există o matrice simetrică şi pozitiv definită P astfel încât, $(\forall) i = \overline{1, M}$, inecuaţia (2.42) este verificată. Aşadar, constrângerile (2.76) şi (2.42) conduc la determinarea completă a observerului multiplu; în plus, matricea F trebuie să aibă rang de coloană maxim, adică $\operatorname{rang}(F) < p$ [8]. Sinteza constrângerilor şi ecuaţiilor prezentate până acum poate fi făcută în cadrul teoremei:

<u>*Teorema 2.2*</u> [8]

Eroarea de estimare dintre modelul multiplu (2.72) şi observerul (2.73) converge asimptotic global la zero dacă există matricele P>0, S şi W_i astfel încât, $(\forall) i = \overline{1, M}$, sunt îndeplinite simultan condiţiile

$$\begin{cases} A_i^T P + PA_i + A_i^T C^T S^T + SCA_i - W_i C - C^T W_i^T < 0, \\ \left(P + SC\right)D_i = W_i F, \\ SF = 0. \end{cases} \tag{2.77}$$

În aceste condiţii, observerul multiplu (2.73) este definit prin intermediul matricelor

$$\begin{cases} E = P^{-1}S, \\ G_i = \left(I + P^{-1}SC\right)B_i, \\ N_i = \left(I + P^{-1}SC\right)A_i - P^{-1}W_i C, \\ L_i = P^{-1}W_i - N_i E. \end{cases} \tag{2.78}$$

Demonstraţie

Inecuaţia matriceal-neliniară (2.42), prin înlocuirea lui N_i cu a treia expresia (2.76) şi utilizând notaţiile [8]

$$W_i = PK_i\, , S = PE\, , \tag{2.79}$$

se transformă în inecuaţia matriceal-liniară (2.77) – inecuaţie cu necunoscutele P şi W_i ; matricele A_i şi C sunt cunoscute, iar matricea S se determină din a treia condiţie (2.77) în funcţie de matricea F. Astfel, dacă numărul de coloane asociat matricei C este egal cu numărul de linii asociat matricei F, matricea S se calculează cu expresia [7]

$$S = I - F(CF)^{+} C\, ; \tag{2.80}$$

o alternativă o reprezintă utilizarea metodei prezentate în [210]. După determinarea matricelor P, S şi W_i (care trebuie să verifice şi a doua condiţie (2.77)), se calculează K_i din prima ecuaţie (2.79), scrisă sub forma (2.50), şi apoi matricea E utilizând a doua ecuaţie (2.79).

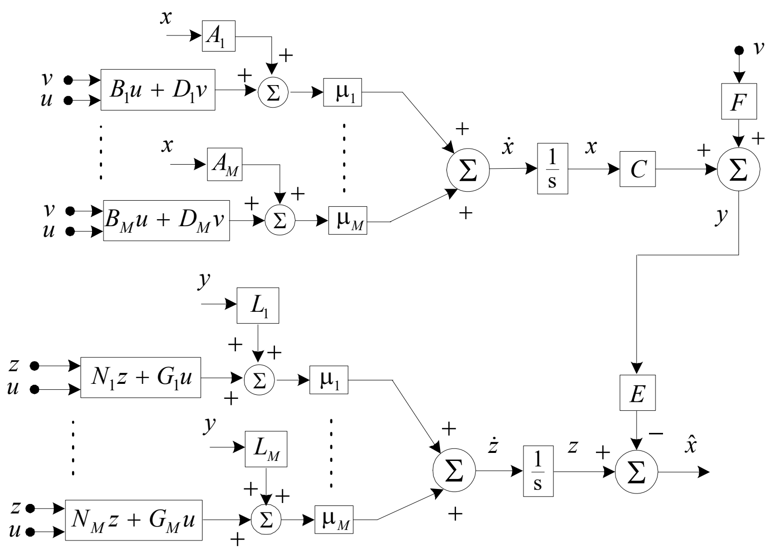

Fig. 2.7. Schema bloc de modelare a observerului multiplu Akhenak (varianta 2)

A doua ecuaţie (2.77) se obţine simplu înmulţind la stânga cu P prima ecuaţie (2.76), în timp ce a treia ecuaţie (2.77) se obţine înmulţind la stânga cu P a patra ecuaţie (2.76). Au fost, aşadar, demonstrate ecuaţiile (2.77) şi prima ecuaţie (2.78). Obţinerea ultimelor 3 ecuaţii (2.78) se face înlocuind în expresiile (2.76) pe Q cu $I+EC$, pe E cu $P^{-1}S$, pe K_i cu expresia (2.50) şi ţinând cont de ecuaţia (2.37).

Pentru rezolvarea inecuaţiei matriceal-liniare (2.77), se utilizează lema Schur sub forma: $\begin{bmatrix} \widetilde{Q} & \widetilde{S} \\ \widetilde{S}^T & \widetilde{R} \end{bmatrix} < 0$ dacă şi numai dacă $\widetilde{R} < 0$ şi $\widetilde{Q} - \widetilde{S}\widetilde{R}^{-1}\widetilde{S}^T < 0$; lema Schur a fost particularizată astfel:

$$\widetilde{Q} = A_i^T P + PA_i + A_i^T C^T S^T + SCA_i - W_i C - C^T W_i^T \,, \widetilde{S} = 0 \,, \widetilde{R} = -I \,. \qquad (2.81)$$

Schema bloc ce modelează ecuaţiile (2.72) şi (2.73) este prezentată în fig. 2.10.

2.3.3. ESTIMAREA INTRĂRILOR NECUNOSCUTE

S-a demonstrat până acum că estimatorul de stare (2.73) este convergent dacă sunt satisfăcute condiţiile din teorema 2.2. În regim staţionar, eroarea e tinde la zero; înlocuind x cu $\hat{x}$ în ecuaţiile (2.72), se obţine [8]

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi)\left(A_i\hat{x} + B_i u + D_i\hat{v}\right), \\ \hat{y} = C\hat{x} + F\hat{v}, \end{cases} \qquad (2.82)$$

unde $\hat{v}$ este estimarea vectorului intrărilor necunoscute (v), iar $\hat{y}$ este estimarea ieşirii sistemului (y). $\hat{v}$ se calculează în [8] după cum urmează:

$$\hat{v} = \left(W^T W\right)^{-1} W^T \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} - \sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi)\left(A_i\hat{x} + B_i u\right) \\ \hat{y} - C\hat{x} \end{bmatrix}, \qquad (2.83)$$

$$W = \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} - \sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi) D_i \\ F \end{bmatrix}; \qquad (2.84)$$

W trebuie să aibă rang de coloană maxim pentru a putea calcula $W^+ = \left(W^T W\right)^{-1} W^T$. Dacă F are rang de coloană maxim, estimarea intrărilor necunoscute se face astfel [8]:

$$\hat{v} = \left(F^T F\right)^{-1} F^T \left(y - \hat{y}\right). \tag{2.85}$$

Proiectarea observerului din [8] se face prin parcurgerea următorilor paşi:

Algoritmul Akhenak (varianta 2)

Pasul 1: Se declară matricele A_i, B_i, D_i, C, F, $i = \overline{1, M}$; de asemenea, se stabilesc expresiile vectorului de decizie $\xi(t)$ şi expresiile funcţiilor de activare $\mu_i(\xi(t)), i = \overline{1, M}$.

Pasul 2: Se determină matricea S din a treia ecuaţie (2.77).

Pasul 3: Se rezolvă inecuaţia matriceal-liniară (2.77) - inecuaţie cu necunoscutele P şi W_i; matricele S, P şi W_i determinate anterior trebuie să verifice a doua ecuaţie (2.77).

Pasul 4: Pentru fiecare $i = \overline{1, M}$, se determină matricele K_i (ecuaţia (2.50)) şi apoi, se calculează matricea E (prima ecuaţie (2.78)) şi $Q=I+EC$.

Pasul 5: Se calculează matricele G_i, N_i şi L_i (ecuaţiile (2.78)) şi se verifică dacă sunt îndeplinite simultan condiţiile (2.76) şi dacă matricea $\tilde{N}$ (ecuaţia (2.40)) este stabilă.

Pasul 6: Utilizând matricele calculate la paşii anteriori, se proiectează observerul descris de ecuaţiile (2.73); pentru validarea estimatorului de stare, se utilizează şi ecuaţiile ce descriu dinamica modelului multiplu (ecuaţiile de stare – ieşire (2.72)). Se estimează vectorul intrărilor necunoscute utilizând ecuaţiile (2.83) şi (2.84), dacă F are rang de coloană maxim, sau ecuaţia (2.85) în caz contrar.

2.3.4. VALIDAREA OBSERVERULUI MULTIPLU

Observerul Akhenak (varianta 2) este validat în mediul Matlab/Simulink; a fost aleasă, pentru validarea observerului, mişcarea longitudinală a unei aeronave, dinamica acesteia fiind descrisă de ecuaţiile (2.72) în care

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.007 & 0.012 & -9.81 & 0 \\ -0.128 & -0.54 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.065 & 0.96 & 0 & -0.99 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.04 \\ 0 \\ -12.5 \end{bmatrix}, D_1 = \begin{bmatrix} 0.07 \\ 0.02 \\ 0.07 \\ 0.08 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -0.01 & 0.01 & -9.81 & 0 \\ -0.128 & -0.6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.1 & 1.2 & 0 & -1.5 \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.1 \\ 0 \\ -10.8 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.01 \\ 0.06 \\ 0.07 \end{bmatrix}, x^T = \left[\Delta V_x \;\; \Delta\alpha \;\; \Delta\theta \;\; \Delta\omega_y\right], u = \delta_p, C = I_4, F = \left[0.01 \;\; 0 \;\; 0.01 \;\; 0\right]^T.$$

Vectorul intrărilor necunoscute v a fost ales aleatoriu; pentru matricele de mai sus, au rezultat $M = 2, n = p = 4, m = q = 1$. Funcţia de decizie şi funcţiile de activare au fost alese de aceeaşi formă ca şi în cazul celuilalt observer multiplu Akhenak, adică: $\xi(t) = u(t), \mu_1(\xi(t)) = 0.5(1 - \tanh(\xi(t))), \mu_2(\xi(t)) = 0.5(1 + \tanh(\xi(t)))$. Se determină, în cadrul pasului 2, matricea S din a treia ecuaţie (2.77); apoi, se rezolvă inecuaţia matriceal-liniară (2.77) - inecuaţie cu necunoscutele P, W_1 şi W_2. Pentru fiecare $i = \overline{1,2}$, se calculează matricele K_i (ecuaţia (2.50)) şi apoi, se determină matricea E (prima ecuaţie (2.78)) şi Q=I+EC. În cadrul pasului 5, se determină matricele $G_1, G_2, N_1, N_2, L_1, L_2$ – ecuaţiile (2.78); s-au obţinut

$$S = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P = 1.933 \cdot I_4, W_1 = \begin{bmatrix} 0.949 & -3.332 & -13.282 & -2.162 \\ 2.985 & -0.617 & 0.266 & 29.357 \\ -10.586 & -0.272 & 5.871 & 1.633 \\ 1.852 & -23.607 & 0.800 & -1.937 \end{bmatrix},$$

$$W_2 = \begin{bmatrix} 0.723 & -0.101 & -7.822 & 0.043 \\ -0.250 & -0.793 & -0.001 & 2.453 \\ -16.000 & -0.003 & 5.871 & 0.433 \\ -0.250 & 4.000 & 2.000 & -3.433 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 0.258 & 0 & -0.258 & 0 \\ 0 & 0.517 & 0 & 0 \\ -0.258 & 0 & 0.258 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.517 \end{bmatrix},$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1.258 & -0.258 & 0 & 0 \\ 0 & 1.517 & 0 & 0 \\ -0.258 & 0 & 1.258 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.517 \end{bmatrix}, G_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.06 \\ 0 \\ -18.96 \end{bmatrix}, G_2 = \begin{bmatrix} 0.12 \\ -0.15 \\ -0.02 \\ -16.38 \end{bmatrix},$$

$$N_1 = \begin{bmatrix} -0.500 & 1.738 & -5.477 & 0.859 \\ -1.738 & -0.500 & -0.138 & -13.666 \\ 5.477 & 0.138 & -0.500 & 0.413 \\ -0.859 & 13.666 & -0.413 & -0.500 \end{bmatrix}, N_2 = \begin{bmatrix} -0.500 & 0.064 & -8.301 & -0.281 \\ -0.064 & -0.500 & 0.000 & 0.248 \\ 8.301 & 0.000 & -0.500 & 1.034 \\ 0.281 & -0.248 & -1.034 & -0.500 \end{bmatrix},$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} -0.796 & -2.622 & -5.582 & -1.562 \\ 1.958 & -0.060 & -0.275 & 22.252 \\ -7.021 & -0.212 & 4.582 & 0.630 \\ 1.073 & -19.278 & 0.298 & -0.743 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} -1.643 & -0.085 & -2.028 & 0.167 \\ -0.112 & -0.151 & -0.017 & 1.140 \\ -10.551 & -0.001 & 5.312 & -0.310 \\ -0.469 & 2.197 & 1.374 & -1.517 \end{bmatrix}.$$

S-au obţinut caracteristicile grafice din fig. 2.8 şi fig. 2.9.

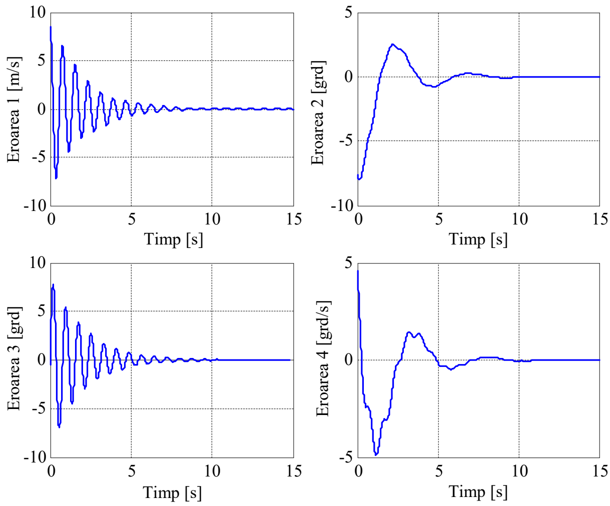

Fig. 2.8. Erorile de estimare ale observerului Akhenak (intrare aleatoare)

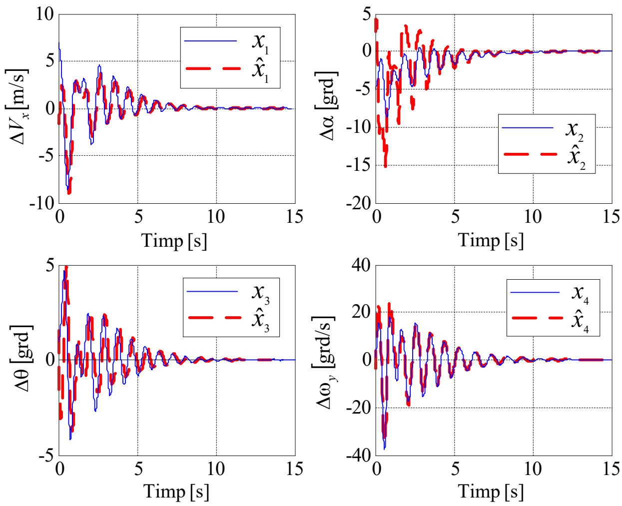

Fig. 2.9. Variabilele de stare $x_i(t)$ şi variabilele de stare estimate $\hat{x}_i(t)$

Simularea se face pentru două cazuri: intrare aleatoare (fig. 2.8) şi intrare de tipul $u = -K\hat{x}$ (fig. 2.9), unde K este matricea de amplificare determinată printr-un algoritm optimal (de exemplu algoritmul ALGLX [140]). În fig. 2.8 sunt reprezentate grafic erorile de estimare ale observerului multiplu Akhenak (cazul 1: intrarea u de tip aleator); în fig. 2.9 sunt reprezentate grafic variabilele de stare $x_i(t)$ – cu linie continuă şi variabilele de stare estimate $\hat{x}_i(t)$ – cu linie întreruptă asociate observerului Akhenak (varianta 2) pentru intrare de tipul $u = -K\hat{x}$. Din figurile 2.8 şi 2.9 se remarcă anularea erorilor de estimare a variabilelor de stare, deci buna funcţionare a observerului multiplu de tip Akhenak (varianta 2).

2.4. OBSERVERE MARX

Dacă unui sistem, pentru care se doreşte estimarea vectorului de stare şi, eventual, a intrărilor necunoscute, i se ataşază un descriptor de tip Takagi-Sugeno, ecuaţiile modelului multiplu sunt diferite faţă de cele de până acum şi, implicit, metodologia de proiectare a observerelor este alta. Astfel de observere pentru sistemele descriptor de tip Takagi-Sugeno sunt prezentate în cadrul lucrării [157].

2.4.1. DINAMICA SISTEMELOR DESCRIPTOR DE TIP TAKAGI-SUGENO

Ecuaţiile generale asociate unui sistem descriptor de tip Takagi-Sugeno (variantă continuă) sunt [157]

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi(t))\left[A_i x(t) + B_i u(t) + D_i v(t)\right], \\ y(t) = Cx(t) + Gv(t), \end{cases} \tag{2.86}$$

sau, în variantă discretă,

$$\begin{cases} Ex_{k+1} = \sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi_k)\left[A_i x_k + B_i u_k + D_i v_k\right], \\ y_k = Cx_k + Gv_k , \end{cases} \tag{2.87}$$

unde $x(t) \in \mathcal{M}^{n\times 1}$ este vectorul de stare al sistemului, $u(t) \in \mathcal{M}^{m\times 1}$ – vectorul intrărilor cunoscute, $v(t) \in \mathcal{M}^{q\times 1}$ – vectorul intrărilor necunoscute, $y(t) \in \mathcal{M}^{p\times 1}$ – vectorul de ieşire, iar matricele E, A_i, B_i, D_i, C şi G se consideră reale, cunoscute şi constante; matricea E poate fi nesingulară. Funcţiile de activare $\mu_i(\xi(t)), i = \overline{1, M}$, pentru varianta continuă a ecuaţiilor de stare-ieşire, verifică condiţiile (2.2), iar pentru varianta discretă, condiţiile

$$\sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi_k)=1, 0 \le \mu_i(\xi_k) \le 1, (\forall)k. \tag{2.88}$$

2.4.2. PROIECTAREA OBSERVERULUI MULTIPLU

Forma observerului multiplu propus în [157] este

$$\begin{cases} \dot{z}(t)=\sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi(t))[N_i z(t)+M_i u(t)+L_i y(t)], \\ \hat{x}(t)=z(t)+T_2 y(t), \end{cases} \tag{2.89}$$

în variantă continuă, sau

$$\begin{cases} z_{k+1}=\sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi_k)[N_i z_k + M_i u_k + L_i y_k], \\ \hat{x}_k = z_k + T_2 y_k , \end{cases} \tag{2.90}$$

în variantă discretă.

Ecuaţiile (2.86) sunt asemănătoare cu cele ale modelului multiplu prezentat în [8]; diferenţa este reprezentată de prezenţa matricei E, care, nu întotdeauna este matricea unitate astfel încăt modelul (2.86) să fie de tipul (2.72).

Pentru a cunoaşte în totalitate observerul multiplu, este nevoie de calculul matricelor N_i , M_i , L_i şi T_2 astfel încât vectorul de stare estimat $\hat{x}(t)$ să tindă către vectorul de stare $x(t)$. Dacă se defineşte eroarea $e(t)=x(t)-\hat{x}(t)$, sau, în variantă discretă, $e_k = x_k - \hat{x}_k$, scopul este acela de a determina matricele N_i , M_i , L_i şi T_2 astfel încât $\lim_{t\to\infty} e(t)=0$ sau $\lim_{k\to\infty} e_k = 0$.

Se presupune că există matricele T_1 şi T_2 astfel încât [157]

$$\begin{aligned} &T_1 E + T_2 C = I_n , \\ &T_2 G = 0 ; \end{aligned} \tag{2.91}$$

cu acestea, ţinând cont de ecuaţiile (2.86) şi (2.89), eroarea estimatorului de stare devine

$$e(t) = T_1 E x(t) - z(t). \tag{2.92}$$

Prin derivare, se obţine dinamica erorii observerului multiplu [157]

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi(t))[N_i e(t) + (T_1 A_i - N_i T_1 E - L_i C)x(t) + (T_1 B_i - M_i)u(t) + (T_1 D_i - L_i G)v(t)]. \tag{2.93}$$

Dinamica erorii este de tipul (2.38) dacă sunt îndeplinite simultan condiţiile [157]

$$\begin{aligned} &T_1 E + T_2 C = I_n, T_2 G = 0, \\ &T_1 A_i - N_i T_1 E - L_i C = 0, \\ &T_1 B_i - M_i = 0, T_1 D_i - L_i G = 0; \end{aligned} \tag{2.94}$$

utilizând notaţia $K_i = N_i T_2 - L_i$, constrângerile (2.94) se scriu sub forma

$$\begin{aligned} &N_i = T_1 A_i + K_i C, T_1 E + T_2 C = I_n, T_2 G = 0, \\ &T_1 D_i + K_i G = 0, M_i = T_1 B_i, L_i = N_i T_2 - K_i. \end{aligned} \tag{2.95}$$

Primele 4 condiţii (2.95) înseamnă a determina o matrice $\Omega \in \mathcal{M}^{n \times (n + p(M+1))}$ astfel încât [157]

$$\begin{cases} \Omega R = S, \\ N_i = \Omega S_i, \end{cases} \tag{2.96}$$

unde

$$\begin{aligned} &\Omega = \begin{bmatrix} \widetilde{\Omega}_1 & \widetilde{\Omega}_2 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} \widetilde{R}_1 & \widetilde{R}_2 \\ \widetilde{R}_3 & \widetilde{R}_4 \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} \widetilde{S}_1 & \widetilde{S}_2 \end{bmatrix}, S_i = \begin{bmatrix} \widetilde{S}_{i,1} \\ \widetilde{S}_{i,2} \end{bmatrix}, \\ &\widetilde{\Omega}_1 = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix}, \widetilde{\Omega}_2 = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & \dots & K_M \end{bmatrix}, \\ &\widetilde{R}_1 = \begin{bmatrix} E & 0_{n\times q} \\ C & G \end{bmatrix}, \widetilde{R}_2 = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 & \dots & D_M \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0_{p\times q} & \dots & 0_{p\times q} \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \widetilde{R}_3 = \begin{bmatrix} 0_{pM\times n} & 0_{pM\times q} \end{bmatrix}, \widetilde{R}_4 = I_M \otimes G, \\ &\widetilde{S}_1 = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n\times q} \end{bmatrix}, \widetilde{S}_2 = 0_{n\times Mq}, \widetilde{S}_{i,1} = \begin{bmatrix} A_i^T & 0_{n\times p} \end{bmatrix}^T, \widetilde{S}_{i,2} = e_i \otimes C; \end{aligned} \tag{2.97}$$

$e_i \in \mathcal{M}^{M\times 1}$ sunt vectori coloană cu toate componentele=0 cu excepţia componentei „i” care este egală cu 1. Considerând 2 matrice $\alpha \in \mathcal{M}^{\alpha_1 \times \alpha_2}, \beta \in \mathcal{M}^{\beta_1 \times \beta_2}$ şi $\alpha_{j,l}$ – elementele matricei α, produsul Kronecker a celor 2 matrice este

$$\alpha \otimes \beta = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1}\beta & \dots & \alpha_{1,\alpha_2}\beta \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{\alpha_1,1}\beta & \dots & \alpha_{\alpha_1,\alpha_2}\beta \end{bmatrix} \in \mathcal{M}^{\alpha_1\beta_1 \times \alpha_2\beta_2}. \tag{2.98}$$

Determinarea matricei Ω înseamnă a determina matricele T_1, T_2 şi $K_i, i = \overline{1, M}$; după calculul acestor matrice, M_i se determină din a 5-a ecuaţie (2.95), N_i - din prima ecuaţie (2.95), iar L_i - din ultima ecuaţie (2.95). Rezolvarea primei ecuaţii (2.96), deci determinarea matricei Ω, este posibilă doar dacă [157]

$$\text{rang}\begin{bmatrix} R \\ S \end{bmatrix} = \text{rang}(R), \tag{2.99}$$

condiţie echivalentă cu

$$\text{rang}(R) = \text{rang}\begin{bmatrix} [D_1 & \dots & D_M] \\ & I_M \otimes G & \end{bmatrix} + n + \text{rang}(G); \tag{2.100}$$

demonstraţia se găseşte în [157].

Dacă este îndeplinită condiţia (2.100), cunoscând matricele R şi S, se rezolvă prima ecuaţie matriceală (2.96) şi rezultă

$$\Omega = SR^+ + TR^\perp, \tag{2.101}$$

în care „+” este simbolul pseudo-inversei, $R^\perp = I - RR^+$, iar $T \in \mathcal{M}^{n \times (n + p(M+1))}$ este determinată mai jos prin rezolvarea unei inecuaţii matriceal-liniare (LMI). Astfel, înlocuind Ω cu forma (2.101) în a doua ecuaţie (2.96), se obţine [157]

$$N_i = SR^+ S_i + TR^\perp S_i; \tag{2.102}$$

aşadar, matricele N_i se determină fie utilizând ecuaţia (2.102), fie cu ajutorul primei ecuaţii (2.95), după ce, în prealabil, s-a determinat Ω şi, deci, matricele T_1, T_2 şi K_i.

Eroarea observerului multiplu (ecuaţia (2.38)) tinde la zero dacă există o matrice simetrică şi pozitiv definită P astfel încât, $(\forall) i = \overline{1, M}$, este îndeplinită condiţia (2.42). Înlocuind în (2.42) pe N_i (ecuaţia (2.102)), se obţine inecuaţia matriceal-liniară [157]

$$\left(SR^{+}S_i\right)^T P + P\left(SR^{+}S_i\right) + \left(R^{\perp}S_i\right)^T \overline{T}^{\,T} + \overline{T}\left(R^{\perp}S_i\right) < 0, \tag{2.103}$$

în care s-a făcut notaţia $\overline{T} = PT \in \mathcal{M}^{n\times(n+p(M+1))}$, iar matricele $R \in \mathcal{M}^{(n+p(M+1))\times(n+q(M+1))}$, $S \in \mathcal{M}^{n\times(n+q(M+1))}$ şi $S_i \in \mathcal{M}^{(n+p(M+1))\times n}$ sunt definite de ecuaţiile (2.97).

Rezultatul poate fi extins şi pentru cazul descrierii discrete; astfel, inecuaţia (2.103), utilizând lema Schur, se scrie sub forma [157]

$$\begin{bmatrix} \Phi_i & \left(R^{\perp}S_i\right)^T \overline{T}^{\,T} \\ \overline{T}\left(R^{\perp}S_i\right) & -P \end{bmatrix} < 0, \tag{2.104}$$

unde

$$\Phi_i = \left(R^{\perp}S_i\right)^T \overline{T}^{\,T}\left(SR^{+}S_i\right) + \left(SR^{+}S_i\right)^T \overline{T}\left(R^{\perp}S_i\right) + \left(SR^{+}S_i\right)^T P\left(SR^{+}S_i\right) - P. \tag{2.105}$$

Schema bloc ce modelează ecuaţiile (2.86) şi (2.89) este prezentată în fig. 2.10.

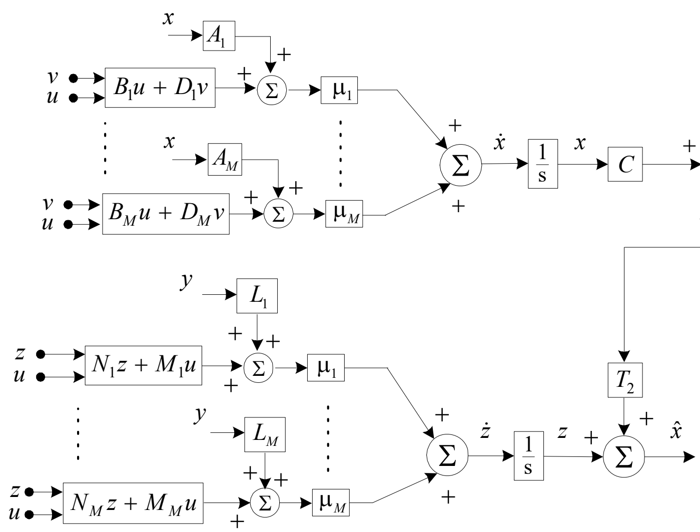

Fig. 2.10. Schema bloc de modelare a observerului multiplu Marx

Sintetizând, algoritmul de proiectare a observerului multiplu prezentat mai sus (observerul multiplu Marx – varianta 1) este următorul:

Algoritmul Marx (algoritmul 1)

Pasul 1: Se declară matricele A_i, B_i, D_i, C, G, E, $i = \overline{1, M}$ şi se stabilesc expresiile vectorului de decizie $\xi(t)$ şi expresiile funcţiilor de activare $\mu_i(\xi(t)), i = \overline{1, M}$.

Pasul 2: Se calculează matricele R, S şi S_i - ecuaţiile (2.97) şi se verifică îndeplinirea condiţiei (2.100); în caz contrar, acest estimator de stare nu poate fi construit.

Pasul 3: Se rezolvă inecuaţia matriceal-liniară (2.103), sau (2.104) pentru varianta discretă, în raport cu necunoscutele P şi $\overline{T}$; apoi, se obţine matricea $T = P^{-1}\overline{T}$.

Pasul 4: Se determină matricea Ω utilizând ecuaţia (2.101); prin partiţionarea ei, conform (2.97), se obţin matricele T_1, T_2 şi $K_i, i = \overline{1, M}$;

Pasul 5: Se calculează matricele N_i fie utilizând ecuaţia (2.102), fie cu ajutorul primei ecuaţii (2.95); utilizând ultimele două ecuaţii (2.95), se determină matricele M_i şi L_i. Se verifică dacă matricea $\widetilde{N}$ (expresia (2.40)) este stabilă şi, de asemenea, se verifică dacă toate condiţiile (2.95) sunt verificate.

Pasul 6: Utilizând matricele şi vectorii calculaţi la paşii anteriori, se proiectează observerul descris de ecuaţiile (2.89) – varianta continuă sau (2.90) – varianta discretă; pentru validarea estimatorului de stare, se utilizează şi ecuaţiile ce descriu dinamica sistemului descriptor de tip Takagi-Sugeno (ecuaţiile de stare – ieşire (2.86) sau (2.87)).

Observerul Marx (algoritmul 1) este validat în mediul Matlab/Simulink; a fost aleasă, pentru validarea observerului, mişcarea longitudinală a unei aeronave, dinamica acesteia fiind descrisă de ecuaţiile (2.86) în care

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.007 & 0.012 & -9.81 & 0 \\ -0.128 & -0.54 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.065 & 0.96 & 0 & -0.99 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} -0.01 & 0.01 & -9.81 & 0 \\ -0.128 & -0.6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.1 & 1.2 & 0 & -1.5 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.04 \\ 0 \\ -12.5 \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.1 \\ 0 \\ -10.8 \end{bmatrix}, D_1 = \begin{bmatrix} 0.15 & -0.15 \\ 0.15 & 0.1 \\ 0.15 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.5 \\ 0.25 & 0.2 \\ 0.25 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.8 \\ 0.8 & 0.8 \\ 0.8 & 0.8 \\ 0.8 & 0.8 \end{bmatrix},$$

$$E = \mathrm{diag}\begin{bmatrix} 2 & 1.4 & 2 & 1 \end{bmatrix}, C = I_4, x^T = \begin{bmatrix} \Delta V_x & \Delta\alpha & \Delta\theta & \Delta\omega_y \end{bmatrix}, u = \delta_p .$$

Vectorul intrărilor necunoscute v a fost ales aleatoriu; pentru matricele de mai sus, au rezultat $M = 2, n = p = 4, m = q = 1$. Funcţia de decizie şi funcţiile de activare au fost alese de forma: $\xi(t) = u(t), \mu_1(\xi(t)) = 1.4(1 - \tanh(\xi(t))), \mu_2(\xi(t)) = 1 - \mu_1(\xi(t))$. Se determină matricele R, S şi S_i - ecuaţiile (2.97) şi se verifică îndeplinirea condiţiei (2.100). Se rezolvă (2.103) în raport cu P şi $\overline{T}$; apoi, se obţine matricea $T = P^{-1}\overline{T}$. Au rezultat:

$$P = \begin{bmatrix} 1.405 & -0.328 & -0.328 & -0.328 \\ -0.328 & 1.405 & -0.328 & -0.328 \\ -0.328 & -0.328 & 1.405 & -0.328 \\ -0.328 & -0.328 & -0.328 & 1.405 \end{bmatrix},$$

$$T = 10^3 \begin{bmatrix} 2.38 & 1.23 & 5.42 & -0.90 & -3.73 & -1.29 & -2.68 & -0.59 & 1.45 & 1.43 & 1.47 & 1.48 & -2.22 & -2.20 & -2.23 & -2.19 \\ 2.388 & 1.128 & 5.399 & -1.199 & -3.735 & -1.27 & -2.71 & -0.24 & 1.43 & 1.48 & 1.34 & 1.41 & -2.20 & -2.09 & -2.24 & -2.16 \\ 2.38 & 1.23 & 5.41 & -0.88 & -3.73 & -1.24 & -2.65 & -0.65 & 1.31 & 1.37 & 1.33 & 1.36 & -2.12 & -2.09 & -2.13 & -2.09 \\ 2.39 & 1.11 & 5.32 & -0.97 & -3.74 & -1.58 & -2.60 & -0.47 & 1.51 & 1.55 & 1.53 & 1.37 & -2.07 & -2.05 & -2.04 & -2.25 \end{bmatrix}.$$

În cadrul pasului 4, se determină matricele T_1, T_2 şi K_i, $i = \overline{1, M}$; acestea sunt utilizate pentru calculul matricelor N_i - prima ecuaţie (2.95), M_i şi L_i - ultimele două ecuaţii (2.95). S-au obţinut

$$T_1 = \begin{bmatrix} -0.449 & -14.232 & 5.343 & 11.137 \\ 0.612 & 54.783 & -19.077 & -38.766 \\ -0.799 & -36.935 & 13.377 & 27.553 \\ 1.225 & 94.647 & -33.183 & -67.591 \end{bmatrix}, T_2 = \begin{bmatrix} 1.899 & 19.925 & -10.687 & -11.137 \\ -1.224 & -75.696 & 38.154 & 38.766 \\ 1.598 & 51.709 & -25.754 & -27.553 \\ -2.450 & -132.50 & 66.366 & 68.591 \end{bmatrix},$$

$$N_1 = \begin{bmatrix} -4.934 & -5.536 & 14.919 & -0.063 \\ 4.290 & 2.688 & -77.279 & 64.934 \\ -26.295 & 73.525 & -7.441 & -32.196 \\ 3.220 & -54.154 & 32.846 & 7.091 \end{bmatrix}, M_1 = \begin{bmatrix} -138.647 \\ 482.389 \\ -342.939 \\ 841.107 \end{bmatrix} L_1 = \begin{bmatrix} 29 & 1125 & -557 & -595 \\ 292 & -12788 & 6428 & 6649 \\ 40 & -2235 & 1157 & 1121 \\ 88 & 4860 & -2521 & -2433 \end{bmatrix},$$

$$N_2 = \begin{bmatrix} -7.217 & 32.917 & -11.544 & -9.015 \\ -35.397 & 3.736 & -78.414 & 101.204 \\ -5.492 & 72.331 & -10.820 & -46.270 \\ 12.862 & -86.403 & 46.513 & 10.063 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} -118.905 \\ 413.260 \\ -293.962 \\ 720.645 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} 40 & -2049 & 1048 & 1040 \\ -421 & -18536 & 9329 & 9634 \\ 10 & -30 & 45 & -29 \\ 148 & 7817 & -4023 & -3931 \end{bmatrix}.$$

De asemenea, au fost obţinute caracteristicile grafice din fig. 2.11.

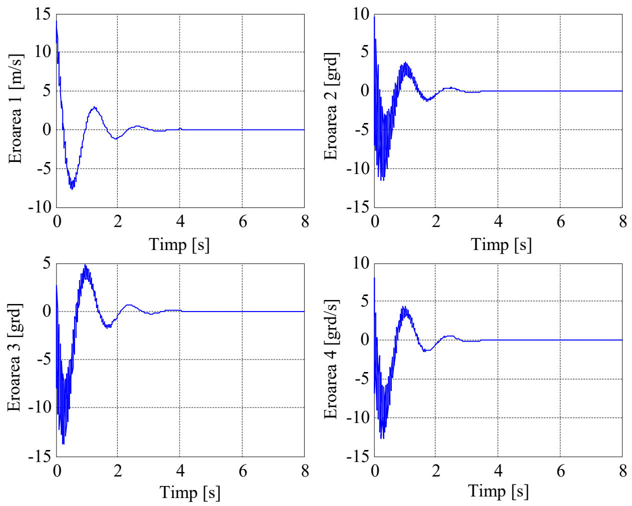

Fig. 2.11. Erorile de estimare ale observerului Marx (algoritmul 1)

2.4.3. PROIECTAREA UNUI OBSERVER PENTRU ATENUAREA INFLUENŢEI INTRĂRILOR NECUNOSCUTE ASUPRA SISTEMELOR DESCRIPTOR DE TIP TAKAGI-SUGENO

În [157] este proiectat, pe lângă observerul multiplu prezentat mai sus, şi un observer pentru sistemele descriptor Takagi-Sugeno care să minimizeze influenţa intrărilor necunoscute asupra procesului de estimare a stării în cazul în care decuplarea de sistemul descriptor a intrărilor necunoscute nu este posibilă; cu alte cuvinte, nu este posibilă proiectarea unui observer multiplu de tipul (2.89) în care să nu apară vectorul intrărilor necunoscute $v(t)$. Metoda este mai puţin restrictivă decât cea prezentată anterior deoarece condiţia (2.100) nu mai trebuie îndeplinită.

În [220] se demonstrează că sistemul descriptor având ecuaţiile

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum\limits_{i=1}^{M} \mu_i(\xi(t))[A_i x(t) + B_i u(t)], \\ y(t) = \sum\limits_{i=1}^{M} \mu_i(\xi(t)) C_i x(t), \end{cases} \tag{2.106}$$

în variantă continuă, sau descris de

$$\begin{cases} x_{k+1} = \sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi_k)\left[A_i x_k + B_i u_k\right], \\ y_k = \sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi_k) C_i x_k , \end{cases} \tag{2.107}$$

în variantă discretă, este stabil şi verifică inegalitatea $\|y\|_2 < \gamma \|u\|_2$ dacă există o matrice simetrică şi pozitiv definită $P \in \mathcal{M}^{n\times n}$ astfel încât, pentru varianta continuă,

$$\begin{bmatrix} A_i^T P + PA_i + C_i^T C_i & PB_i \\ B_i^T P & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \tag{2.108}$$

iar, pentru varianta discretă,

$$\begin{bmatrix} A_i^T PA_i + C_i^T C_i - P & A_i^T PB_i \\ B_i^T PA_i & B_i^T PB_i - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0; \tag{2.109}$$

γ este o constantă pozitivă. În acest caz, un observer pentru atenuarea influenţei intrărilor necunoscute se poate proiecta dacă eroarea de estimare $e(t)$ şi vectorul intrărilor necunoscute $v(t)$ verifică condiţia [157]

$$\|e\|_2 < \gamma \|v\|_2 . \tag{2.110}$$

Proiectarea observerului pentru atenuarea intrărilor necunoscute este sintetizat în cadrul următoarei teoreme:

<u>*Teorema 2.3*</u> [157]

Un observer de tipul (2.89), pentru atenuarea influenţei intrărilor necunoscute asupra sistemele descriptor având ecuaţiile (2.86) există dacă este satisfăcută condiţia

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} E & 0 \\ C & G \end{bmatrix} = n + \operatorname{rang}(G) \tag{2.111}$$

şi dacă, în plus, există o matrice simetrică şi pozitiv definită $P \in \mathcal{M}^{n\times n}$ şi matricele $\overline{T} \in \mathcal{M}^{n\times(n+p)}$ şi $\overline{K}_i \in \mathcal{M}^{n\times p}$ care, $(\forall) i = \overline{1, M}$, verifică inecuaţia matriceal-liniară

$$\begin{bmatrix} \Psi_{i,1} & \Psi_{i,2} \\ \Psi_{i,2}^T & -\gamma^2 I_q \end{bmatrix} < 0, \tag{2.112}$$

unde

$$\begin{aligned} \Psi_{i,1} &= PSR_1^+ A_i + \overline{T}R_1^\perp A_i + \overline{K}_i C + \left(PSR_1^+ A_i + \overline{T}R_1^\perp A_i + \overline{K}_i C\right)^T + I_n, \\ \Psi_{i,2} &= PSR_1^+ D_i + \overline{T}R_1^\perp D_i + \overline{K}_i G, \end{aligned} \tag{2.113}$$

$R_1^+ \in \mathcal{M}^{(n+q)\times n}$, $R_2^+ \in \mathcal{M}^{(n+q)\times p}$, $R_1^\perp \in \mathcal{M}^{(n+p)\times n}$, $R_2^\perp \in \mathcal{M}^{(n+p)\times p}$ sunt definite prin intermediul relaţiilor

$$\begin{bmatrix} E & 0 \\ C & G \end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix} R_1^+ & R_2^+ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} E & 0 \\ C & G \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E & 0 \\ C & G \end{bmatrix}^+ - I_{n+p} = \begin{bmatrix} R_1^\perp & R_2^\perp \end{bmatrix}, \tag{2.114}$$

iar $\overline{K}_i = PK_i$ şi $\overline{T} = PT$.

În [157] se demonstrează că dacă este îndeplinită condiţia (2.111), există matricele T_1 şi T_2 astfel încât

$$\begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix} R = S, \tag{2.115}$$

în care

$$R = \begin{bmatrix} E & 0 \\ C & G \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n\times q} \end{bmatrix}; \tag{2.116}$$

expresiile matricelor T_1 şi T_2 se obţin astfel [157]:

$$T_1 = SR_1^+ + TR_1^\perp, T_2 = SR_2^+ + TR_2^\perp, \tag{2.117}$$

unde $T = P^{-1}\overline{T}$, $K_i = P^{-1}\overline{K}_i$, iar P şi $\overline{T}$, alături de $\overline{K}_i$, sunt soluţiile inecuaţiei (2.112). Pentru determinarea matricelor N_i, M_i şi L_i se utilizează prima şi ultimele 2 relaţii (2.95).

Pentru descrierea discretă (descriptorul (2.87)), teorema 2.3 se scrie ca mai jos:

<u>*Teorema 2.4*</u> [157]

Un observer de tipul (2.90), pentru atenuarea influenţei intrărilor necunoscute asupra sistemele descriptor cu ecuaţiile (2.87) există dacă este îndeplinită condiţia (2.111) şi dacă există o matrice simetrică şi pozitiv definită $P \in \mathcal{M}^{n\times n}$ şi matricele $\overline{T} \in \mathcal{M}^{n\times(n+p)}$ şi $\overline{K}_i \in \mathcal{M}^{n\times p}$ care, $(\forall) i = \overline{1,M}$, verifică inecuaţia matriceal-liniară

$$\begin{bmatrix} I_n - P & 0 & \Phi_{i,1}^T \\ 0 & -\gamma^2 I_n & \Phi_{i,2}^T \\ \Phi_{i,1} & \Phi_{i,1} & -P \end{bmatrix} < 0, \tag{2.118}$$

unde $\Phi_{i,1}$ şi $\Phi_{i,2}$ sunt definite prin intermediul relaţiilor

$$\begin{aligned} \Phi_{i,1} &= PSR_1^+ A_i + \overline{T}R_1^\perp A_i + \overline{K}_i C, \\ \Phi_{i,2} &= PSR_1^+ D_i + \overline{T}R_1^\perp D_i + \overline{K}_i G; \end{aligned} \tag{2.119}$$

expresiile matricelor R_1^+, R_2^+, $R_1^\perp$, $R_2^\perp$, T_1, T_2, K_i şi T sunt la fel ca mai sus.

Algoritmul pentru proiectarea observerului Marx pentru atenuarea influenţei intrărilor necunoscute asupra sistemelor descriptor de tip Takagi-Sugeno este următorul:

Algoritmul Marx (algoritmul 2)

Pasul 1: Se declară matricele $A_i, B_i, D_i, C, G, E, i = \overline{1,M}$ şi se stabilesc expresiile vectorului de decizie $\xi(t)$, precum şi expresiile funcţiilor de activare $\mu_i(\xi(t)), i = \overline{1,M}$.

Pasul 2: Se verifică îndeplinirea condiţiei (2.111); în caz contrar, estimatorul de stare nu poate fi construit.

Pasul 3: Se calculează $R_1^+, R_2^+, R_1^\perp, R_2^\perp$ – ecuaţiile (2.114) şi se rezolvă LMI (2.112), sau (2.118) pentru varianta discretă, în raport cu necunoscutele P, $\overline{T}$ şi $\overline{K}_i$; se utilizează expresiile (2.113) sau (2.119). Se calculează apoi $K_i = P^{-1}\overline{K}_i$ şi $T = P^{-1}\overline{T}$.

Pasul 4: Se calculează matricele T_1 şi T_2 folosind ecuaţiile (2.117).

Pasul 5: Se calculează matricele N_i cu ajutorul primei ecuaţii (2.95) şi matricele M_i şi L_i - ultimele două ecuaţii (2.95). Se verifică dacă matricea $\tilde{N}$ (expresia (2.40)) este stabilă şi, de asemenea, se verifică dacă toate condiţiile (2.95) sunt verificate.

Pasul 6: Utilizând matricele şi vectorii calculaţi la paşii anteriori, se proiectează observerul descris de ecuaţiile (2.89) – varianta continuă sau (2.90) – varianta discretă; pentru validarea estimatorului de stare, se utilizează şi ecuaţiile ce descriu dinamica sistemului descriptor de tip Takagi-Sugeno (ecuaţiile de stare – ieşire (2.86) sau (2.87)).

Observerul Marx (algoritmul 2) este validat în Matlab/Simulink, fiind ales, acelaşi model al mişcării longitudinale ca în paragraful 2.4.2; vectorul intrărilor necunoscute v şi funcţiile de activare sunt, şi ele, aceleaşi. Se verifică, în cadrul pasului 2, îndeplinirea condiţiei (2.111), iar, în cadrul pasului 3 al algoritmului Marx - varianta 2, se calculează $R_1^+, R_2^+, R_1^\perp, R_2^\perp$, şi se rezolvă LMI (2.112) în raport cu necunoscutele P, $\overline{T}$ şi $\overline{K}_i$; apoi, se obţin matricele $K_i = P^{-1}\overline{K}_i$ şi $T = P^{-1}\overline{T}$. Au rezultat matricele

$$P = \begin{bmatrix} 1.199 & -0.005 & -0.005 & -0.005 \\ -0.005 & 1.199 & -0.005 & -0.005 \\ -0.005 & -0.005 & 1.199 & -0.005 \\ -0.005 & -0.005 & -0.005 & 1.199 \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} 55.42 & -92.44 & 2.24 & 89.98 & 39.05 & 167.51 & -84.63 & -56.00 \\ -34.01 & -133.03 & -22.98 & 79.48 & 27.06 & -1.65 & 10.48 & 87.46 \\ 413.72 & 406.83 & 238.62 & 238.11 & -70.70 & -363.87 & 8.61 & 229.98 \\ -44.13 & -119.69 & -62.16 & 114.09 & -76.95 & -40.46 & -130.13 & -13.37 \end{bmatrix},$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 17.825 & 50.894 & 61.705 & -124.471 \\ 84.924 & 28.983 & -74.548 & -38.077 \\ -76.248 & -144.755 & -27.229 & 237.839 \\ -12.410 & 64.223 & 17.555 & -66.730 \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} 20.710 & 71.355 & 2.645 & -106.902 \\ 90.029 & 34.634 & -62.782 & -64.730 \\ -22.060 & -198.992 & -27.283 & 268.836 \\ -67.895 & 93.235 & 53.520 & -84.423 \end{bmatrix}.$$

În cadrul paşilor 4 şi 5, se determină T_1, T_2 care, împreună cu matricele $K_i, i = \overline{1,2}$, sunt utilizate pentru calculul matricelor N_i, M_i şi L_i. S-au obţinut

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1.762 & 106.706 & -37.476 & -76.960 \\ 0.496 & 24.372 & -8.343 & -17.427 \\ -2.670 & -181.424 & 64.477 & 131.380 \\ 0.863 & 48.280 & -16.802 & -34.714 \end{bmatrix}, T_2 = \begin{bmatrix} -2.525 & -149.388 & 74.953 & 76.960 \\ -0.991 & -33.121 & 16.686 & 17.427 \\ 5.340 & 253.994 & -127.954 & -131.380 \\ -1.727 & -67.592 & 33.605 & 35.714 \end{bmatrix},$$

$$N_1 = \begin{bmatrix} -0.848 & -80.588 & 44.413 & 20.948 \\ 80.668 & -0.901 & -79.414 & -4.795 \\ -44.467 & 79.306 & -1.035 & -9.173 \\ -20.852 & 4.837 & 9.082 & -0.886 \end{bmatrix}, M_1 = \begin{bmatrix} 957.7 \\ 216.9 \\ -1635 \\ 432 \end{bmatrix} L_1 = \begin{bmatrix} 265 & 12610 & -6449 & -6432 \\ -704 & -31897 & 16106 & 16493 \\ 120 & 4518 & -2158 & -2470 \\ 110 & 5257 & -2692 & -2679 \end{bmatrix},$$

$$N_2 = \begin{bmatrix} -0.819 & -85.004 & -14.646 & 77.768 \\ 85.117 & -0.896 & -67.647 & -22.560 \\ 14.567 & 67.491 & -1.089 & -45.180 \\ -77.633 & 22.619 & 45.046 & -0.874 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} 820.7 \\ 185.8 \\ -1401 \\ 370.2 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} -147 & -6110 & 3005 & 3264 \\ -626 & -28378 & 14325 & 14682 \\ -9 & -1435 & 866 & 558 \\ 484 & 22256 & -11288 & -11446 \end{bmatrix}.$$

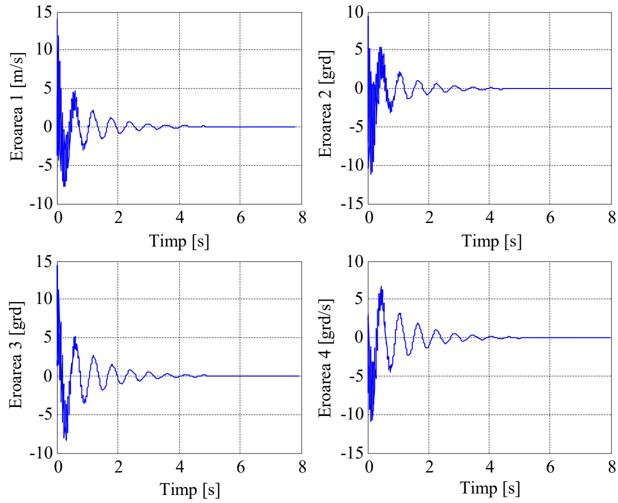

Fig. 2.12. Erorile de estimare ale observerului Marx (algoritmul 2)

S-au obţinut caracteristicile de timp din fig. 2.12 (erorile de estimare a celor 4 variabile de stare ale modelului (2.86)).

2.4.4. PROIECTAREA OBSERVERELOR PENTRU DECUPLAREA ŞI ATENUAREA INFLUENŢEI INTRĂRILOR NECUNOSCUTE ASUPRA SISTEMELOR DESCRIPTOR TAKAGI-SUGENO

Al treilea observer prezentat în [157] este destinat estimării stării sistemelor descriptor de tip Takagi-Sugeno, în condiţiile decuplării şi atenuării influenţei intrărilor necunoscute. Dacă intrările necunoscute sunt prea numeroase şi decuplarea lor nu este posibilă (condiţia (2.100) nu este îndeplinită), se poate face un compromis în proiectarea observerului astfel încât să fie asigurate atât decuplarea cât şi atenuarea intrărilor necunoscute prin condiţii cât mai puţin restrictive. Într-o prima etapă, estimarea vectorului de stare este independentă (decuplată) de vectorul intrărilor necunoscute; apoi, în a doua etapă a proiectării estimatorului de stare, norma erorii de estimare este minimizată, adică este îmbunătăţită robusteţea observerului [157].

Vectorul intrărilor necunoscute se împarte în $v(t)$ şi $\bar{v}(t)$, matricele asociate lor fiind D_i şi, respectiv, $\bar{D}_i$; astfel, ecuaţiile (2.86) devin

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi(t))\left[A_i x(t) + B_i u(t) + D_i v(t) + \overline{D}_i \overline{v}(t)\right], \\ y(t) = Cx(t) + Gv(t) + \overline{G}\overline{v}(t), \end{cases} \tag{2.120}$$

unde $v(t) \in \mathcal{M}^{q\times 1}$ şi $\overline{v}(t) \in \mathcal{M}^{\overline{q}\times 1}$. Scindarea intrărilor necunoscute în $v(t)$ şi $\overline{v}(t)$ se face astfel încât să fie îndeplinite condiţiile (2.100). Condiţiile de existenţă ce trebuie satisfăcute pentru a putea proiecta noul observer sunt prezentate în cadrul următoarei teoreme:

<u>*Teorema 2.5*</u> [157]

Un observer de tipul (2.89), ce asigură decuplarea vectorului $v(t)$ şi robusteţe maximă în raport cu $\overline{v}(t)$, există dacă este îndeplinită condiţia

$$\text{rang}\left(\overline{R}\right) = n + \text{rang}\left[G\ \overline{G}\right] + \text{rang}\begin{bmatrix} \left[D_1\ \ldots\ D_M\right] \\ I_M \otimes G \end{bmatrix} \tag{2.121}$$

şi dacă, în plus, există o matrice simetrică şi pozitiv definită $P \in \mathcal{M}^{n\times n}$ şi matricea $\overline{T} \in \mathcal{M}^{n\times(n+(M+1)p)}$ – soluţii ale inecuaţiei matriceal-liniare

$$\begin{bmatrix} \overline{\Psi}_{i,1} & \overline{\Psi}_{i,2} \\ \overline{\Psi}_{i,2}^T & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \tag{2.122}$$

şi a procesului de minimizare a constantei pozitive γ, unde matricele $\overline{\Psi}_{i,1}$ şi $\overline{\Psi}_{i,2}$ au expresiile

$$\begin{aligned} \overline{\Psi}_{i,1} &= P\overline{S}\,\overline{R}^{+}S_i + \overline{T}\,\overline{R}^{\perp}S_i + \left(\overline{S}\,\overline{R}^{+}S_i\right)^T P + \left(\overline{R}^{\perp}S_i\right)^T \overline{T}^{\,T} + I_n, \\ \overline{\Psi}_{i,2} &= P\overline{S}\,\overline{R}^{+}\overline{S}_i + \overline{T}\,\overline{R}^{\perp}\overline{S}_i, \end{aligned} \tag{2.123}$$

iar $\overline{R}$, $\overline{S}$, S_i şi $\overline{S}_i$ sunt

$$\begin{aligned} &\overline{R} = \begin{bmatrix} \overline{\overline{R}}_1 & \overline{\overline{R}}_2 \\ \overline{\overline{R}}_3 & \overline{\overline{R}}_4 \end{bmatrix}, \overline{S} = \begin{bmatrix} \overline{\overline{S}}_1 & \overline{\overline{S}}_2 \end{bmatrix}, \overline{S}_i = \begin{bmatrix} \overline{\overline{S}}_{i,1} \\ \overline{\overline{S}}_{i,2} \end{bmatrix}, S_i = \begin{bmatrix} \widetilde{S}_{i,1} \\ \widetilde{S}_{i,2} \end{bmatrix}, \\ &\overline{\overline{R}}_1 = \begin{bmatrix} E & 0_{n\times q} & 0_{n\times\overline{q}} \\ C & G & \overline{G} \end{bmatrix}, \overline{\overline{R}}_2 = \begin{bmatrix} \left[D_1\ \ldots\ D_M\right] \\ \left[0_{p\times q}\ \ldots\ 0_{p\times q}\right] \end{bmatrix}, \overline{\overline{R}}_3 = \left[0_{pM\times n}\ \ 0_{pM\times q}\ \ 0_{pM\times\overline{q}}\right], \\ &\overline{\overline{R}}_4 = I_M \otimes G, \overline{\overline{S}}_1 = \left[I_n\ \ 0_{n\times(q+\overline{q})}\right], \overline{\overline{S}}_2 = 0_{n\times Mq}, \overline{\overline{S}}_{i,1} = \left[D_i^T\ \ 0_{\overline{q}\times p}\right]^T, \\ &\overline{\overline{S}}_{i,2} = e_i \otimes \overline{G}, \widetilde{S}_{i,1} = \left[A_i^T\ \ 0_{n\times p}\right]^T, \widetilde{S}_{i,2} = e_i \otimes C; \end{aligned} \tag{2.124}$$

$e_i \in \mathcal{M}^{M\times 1}$ sunt vectori coloană cu toate componentele $=0$ cu excepţia componentei „*i*” care este egală cu 1.

<u>*Demonstraţie*</u>

În [157] se demonstrează că dacă sunt îndeplinite condiţiile (2.95) şi $T_2\overline{G} = 0$, dinamica erorii noului observer este

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi(t))\left[N_i e(t) + \left(T_1\overline{D}_i + K_i\overline{G}\right)\overline{v}(t)\right]. \tag{2.125}$$

Constrângerile anterioare echivalează cu a determina o matrice Ω astfel încât [157]

$$\Omega\,\overline{R} = \overline{S}\,. \tag{2.126}$$

Rezolvarea acestei ecuaţii matriceale este posibilă doar dacă $\mathrm{rang}\begin{bmatrix}\overline{R}^T & \overline{S}^T\end{bmatrix}^T = \mathrm{rang}\left(\overline{R}\right)$, condiţia fiind echivalentă cu (2.121). Soluţia ecuaţiei (2.126) este [157]

$$\Omega = \overline{S}\,\overline{R}^{+} + T\overline{R}^{\perp}\,, \tag{2.127}$$

în care T urmează a fi determinată. Deoarece matricele N_i şi $\left(T_1\overline{D}_i - L_i\overline{G}\right)$ pot fi scrise sub forma [157]

$$\begin{aligned} N_i &= \Omega S_i = \overline{S}\,\overline{R}^{+}S_i + T\overline{R}^{\perp}S_i\,,\\ T_1\overline{D}_i - L_i\overline{G} &= \Omega\overline{S}_i = \overline{S}\,\overline{R}^{+}\overline{S}_i + T\overline{R}^{\perp}\overline{S}_i\,, \end{aligned} \tag{2.128}$$

stabilitatea dinamicii (2.125) urmează paşii teoremei 2.2 din [157]. Rescriind inecuaţia (2.108) pentru tripletul $\left(N_i, \left(T_1\overline{D}_i - L_i\overline{G}\right), I_n\right)$ şi alegând $\overline{T} = PT$, se obţine LMI (2.122).

Condiţia (2.121) este mai puţin restrictivă decât (2.100). Pentru obţinerea decuplării perfecte a tuturor intrărilor necunoscute în (2.120), D_i şi G trebuie înlocuite cu $\begin{bmatrix}D_i & \overline{D}_i\end{bmatrix}$ şi, respectiv, $\begin{bmatrix}G & \overline{G}\end{bmatrix}$ în (2.121) şi (2.124); se obţine o constrângere mai uşor de îndeplinit [157]. Pentru sistemul (2.120) în descriere discretă, adică

$$\begin{cases} Ex_{k+1} = \sum\limits_{i=1}^{M} \mu_i(\xi_k)\left[A_i x_k + B_i u_k + D_i v_k + \overline{D}_i\overline{v}_k\right],\\ y_k = Cx_k + Gv_k + \overline{G}\overline{v}_k\,, \end{cases} \tag{2.129}$$

observerul (2.90), ce asigură decuplarea vectorului v_k şi robusteţe maximă în raport cu $\bar{v}_k$, există dacă este îndeplinită condiţia (2.121) şi dacă există o matrice simetrică şi pozitiv definită $P \in \mathcal{M}^{n\times n}$ şi o matrice $\overline{T} \in \mathcal{M}^{n\times(n+(M+1)p)}$ – soluţii ale inecuaţiei [157]

$$\begin{bmatrix} I_n - P & 0 & \overline{\Phi}_{i,1}^T \\ 0 & -\gamma^2 I_n & \overline{\Phi}_{i,2}^T \\ \overline{\Phi}_{i,1} & \overline{\Phi}_{i,1} & -P \end{bmatrix} < 0 \tag{2.130}$$

şi a procesului de minimizare a constantei γ, unde matricele $\overline{\Phi}_{i,1}$ şi $\overline{\Phi}_{i,2}$ au expresiile

$$\begin{aligned} \overline{\Phi}_{i,1} &= P\overline{S}\,\overline{R}^{+}S_i + \overline{T}\,\overline{R}^{\perp}S_i\,, \\ \overline{\Phi}_{i,2} &= P\overline{S}\,\overline{R}^{+}\overline{S}_i + \overline{T}\,\overline{R}^{\perp}\overline{S}_i\,. \end{aligned} \tag{2.131}$$

Sintetizând, algoritmul pentru proiectarea observerului Marx pentru decuplarea şi atenuarea influenţei intrărilor necunoscute asupra sistemelor descriptor de tip Takagi-Sugeno este următorul:

Algoritmul Marx (algoritmul 3)

Pasul 1: Se declară matricele $A_i, B_i, D_i, \overline{D}_i, C, G, \overline{G}, E, i = \overline{1,M}$ şi se stabilesc expresiile vectorului de decizie $\xi(t)$ şi expresiile funcţiilor de activare $\mu_i(\xi(t)), i = \overline{1,M}$.

Pasul 2: Se verifică îndeplinirea condiţiei (2.121); în caz contrar, acest estimator de stare nu poate fi construit.

Pasul 3: Se calculează $\overline{R}$, $\overline{S}$, $\overline{S}_i$, S_i – ecuaţiile (2.124) şi se rezolvă LMI (2.122), sau (2.130) pentru varianta discretă, în raport cu P şi $\overline{T}$; apoi, se calculează $T = P^{-1}\overline{T}$.

Pasul 4: Utilizând ecuaţia (2.127), se determină matricea Ω; aceasta este de forma (2.97), deci, prin partiţionarea ei, se obţin matricele T_1, T_2 şi K_i, $i = \overline{1,M}$;

Pasul 5: Se calculează matricele N_i cu ajutorul primei ecuaţii (2.95) şi matricele M_i şi L_i - ultimele două ecuaţii (2.95). Se verifică dacă matricea $\widetilde{N}$ (expresia (2.40)) este stabilă şi, de asemenea, se verifică dacă toate condiţiile (2.95) sunt verificate.

Pasul 6: Utilizând matricele şi vectorii calculaţi la paşii anteriori, se proiectează observerul descris de ecuaţiile (2.89) – varianta continuă sau (2.90) – varianta discretă; pentru validarea estimatorului de stare, se utilizează şi ecuaţiile ce descriu dinamica sistemului descriptor de tip Takagi-Sugeno (ecuaţiile de stare – ieşire (2.120) sau (2.129)).

Observerul Marx (algoritmul 3) este validat în Matlab/Simulink; a fost aleasă, pentru validarea observerului, acelaşi model al mişcării longitudinale ca în paragraful 2.4.2; vectorul intrărilor necunoscute v şi funcţiile de activare sunt, şi ele, aceleaşi. Matricele $\overline{D}_i, i=\overline{1,2}$, şi noile matrice D_i se determină prin partiţionarea vechilor matrice D_i; la fel se întâmplă şi în cazul matricelor G şi $\overline{G}$. Se verifică, în cadrul pasului 2, îndeplinirea condiţiei (2.121), iar, în cadrul pasului 3 al algoritmului Marx – varianta 3, se calculează $\overline{R}$, $\overline{S}$, $\overline{S}_i$, S_i şi se rezolvă LMI (2.112) în raport cu necunoscutele P şi $\overline{T}$; apoi, se calculează $T = P^{-1}\overline{T}$. Au rezultat matricele

$$P = \begin{bmatrix} 1.252 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.252 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.252 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.252 \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \end{bmatrix}, T_{11} = \begin{bmatrix} 34.13 & 33.97 & 87.24 & 42.54 \\ -70.02 & -196.12 & 35.62 & -326.54 \\ -103.61 & -89.28 & -294.98 & 554.43 \\ 30.12 & -232.60 & -17.32 & 141.03 \end{bmatrix},$$

$$T_{12} = \begin{bmatrix} -81.42 & 38.86 & -165.14 & 122.53 \\ 74.03 & 161.39 & -28.09 & 93.17 \\ 69.84 & -292.89 & 252.18 & 266.83 \\ -110.05 & -247.12 & -148.38 & -17.16 \end{bmatrix}, T_{13} = \begin{bmatrix} 3.04 & -31.12 & 105.22 & -45.94 \\ 102.41 & 106.09 & 43.12 & -163.01 \\ -28.12 & 25.59 & -358.28 & 109.54 \\ -19.69 & 22.25 & 33.60 & 48.72 \end{bmatrix}, T_{14} = \begin{bmatrix} 33.38 & 138.64 & 61.02 & -106.02 \\ -130.23 & 21.87 & -2.57 & -264.27 \\ 119.53 & 12.55 & -272.56 & 253.16 \\ -32.96 & -119 & 1.26 & -4.01 \end{bmatrix}.$$

În cadrul pasului 4, se determină matricele T_1, T_2 şi $K_i, i=\overline{1,2}$; acestea fiind utilizate pentru calculul matricelor N_i, M_i şi L_i. S-au obţinut

$$T_1 = \begin{bmatrix} 12.438 & -41.683 & 54.988 & -75.496 \\ 20.364 & -59.547 & 85.911 & -128.184 \\ -30.887 & 128.031 & -142.875 & 169.280 \\ -0.662 & -19.091 & 6.650 & 15.751 \end{bmatrix}, T_2 = \begin{bmatrix} -23.876 & 58.356 & -109.976 & 75.496 \\ -40.728 & 84.366 & -171.822 & 128.184 \\ 61.774 & -179.244 & 286.750 & -169.280 \\ 1.324 & 26.728 & -13.301 & -14.751 \end{bmatrix},$$

$$N_1 = \begin{bmatrix} -0.899 & -85.231 & -21.084 & 37.811 \\ 85.231 & -0.899 & -172.980 & -26.080 \\ 21.084 & 172.980 & -0.899 & -18.503 \\ -37.811 & 26.080 & 18.503 & -0.899 \end{bmatrix}, M_1 = \begin{bmatrix} 945.4 \\ 1604.7 \\ -2121.1 \\ -196.1 \end{bmatrix}, L_1 = \begin{bmatrix} 2242 & -2418 & 8094 & -7932 \\ -12805 & 35117 & -58501 & 36166 \\ -7655 & 15411 & -31749 & 24026 \\ 1024 & -3347 & 4983 & -2658 \end{bmatrix},$$

$$N_2 = \begin{bmatrix} -0.899 & 42.357 & -91.822 & -10.300 \\ -42.357 & -0.899 & -107.230 & 49.473 \\ 91.822 & 107.230 & -0.899 & -46.935 \\ 10.30 & -49.473 & 46.935 & -0.899 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} 820.8 \\ 1392.4 \\ -1844.1 \\ -168.3 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} -7392 & 19597 & -33402 & 21194 \\ -5476 & 17878 & -26686 & 14278 \\ -6766 & 13331 & -27853 & 21300 \\ 4661 & -11930 & 20798 & -13531 \end{bmatrix}.$$

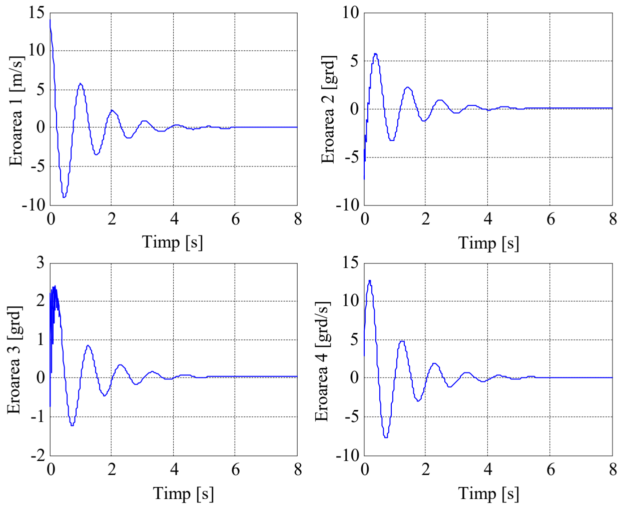

Fig. 2.13. Erorile de estimare ale observerului Marx (algoritmul 3)

S-au obţinut caracterisiticile de timp din fig. 2.13 (erorile de estimare a variabilelor de stare ale modelului (2.86)).

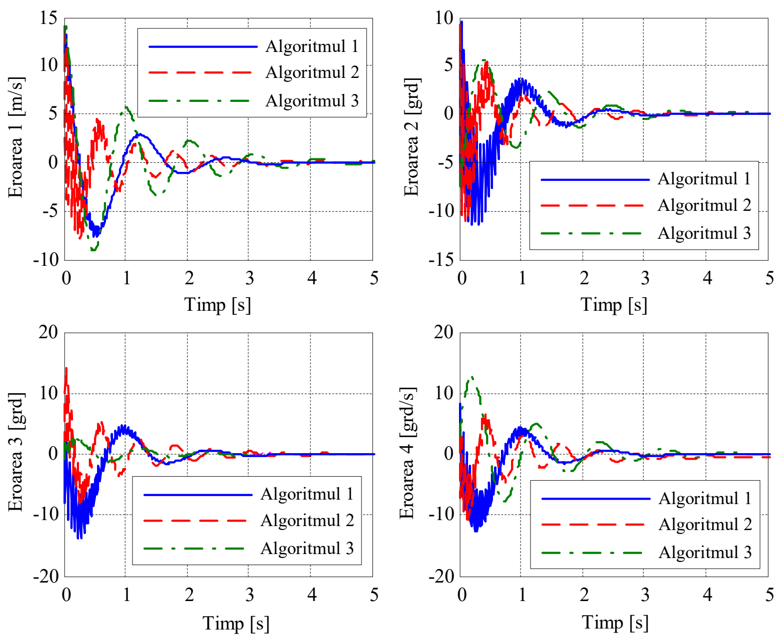

Fig. 2.14. Erorile de estimare asociate celor 3 variante de observer multiplu Marx

Evoluţiile în timp ale erorilor asociate celor 4 variabile de stare sunt, aşadar, prezentate în fig. 2.11 (algoritmul Marx – varianta 1), fig. 2.12 (algoritmul Marx – varianta 2) şi, respectiv, fig. 2.13 (algoritmul Marx – varianta 3). Toate cele trei variante de observer multiplu Marx au fost implementate software pentru acelaşi tip de avion, aceeaşi dinamică, funcţii de activare, etc. În aceste condiţii, se pot compara vitezele de convergenţă ale celor trei variante de observer Marx reprezentând grafic, în acelaşi sistem de coordonate, cele 4 erori de estimare – fig. 2.14. Vitezele de convergenţă ale celor 3 observere Marx sunt apropiate, cu un mic avantaj pentru varianta 1.

2.4.5. PROIECTAREA UNUI OBSERVER PENTRU DETECŢIA DEFECTELOR

În cadrul acestui paragraf, observerele pentru decuplarea şi atenuarea intrărilor necunoscute sunt utilizate pentru detectarea defectelor. Se consideră un sistem desscriptor de tip Takagi-Sugeno afectat de defectele $f(t) \in \mathcal{M}^{q\times 1}$ şi perturbaţiile $w(t) \in \mathcal{M}^{\bar{q}\times 1}$; ecuaţiile asociate acestui sistem sunt [157]

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi(t))\left[A_i x(t) + B_i u(t) + D_{f_i} f(t) + D_{w_i} w(t)\right], \\ y(t) = Cx(t) + G_f f(t) + G_w w(t), \end{cases} \tag{2.132}$$

în variantă continuă, sau

$$\begin{cases} Ex_{k+1} = \sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi_k)\left[A_i x_k + B_i u_k + D_{f_i} f_k + D_{w_i} w_k\right], \\ y_k = Cx_k + G_f f_k + G_w w_k, \end{cases} \tag{2.133}$$

în variantă discretă. Se presupune că perturbaţiile sunt mărginite, adică $|\, w_i(t) \,| < \delta_i$, respectiv $|w_{i\,k}| < \delta_i$, $(\forall) i = \overline{1, \bar{q}}$ şi $(\forall)k$. Detectarea defectelor se poate face utilizând metoda prezentată în [230]; în cadrul acestei metode, sunt proiectate „q” observere pentru decuplarea şi atenuarea intrărilor necunoscute. Observerul „r” este proiectat consi-derându-se că defectul „r” este intrare necunoscută. Un subset al perturbaţiilor Σ_r este considerat în [157] astfel încât să fie îndeplinită constrângerea (2.121); cu alte cuvinte, observerul „r” este proiectat pentru sistemul descris de ecuaţiile (2.120), unde, de data aceasta [157],

$$\begin{aligned} D_i &= \left[D_{f_i}^r \quad D_{w_i}^j\right], j \in \Sigma_r, \overline{D}_i = \left[D_{w_i}^j\right], j \in \overline{\Sigma}_r, \\ G &= \left[G_f^r \quad G_w^j\right], j \in \Sigma_r, \overline{G} = \left[G_w^j\right], j \in \overline{\Sigma}_r, \end{aligned} \tag{2.134}$$

unde notaţia M^r este asociată coloanei „r” a unei matrice M, iar $\overline{\Sigma}_r$ reprezintă complementul lui Σ_r. Ca o consecinţa, estimarea ieşirii observerului „r” este sensibilă la toate defectele, insensibilă la defectul „r” şi la un set de perturbaţii Σ_r şi are robusteţe maximă la toate perturbaţiile ce aparţin setului $\overline{\Sigma}_r$. Metoda clasică de detecţie a defectelor se bazează pe faptul că defectul „r” apare dacă semnalele reziduale, cu excepţia celui al „r”-lea sunt mult diferite de zero. Astfel, pentru fiecare defect $f_r(t)$, respectiv f_{r_k}, se proiectează un observer de tipul celui din paragraful anterior, acesta fiind sensibil la toate defectele cu excepţia $f_r(t)$, respectiv f_{r_k}, insensibil la $w_i(t)$, respectiv $w_{i_k}, i \in \Sigma_r$ şi având robusteţe maximă în raport cu $w_i(t)$, respectiv $w_{i_k}, i \in \overline{\Sigma}_r$. Apoi, se calculează marginea superioară a perturbaţiilor [157]

$$\varepsilon_r = \sqrt{\sum_{i \in \overline{\Sigma}_r} \rho_i^2}\,; \tag{2.135}$$

pentru fiecare componentă a ieşirii $y_j(t)$, respectiv y_{j_k}, se calculează norma L_2, notată cu g_{r_j} utilizând perturbaţiile $\{w_i(t), i \in \Sigma_r\}$, respectiv $\{w_{i_k}, i \in \overline{\Sigma}_r\}$, eroarea de ieşire şi vectorul boolean

$$b_r(t) = \left[b_{r_1}(t) \;\; b_{r_2}(t) \;\; \ldots \;\; b_{r_p}(t)\right], \tag{2.136}$$

pentru varianta continuă, respectiv

$$b_{r_k} = \left[b_{r_1 k} \;\; b_{r_2 k} \;\; \cdots \;\; b_{r_p k}\right], \tag{2.137}$$

pentru varianta discretă; $b_{r_j}(t)$, respectiv $b_{r_j k}$, se definesc astfel [157]:

$$\begin{aligned} b_{r_j}(t) &= \begin{cases} 1, \text{ daca } \left|\hat{y}_{r_j}(t) - y_j(t)\right| > \alpha\, g_{r_j} \rho_r, \\ 0, \text{ daca } \left|\hat{y}_{r_j}(t) - y_j(t)\right| \le \alpha\, g_{r_j} \rho_r, \end{cases} \\ b_{r_j k} &= \begin{cases} 1, \text{ daca } \left|\hat{y}_{r_j k} - y_{j k}\right| > \alpha\, g_{r_j} \rho_r, \\ 0, \text{ daca } \left|\hat{y}_{r_j k} - y_{j k}\right| \le \alpha\, g_{r_j} \rho_r, \end{cases} \end{aligned} \tag{2.138}$$

unde $\hat{y}_{r_j}(t)$, respectiv $\hat{y}_{r_{jk}}$, reprezintă componenta „*j*” a estimatei ieşirii observerului „*r*”; α este o constantă pozitivă. În continuare, se calculează semnalele „alarmă” $a_r(t)$, respectiv a_{r_k}, afectate de $f_r(t)$, respectiv f_{r_k}, definite, în cazul continuu de [157]

$$a_r(t) = \begin{cases} 1, \text{ daca } b_i(t)b_i^T(t) \geq 1, (\forall) i \neq r \text{ si } b_r(t)b_r^T(t) = 0, \\ 0, \text{ in caz contrar }, \end{cases} \tag{2.139}$$

sau, în variantă discretă, de

$$a_{r_k} = \begin{cases} 1, \text{ daca } b_{i_k} b_{i_k}^T \geq 1, (\forall) i \neq r \text{ si } b_{r_k} b_{r_k}^T = 0, \\ 0, \text{ in caz contrar }. \end{cases} \tag{2.140}$$

În [157] se demonstrează că această structură generalizată de observer este eficientă în procesul de detecţie şi izolare a defectelor; structura reprezintă o modificare a observerului prezentat anterior; astfel, pentru sistemele descriptor de tipul (2.120), respectiv (2.129), se modifică matricele D_i, $\overline{D}_i$ şi $\overline{G}$ după cum urmează [157]:

$$\begin{aligned} & D_i = \left[D_{i,1} \;\; D_{i,2}\right], G = \left[G_1 \;\; G_2\right], \overline{D}_i = \left[D_{w_i}^j\right], j \in \overline{\Sigma}_r, \overline{G} = \left[G_w^j\right], j \in \overline{\Sigma}_r, \\ & D_{i,1} = \left[D_{f_i}^1 \; \dots \; D_{f_i}^{r-1} \;\; D_{f_i}^{r+1} \; \dots \; D_{f_i}^q\right], D_{i,2} = D_{w_i}^j, j \in \Sigma_r, \\ & G_1 = \left[G_{f_i}^1 \; \dots \; G_{f_i}^{r-1} \;\; G_{f_i}^{r+1} \; \dots \; G_{f_i}^q\right], G_2 = G_{w_i}^j, j \in \Sigma_r. \end{aligned} \tag{2.141}$$

2.5. OBSERVER MULTIPLU DE TIP ALUNECĂTOR PENTRU DETECŢIA ŞI IZOLAREA DEFECTELOR

2.5.1. UTILITATEA OBSERVERELOR MULTIPLE DE TIP ALUNECĂTOR ÎN PROCESUL DE DETECŢIE ŞI IZOLARE A DEFECTELOR

Procedura generală pentru utilizarea observerelor pentru detecţia şi izolarea defectelor constă în 3 etape: 1) estimarea ieşirii sistemului prin intermediul unui observer; 2) compararea ieşirii estimate cu ieşirea măsurată şi, deci, obţinerea semnalelor reziduale; 3) analiza semnalelor reziduale pentru a vedea dacă a apărut sau nu un defect în cadrul sistemului [6]. Procesul de decizie se bazează fie pe un test simplu cu prag, fie pe utilizarea unui criteriu ce foloseşte o medie a semnalelor reziduale. Atunci când siste-mul în cauză este influenţat de intrări necunoscute, este nevoie de decuplarea intrărilor necunoscute, aceasta conducând la evitarea unor alarme false în procedura de detecţie a defectelor. Această problematică poartă în literatura de specialitate numele de „proble-mă robustă de detecţie a defectelor" şi se rezolvă prin utilizarea observerelor pentru sistemele cu intrări necunoscute [6], [175]. Multe observere [79], [217] au fost proiectate pentru sistemele cu intrări necu-noscute, însă puţine lucrări vizează estimatoarele de stare pentru sistemele neliniare afec-tate de intrări necunoscute [4], [121]. Pintre cele mai utilizate observere pentru siste-mele neliniare se numără observerele multiple pentru sistemele descriptor Takagi-Sugeno [220] sau observerele de tip alunecător [6].

Conceptul de „alunecare" provine din fosta Uniune Sovietică, anii `60, când efec-tul introducerii discontinuităţilor în procesul de control al sistemelor dinamice a fost folosit. S-a demonstrat atunci că, printr-o alegere convenabilă a legilor de control, stă-rile unui sistem atingeau şi apoi se menţineau într-o suprafată predefinită din spaţiul stă-rilor. Această „mişcare", numită „mişcare de alunecare", s-a dovedit a fi insensibilă la necunoscute sau semnale perturbatoare externe [6]. A rezultat aşa-numitul „control ro-bust de tip alunecător", care apoi a fost extins şi la procesul de estimare a stării. Primul cercetător în acest domeniu a fost Utkin, care a obţinut o structură discontinuă pentru observerul descris în [212]; Walcott şi Zak au utilizat metoda Lyapunov pentru a pro-iecta un observer pentru care eroarea de estimare a stării scade asimptotic către zero în prezenţa unor neliniarităţi mărginite şi incertitudini (necunoscute de modelare) [217]. Edwards şi Spugeon au proiectat observere asemănătoare cu cel al lui Walcott & Zak, obţinând algoritmi expliciţi de proiectare; a fost utilizată, de asemenea, sinteza regula-toarelor prin intermediul metodei modelelor continue [24].

2.5.2. PROIECTAREA OBSERVERELOR MULTIPLE DE TIP ALUNECĂTOR

Se consideră un sistem neliniar reprezentat prin intermediul modelului multiplu (2.3), în care se neglijează necunoscutele de modelare $(\Delta A_i(t))$; semnificaţia şi dimensiunile matricelor $A_i\,, B_i\,, D_i\,, C\,, i=\overline{1,M}$, şi vectorilor $x(t), u(t), v(t), y(t), d_i\,, \xi(t)$ sunt aceleaşi ca în cazul modelului multiplu prezentat în [5]. Mai mult, funcţiile de activare $\mu_i(\xi(t))$, $i=\overline{1,M}$, respectă, şi în acest caz, proprietăţile (2.2).

Observerul propus în [6] este o combinaţie liniară de observere locale, fiecare dintre acestea având structura din [217]. În cadrul proiectării estimatorului de stare, se presupune că intrările necunoscute sunt mărginite $\left(\|v(t)\| < \rho\right)$ şi că există matricele $G_i \in \mathcal{M}^{n\times p}$ astfel încât $A_{0_i} = A_i - G_i C$ au valorile proprii stabile şi există perechile Lyapunov (P, Q_i) astfel încât sunt satisfăcute constrângerile [6]

$$\begin{cases} A_{0_i}^T P + P A_{0_i} = -Q_i\,, \\ C^T F_i^T = P D_i\,, i = \overline{1,M}\,. \end{cases} \tag{2.142}$$

Observerul propus în [6] are forma

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum\limits_{i=1}^{M} \mu_i(\xi(t))\left\{A_i\,\hat{x}(t) + B_i u(t) + G_i\left[y(t) - C\hat{x}(t)\right] + K_i \gamma_i(t)\right\}, \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t). \end{cases} \tag{2.143}$$

Proiectarea observerului presupune determinarea matricelor G_i , K_i şi a vectorilor $\gamma_i \in \mathcal{M}^{q\times 1}$ ce garantează convergenţa exponenţială a lui $\hat{x}(t)$ către $x(t)$. Ecuaţiile (2.142) sunt necesare pentru a putea separa vectorul intrărilor necunoscute $v(t)$ de restul sistemului. Primul pas ce trebuie făcut în cadrul procesului de estimare a stării modelului multiplu este o primă schimbare de coordonate [6].

Se presupune că perechile $(A_i\,, C)$ sunt observabile; deoarece ieşirile sistemului sunt luate în considerare în cadrul proiectării observerului, este logic ca acestea să afecteze schimbările de coordonate astfel încât ieşirile să apară ca şi componente ale noului vector de stare. Fără micşorarea generalităţii, matricea de distribuţie C se poate scrie întotdeauna sub forma [6]

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}, \tag{2.144}$$

unde $C_1 \in \mathcal{M}^{p\times(n-p)}, C_2 \in \mathcal{M}^{p\times p}$ şi $\det(C_2) \neq 0$.

Se face schimbarea de coordonate $\tilde{x}(t) = \tilde{T}x(t)$, în care

$$\tilde{T} = \begin{bmatrix} I_{n-p} & 0_{(n-p)\times p} \\ C_1 & C_2 \end{bmatrix}; \tag{2.145}$$

$\tilde{T} \in \mathcal{M}^{n\times n}$ este o matrice nesingulară. În aceste condiţii, noua matrice *C*, adică $\tilde{C}$, este

$$\tilde{C} = C\tilde{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & I_p \end{bmatrix}, \tag{2.146}$$

în timp ce celelalte matrice ale sistemului sunt [6]

$$\tilde{A}_i = \tilde{T}A_i\tilde{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11_i} & \tilde{A}_{12_i} \\ \tilde{A}_{21_i} & \tilde{A}_{22_i} \end{bmatrix}, \tilde{B}_i = \tilde{T}B_i = \begin{bmatrix} \tilde{B}_{1_i} \\ \tilde{B}_{2_i} \end{bmatrix}, \tilde{d}_i = \tilde{T}d_i = \begin{bmatrix} \tilde{d}_{1_i} \\ \tilde{d}_{2_i} \end{bmatrix}, \tilde{D}_i = \tilde{T}D_i = \begin{bmatrix} \tilde{D}_{1_i} \\ \tilde{D}_{2_i} \end{bmatrix}. \tag{2.147}$$

După schimbarea de coordonate $\tilde{x}(t) = \tilde{T}x(t)$, ecuaţiile (2.142) conduc la

$$\tilde{P} = \left(\tilde{T}^{-1}\right)^T P\tilde{T}^{-1}, \tilde{Q}_i = \left(\tilde{T}^{-1}\right)^T Q_i\tilde{T}^{-1}, \tilde{C}^T F_i^T = \tilde{P}\tilde{D}_i\,. \tag{2.148}$$

Conform ecuaţiei (2.146), rezultă $y(t) = \tilde{C}\left[\tilde{x}_1(t)\ \tilde{x}_2(t)\right]^T = \begin{bmatrix} 0 & I_p \end{bmatrix}\left[\tilde{x}_1(t)\ \tilde{x}_2(t)\right] = \tilde{x}_2(t)$; de asemenea, conform (2.147), modelul multiplu (2.3), cu $\Delta A_i(t) = 0$, se scrie acum [6]

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi(t))\left[\tilde{A}_i\,\tilde{x}(t) + \tilde{B}_i u(t) + \tilde{D}_i v(t) + \tilde{d}_i(t)\right], \\ y(t) = \tilde{x}_2(t), \end{cases} \tag{2.149}$$

unde $\tilde{x}(t) = \left[\tilde{x}_1(t)\ \tilde{x}_2(t)\right]^T$. În consecinţă, această primă schimbare de coordonate permite exprimarea directă a vectorului de ieşire ca parte a noului vector de stare [6].

Se utilizează, în continuare, principiile observerelor robuste din [217], acestea fiind adaptate pentru cazul observerelor multiple. Astfel, se consideră modelele locale $\left(\tilde{A}_i, \tilde{B}_i, \tilde{D}_i, \tilde{C}\right)$ – ecuaţiile (2.149), unde $\tilde{A}_i$ sunt matrice stabile, şi modelele descrise de $\left(\bar{A}_i, \bar{B}_i, \bar{D}_i, \bar{C}\right)$, legătura dintre cele două seturi de matrice făcându-se prin intermediul unei alte transformări de coordonate $\bar{T}$, adică

$$\bar{x}(t) = \bar{T}\tilde{x}(t); \tag{2.150}$$

în aceste condiţii, se obţin [6], [217]

$$\overline{A}_i = \overline{T}\widetilde{A}_i\overline{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \overline{A}_{11_i} & \overline{A}_{12_i} \\ \overline{A}_{21_i} & \overline{A}_{22_i} \end{bmatrix}, \overline{B}_i = \overline{T}\widetilde{B}_i = \begin{bmatrix} \overline{B}_{1_i} \\ \overline{B}_{2_i} \end{bmatrix}, \overline{C} = \widetilde{C}\overline{T}^{-1},$$
$$\overline{d}_i = \overline{T}\widetilde{d}_i = \begin{bmatrix} \overline{d}_{1_i} \\ \overline{d}_{2_i} \end{bmatrix}, \overline{D}_i = \overline{T}\widetilde{D}_i = \begin{bmatrix} \overline{D}_{1_i} \\ \overline{D}_{2_i} \end{bmatrix}. \tag{2.151}$$

<u>*Teorema 2.6*</u> [6]

Fie $\left(\widetilde{A}_i, \widetilde{B}_i, \widetilde{D}_i, \widetilde{C}\right)$ un model local pentru care există perechea $\left(\widetilde{P}, F_i\right)$ definită prin intermediul celei de-a treia ecuaţii (2.148). În acest caz, există o matrice de transformare nesingulară $\overline{T}$ astfel încât setul de matrice $\left(\overline{A}_i, \overline{B}_i, \overline{D}_i, \overline{C}\right)$ are proprietăţile:

1) $\overline{A}_{0_i} = \overline{A}_i - \overline{G}_i\overline{C} = \begin{bmatrix} \overline{A}_{011\,i} & \overline{A}_{012\,i} \\ \overline{A}_{021\,i} & \overline{A}_{022\,i} \end{bmatrix}$, unde $\overline{A}_{011_i} = \overline{A}_{11i} \in \mathcal{M}^{(n-p)\times(n-p)}$ sunt matrice stabile;

2) $\overline{D}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ P_{22}^* F_i^T \end{bmatrix}$, unde $P_{22}^* \in \mathcal{M}^{p\times p}$ şi $P_{22}^* = \left(P_{22}^*\right)^T > 0$;

3) $\overline{C} = \widetilde{C}\overline{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & I_p \end{bmatrix}$;

4) $\overline{P} = \left(\overline{T}^{-1}\right)^T \widetilde{P}\overline{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \overline{P}_1 & 0 \\ 0 & \overline{P}_2 \end{bmatrix}$.

<u>*Demonstraţie*</u>

Se consideră perechea $\left(\widetilde{P}, F_i\right)$ asociată modelului local $\left(\widetilde{A}_i, \widetilde{B}_i, \widetilde{D}_i, \widetilde{C}\right)$ şi matricea simetrică şi pozitiv definită (matrice Lyapunov) $\widetilde{P}$ scrisă sub forma [6]

$$\widetilde{P} = \begin{bmatrix} \widetilde{P}_{11} & \widetilde{P}_{12} \\ \widetilde{P}_{21} & \widetilde{P}_{22} \end{bmatrix}, \tag{2.152}$$

în care $\widetilde{P}_{11} \in \mathcal{M}^{(n-p)\times(n-p)}$ – matrice Lyapunov, $\widetilde{P}_{12} \in \mathcal{M}^{(n-p)\times p}$, $\widetilde{P}_{22} \in \mathcal{M}^{p\times p}$. Se defineşte o schimbare de coordonate prin intermediul transformării

$$\overline{T} = \begin{bmatrix} \widetilde{P}_{11} & \widetilde{P}_{12} \\ 0 & I_p \end{bmatrix}, \tag{2.153}$$

matrice nesingulară deoarece $\det\left(\overline{T}\right) = \det\left(\widetilde{P}_{11}\right) \neq 0$ întucât $\widetilde{P}_{11} = \widetilde{P}_{11}^T > 0$.

În demonstraţia proprietăţilor 1) - 4) se utilizează următoarea lemă:

<u>*Lema 2.2*</u>

Inversul unei matrice de forma $T = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & I \end{bmatrix}$ este $T^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}B \\ 0 & I \end{bmatrix}$.

Utilizând lema 2.2, $\overline{C}$ din proprietatea 3) devine succesiv

$$\overline{C} = \widetilde{C}\overline{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{P}_{11}^{-1} & -\widetilde{P}_{11}^{-1}\widetilde{P}_{12} \\ 0 & I_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_p \end{bmatrix}. \tag{2.154}$$

De asemenea, din a 3-a ecuaţie (2.148), se obţine $\widetilde{D}_i = \widetilde{P}^{-1}\widetilde{C}^T F_i^T$; dacă $\widetilde{P}^{-1}$ se consideră de forma [6]: $\widetilde{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \widetilde{P}_{11} & \widetilde{P}_{12} \\ \widetilde{P}_{21} & \widetilde{P}_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} P_{11}^* & P_{12}^* \\ P_{21}^* & P_{22}^* \end{bmatrix}$, rezultă

$$\begin{aligned} \widetilde{D}_i &= \begin{bmatrix} P_{11}^* & P_{12}^* \\ P_{21}^* & P_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix} F_i^T = \begin{bmatrix} P_{12}^* \\ P_{22}^* \end{bmatrix} F_i^T \Rightarrow \overline{D}_i = \overline{T}\widetilde{D}_i = \begin{bmatrix} \widetilde{P}_{11} & \widetilde{P}_{12} \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{12}^* \\ P_{22}^* \end{bmatrix} F_i^T = \\ &= \begin{bmatrix} \widetilde{P}_{11}P_{12}^* + \widetilde{P}_{12}P_{22}^* \\ P_{22}^* \end{bmatrix} F_i^T = \begin{bmatrix} 0 \\ P_{22}^* \end{bmatrix} F_i^T , \end{aligned} \tag{2.155}$$

deoarece se poate demonstra uşor că $\widetilde{P}_{11}P_{12}^* + \widetilde{P}_{12}P_{22}^* = 0$.

Pentru demonstraţia condiţiei 4), se procedează după cum urmează: dacă există o matrice simetrică şi pozitiv definită $\widetilde{P}$ ce verifică prima ecuaţie (2.148), matricea $\overline{P} = \left(\overline{T}^{-1}\right)^T \widetilde{P}\overline{T}^{-1} = \left(\overline{T}^{-1}\right)^T \left(\widetilde{T}^{-1}\right)^T P\widetilde{T}^{-1}\overline{T}^{-1}$ este simetrică şi pozitiv definită pentru $\overline{A}_{0_i}$ şi satisface constrângerea $\overline{C}^T F_i^T = \overline{P}\overline{D}_i , (\forall) i = \overline{1, M}$. Folosind partiţionarea matricelor $\widetilde{P}$ şi $\overline{T}$, se obţine [6]

$$\begin{aligned} \overline{P} &= \begin{bmatrix} \widetilde{P}_{11}^{-1} & 0 \\ -\widetilde{P}_{12}^T\widetilde{P}_{11}^{-1} & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{P}_{11} & \widetilde{P}_{12} \\ \widetilde{P}_{12}^T & \widetilde{P}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{P}_{11}^{-1} & -\widetilde{P}_{11}^{-1}\widetilde{P}_{12} \\ 0 & I_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n-p} & -\widetilde{P}_{11}^{-1}\widetilde{P}_{12} \\ 0 & -\widetilde{P}_{12}^T\widetilde{P}_{11}^{-1}\widetilde{P}_{12} + \widetilde{P}_{22} \end{bmatrix} \cdot \\ &\cdot \begin{bmatrix} \widetilde{P}_{11}^{-1} & -\widetilde{P}_{11}^{-1}\widetilde{P}_{12} \\ 0 & I_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{P}_{11}^{-1} & -\widetilde{P}_{11}^{-1}\widetilde{P}_{12} + \widetilde{P}_{11}^{-1}\widetilde{P}_{12} \\ 0 & -\widetilde{P}_{12}^T\widetilde{P}_{11}^{-1}\widetilde{P}_{12} + \widetilde{P}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{P}_1 & 0 \\ 0 & \overline{P}_2 \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{2.156}$$

unde

$$\overline{P}_1 = \widetilde{P}_{11}^{-1}, \qquad \overline{P}_2 = \widetilde{P}_{22} - \widetilde{P}_{12}^T \widetilde{P}_{11}^{-1} \widetilde{P}_{12}. \tag{2.157}$$

De asemenea, în [6] se demonstrează că $\overline{A}_{0_{11i}}$ şi $\overline{A}_{0_{22i}}$ sunt stabile. Într-adevăr, din prima ecuaţie (2.142) şi ecuaţia (2.156), se obţine

$$A_{0_i}^T P + P A_{0_i} < 0 \tag{2.158}$$

sau

$$\begin{bmatrix} \overline{A}_{0_{11i}} & \overline{A}_{0_{12i}} \\ \overline{A}_{0_{21i}} & \overline{A}_{0_{22i}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \overline{P}_1 & 0 \\ 0 & \overline{P}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{P}_1 & 0 \\ 0 & \overline{P}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{A}_{0_{11i}} & \overline{A}_{0_{12i}} \\ \overline{A}_{0_{21i}} & \overline{A}_{0_{22i}} \end{bmatrix} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{A}_{011\,i}^T \overline{P}_1 + \overline{P}_1 \overline{A}_{011\,i} < 0, \\ \overline{A}_{022\,i}^T \overline{P}_2 + \overline{P}_2 \overline{A}_{022\,i} < 0. \end{cases} \tag{2.159}$$

Dar, $\overline{A}_{0_{11i}} = \overline{A}_{11i} - \left(\overline{G}_i \overline{C}\right)_{11} = \overline{A}_{11i}$ deoarece $\left(\overline{G}_i \overline{C}\right)_{11} = 0, (\forall) \overline{G}_i \in \mathcal{M}^{n \times p}$ întrucât $\overline{C} = \left[0 \;\; I_p\right]$. Ca urmare, matricele $\overline{A}_{0_{11i}} = \overline{A}_{11i}$ sunt stabile şi, deci, condiţia 1) a fost şi ea demonstrată.

Se presupune că există o pereche de matrice Lyapunov $\left(\widetilde{P}, \widetilde{Q}_i\right)$ ce verifică constrângerea (2.148) pentru fiecare model local „i” descris de matricele $\left(\widetilde{A}_i, \widetilde{B}_i, \widetilde{D}_i, \widetilde{C}\right)$. Prin intermediul transformării de coordonate (2.150), cu $\overline{T}$ de forma (2.153), unde $\widetilde{P}_{11}$ şi $\widetilde{P}_{22}$ – submatrice ale matricei $\widetilde{P}$ (ecuaţia (2.152)), modelul multiplu descris de ecuaţia (2.149) devine [6]

$$\begin{cases} \dot{\overline{x}}(t) = \sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi(t)) \left[\overline{A}_i\, \overline{x}(t) + \overline{B}_i u(t) + \overline{D}_i v(t) + \overline{d}_i(t)\right], \\ y(t) = \overline{x}_2(t) \end{cases} \tag{2.160}$$

sau

$$\begin{cases} \dot{\overline{x}}_1(t) = \sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi(t)) \left[\overline{A}_{11\,i}\, \overline{x}_1(t) + \overline{A}_{12\,i}\, \overline{x}_2(t) + \overline{B}_{1\,i} u(t) + \overline{d}_{1\,i}(t)\right], \\ \dot{\overline{x}}_2(t) = \sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi(t)) \left[\overline{A}_{21\,i}\, \overline{x}_1(t) + \overline{A}_{22\,i}\, \overline{x}_2(t) + \overline{B}_{2\,i} u(t) + \overline{D}_{2\,i} v(t) + \overline{d}_{2i}(t)\right], \\ y(t) = \overline{x}_2(t). \end{cases} \tag{2.161}$$

După cum se observă în (2.161), $\bar{x}_1(t)$ nu depinde de vectorul $v(t)$ – vectorul intrărilor necunoscute, în timp ce $\bar{x}_2(t)$ depinde de $v(t)$; în schimb, $\bar{x}_2(t)$ se măsoară $\left(y(t) = \bar{x}_2(t)\right)$. S-a reuşit, aşadar, decuplarea intrărilor necunoscute de vectorul de stare ce urmează a fi estimat $\left(\bar{x}_1(t)\right)$. Observerul multiplu propus în [6] pentru estimarea lui $\bar{x}_1(t)$, deci a vectorului $\bar{x}(t) = \left[\bar{x}_1(t) \ \ \bar{x}_2(t)\right]^T$, este descris de ecuaţiile [6]

$$\begin{cases} \dot{\hat{\bar{x}}}(t) = \sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi(t))\left[\bar{A}_i \, \hat{\bar{x}}(t) + \bar{B}_i u(t) + \bar{d}_i(t) - \bar{G}_i e_y(t) + \bar{K}_i \gamma_i(t)\right], \\ \hat{y}(t) = \bar{C}\hat{\bar{x}}_2(t), \end{cases} \tag{2.162}$$

cu

$$\bar{G}_i = \begin{bmatrix} \bar{A}_{12\,i} \\ \bar{A}_{22\,i} - \bar{A}_{22}^{s} \end{bmatrix}, \bar{K}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ P_2^{-1}\bar{D}_{2\,i} \end{bmatrix}; \tag{2.163}$$

$\bar{A}_{22}^{s}$ este o matrice stabilă, iar vectorii $\gamma_i(t)$ se definesc astfel [6]:

$$\gamma_i(t) = \begin{cases} -\rho E_i^T\left(E_i E_i^T\right)^{-1}\left\| e_y^T(t) P_2 \bar{D}_{2\,i} \right\|, \text{ daca } e_y(t) \neq 0 \\ 0, \text{ daca } e_y(t) = 0 \end{cases} \tag{2.164}$$

cu $e_y(t) = \hat{y}(t) - y(t), E_i(t) = e_y^T(t) P_2 \bar{D}_{2\,i}, (\forall) i = \overline{1, M}$ şi $P_2 \in \mathcal{M}^{p \times p}$ – matrice simetrică şi pozitiv definită, soluţie a ecuaţiei Lyapunov

$$P_2 \bar{A}_{22}^{s} + \left(\bar{A}_{22}^{s}\right)^T P_2 = -Q_2 . \tag{2.165}$$

Expresia matricei $\bar{A}_{22}^{s}$ va fi dedusă ulterior. Fie $e_1(t) = \hat{\bar{x}}_1(t) - \bar{x}_1(t)$ şi $e_2(t) = \hat{\bar{x}}_2(t) - \bar{x}_2(t) = = \hat{y}(t) - y(t) = e_y(t)$. Prin derivarea acestor erori în raport cu timpul, se obţine [6]

$$\begin{aligned} \dot{e}_1(t) &= \dot{\hat{\bar{x}}}_1(t) - \dot{\bar{x}}_1(t) = \sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi(t))\bar{A}_{11i} e_1(t), \dot{e}_2(t) = \dot{\hat{y}}(t) - \dot{y}(t) = \\ &= \sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi(t))\left\{\bar{C}\begin{bmatrix} \bar{A}_i \hat{\bar{x}}(t) + \bar{B}_i u(t) + \bar{d}_i - \bar{G}_i e_y(t) + \bar{K}_i \gamma_i(t) - \bar{A}_{21i}\bar{x}_1(t) - \\ - \bar{A}_{22i}\bar{x}_2(t) - \bar{B}_{2i} u(t) - \bar{D}_{2i} v(t) - \bar{d}_{2i} \end{bmatrix}\right\} = \\ &= \sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi(t))\left[\bar{A}_{21i} e_1(t) + \bar{A}_{22}^{s} e_2(t) + P_2^{-1}\bar{D}_{2i}\,\gamma_i(t) - \bar{D}_{2i}\, v(t)\right]. \end{aligned} \tag{2.166}$$

Pentru a demonstra convergenţa asimptotică a observerului multiplu, se consideră funcţia Lyapunov [6]

$$V(e_1, e_2) = e_1^T P_1 e_1 + e_2^T P_2 e_2 ; \tag{2.167}$$

se calculează $\dot{V}(e_1, e_2)$ ţinând cont de (2.142) şi (2.165); se obţine [6]

$$\dot{V}(e_1, e_2) = \sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi) \begin{Bmatrix} e_1^T \left(\overline{A}_{11\,i}^T P_1 + P_1 \overline{A}_{11\,i}\right) e_1 + e_2^T \left[\left(\overline{A}_{22}^s\right)^T P_2 + P_2 \overline{A}_{22}^s\right] e_2 + \\ + e_1^T \overline{A}_{21\,i}^T P_2 e_2 + e_2^T P_2 \overline{A}_{21\,i} e_1 + 2 e_2^T \overline{D}_{2\,i} \gamma_i - 2 e_2^T P_2 \overline{D}_{2\,i} v \end{Bmatrix}. \tag{2.168}$$

<u>*Teorema 2.7*</u> [6]

Dacă există o matrice simetrică şi pozitiv definită P_2 ce verifică (2.165), dinamica erorilor $e_1(t)$ şi $e_2(t)$ este asimptotic stabilă.

<u>*Demonstraţie*</u>

Fie $Q_{1i} \in \mathcal{M}^{(n-p)\times(n-p)}$ şi $Q_2 \in \mathcal{M}^{p\times p}$ – matrice pozitiv definite; se consideră, de asemenea, matricele Lyapunov $\hat{Q}_i \in \mathcal{M}^{(n-p)\times(n-p)}$ definite astfel [6]:

$$\hat{Q}_i = \overline{A}_{21i}^T P_2 Q_2^{-1} P_2 \overline{A}_{21i} + Q_{1i} . \tag{2.169}$$

Se consideră, de asemenea, $P_1 \in \mathcal{M}^{(n-p)\times(n-p)}$ – matrice simetrică şi pozitiv definită, soluţie unică a ecuaţiei Lyapunov

$$\overline{A}_{11i}^T P_1 + P_1 \overline{A}_{11i} = -\hat{Q}_i . \tag{2.170}$$

Se arată că $\dot{V}$ (expresia (2.168)) se poate exprima şi sub forma

$$\dot{V}(e_1, e_2) = \sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi) \begin{pmatrix} - e_1^T \hat{Q}_i e_1 - e_2^T Q_2 e_2 + e_1^T \overline{A}_{21i}^T P_2 e_2 + \\ + e_2^T P_2 \overline{A}_{21i} e_1 + 2 e_2^T \overline{D}_{2\,i} \gamma_i - -2 e_2^T P_2 \overline{D}_{2\,i} v \end{pmatrix}. \tag{2.171}$$

Se demonstrează uşor că [6]

$$\begin{aligned} \left(e_2 - Q_2^{-1} P_2 \overline{A}_{21\,i} e_1\right)^T Q_2 \left(e_2 - Q_2^{-1} P_2 \overline{A}_{21\,i} e_1\right) = e_2^T \hat{Q}_2 e_2 - e_1^T \overline{A}_{21\,i}^T P_2 e_2 - \\ - e_2^T P_2 \overline{A}_{21\,i} e_1 + e_1^T \overline{A}_{21\,i}^T P_2 Q_2^{-1} P_2 \overline{A}_{21\,i} e_1 \end{aligned} \tag{2.172}$$

şi, în aceste condiţii, $\dot{V}$ devine

$$\dot{V}=\sum_{i=1}^{M}\mu_i(\xi)\left[-e_1^T\left(\hat{Q}_i-\overline{A}_{21i}^T P_2 Q_2^{-1} P_2 \overline{A}_{21i}\right)e_1-\widetilde{e}_{2i}^T Q_2 \widetilde{e}_{2i}+2e_2^T\overline{D}_{2i}\gamma_i-2e_2^T P_2\overline{D}_{2i}v\right], \qquad (2.173)$$

cu

$$\widetilde{e}_{2i}=e_2-Q_2^{-1}P_2\overline{A}_{21i}e_1 . \qquad (2.174)$$

Folosind acum ecuaţia (2.169), $\dot{V}$ capătă forma [6]

$$\dot{V}=\sum_{i=1}^{M}\mu_i(\xi)\left(-e_1^T Q_{1i}e_1-\widetilde{e}_{2i}^T Q_2\widetilde{e}_{2i}+2e_2^T\overline{D}_{2i}\gamma_i-2e_2^T P_2\overline{D}_{2i}v\right). \qquad (2.175)$$

Se presupune că $e_2\neq 0$. Folosind acum ecuaţia (2.164), $\dot{V}$ devine

$$\dot{V}=\sum_{i=1}^{M}\mu_i(\xi)\left(-e_1^T Q_{1i}e_1-\widetilde{e}_{2i}^T Q_2\widetilde{e}_{2i}-2\rho\left\|e_2^T P_2\overline{D}_{2i}\right\|-2e_2^T P_2\overline{D}_{2i}v\right). \qquad (2.176)$$

Având în vedere că v este mărginit, rezultă

$$\begin{aligned}\dot{V}&=\sum_{i=1}^{M}\mu_i(\xi)\left(-e_1^T Q_{1i}e_1-\widetilde{e}_{2i}^T Q_2\widetilde{e}_{2i}-2\rho\left\|e_2^T P_2\overline{D}_{2i}\right\|+2\rho\left\|e_2^T P_2\overline{D}_{2i}\right\|\right)=\\&=\sum_{i=1}^{M}\mu_i(\xi)\left(-e_1^T Q_{1i}e_1-\widetilde{e}_{2i}^T Q_2\widetilde{e}_{2i}\right)<0,(\forall)e_1,\widetilde{e}_{2i}\neq 0 \text{ si } (\forall)i=\overline{1,M}.\end{aligned} \qquad (2.177)$$

Dacă $e_2=0$, $\dot{V}$ devine [6]

$$\dot{V}=\sum_{i=1}^{M}\mu_i(\xi)\left(-e_1^T Q_{1i}e_1-\widetilde{e}_{2i}^T Q_2\widetilde{e}_{2i}\right)<0,(\forall)e_1,\widetilde{e}_{2i}\neq 0 \text{ si } (\forall)i=\overline{1,M}; \qquad (2.178)$$

s-a demonstrat, aşadar, că erorile $e_1(t)$ şi $e_2(t)$ tind către zero în mod exponenţial. În concluzie, observerul multiplu de tip alunecător se scrie [6]

$$\begin{cases}\dot{\hat{x}}(t)=\sum_{i=1}^{M}\mu_i(\xi(t))\left\{A_i\,\hat{x}(t)+B_i u(t)+d_i+G_i\left[y(t)-C\hat{x}(t)\right]+K_i\gamma_i(t)\right\},\\ \hat{y}(t)=C\hat{x}(t),\end{cases} \qquad (2.179)$$

unde

$$G_i = \left(\overline{T}\widetilde{T}\right)^{-1}\begin{bmatrix} \overline{A}_{12\,i} \\ \overline{A}_{22\,i} - \overline{A}_{22}^{s} \end{bmatrix}, K_i = \left(\overline{T}\widetilde{T}\right)^{-1} P_2^{-1}\left(\overline{T}\widetilde{T}\right) D_i \,,$$
$$\gamma_i(t) = \begin{cases} -\rho E_i^T \left(E_i E_i^T\right)^{-1} \left\| e_y^T(t) P_2 \overline{D}_{2\,i} \right\|, \text{ daca } e_y(t) \neq 0 \\ 0\,, \text{ daca } e_y(t) = 0 \end{cases} \tag{2.180}$$

$$e_y(t) = C\hat{x}(t) - y(t)\,, E_i(t) = e_y^T(t)\overline{D}_{2\,i}\,, (\forall) i = \overline{1, M}\,. \tag{2.181}$$

2.6. ESTIMAREA PARAMETRILOR NECUNOSCUŢI DIN ECUAŢIILE DE STARE PRIN INTERMEDIUL OBSERVERELOR MULTIPLE

Observerele multiple pot avea şi altă utilizare pe lângă estimarea vectorului de stare şi a vectorului intrărilor necunoscute. De exemplu, în [163], observerele multiple sunt utilizate pentru estimarea parametrilor necunoscuţi din ecuaţiile de stare asociate unui sistem liniar şi invariant în timp. Matricele ce conţin necunoscute se scriu, mai întâi, ca şi combinaţii liniare a câtorva matrice virtuale, ponderile utilizate fiind în strânsă legătură cu parametrii ce trebuie estimaţi. Se va demonstra că ieşirea unui sistem liniar este combinaţia liniară a estimărilor ieşirilor generate de observerele multiple cu aceleaşi ponderi cu cele utilizate pentru scrierea elementelor matricelor necunoscutelor. Astfel, se determină ponderile combinaţiei liniare şi formula de estimare pentru parametrii necunoscuţi [163].

Se consideră ecuaţia de stare

$$\dot{x}(t) = A\left(a_1\,, a_2\,, \ldots, a_p\right)x(t) + B\left(b_1\,, b_2\,, \ldots, b_q\right)u(t)\,, \tag{2.182}$$

unde $x(t)$ este vectorul de stare, iar $u(t)$ – vectorul intrărilor sistemului. În cadrul matricelor A şi B, $a_i\,, i = \overline{1, p}$ şi $b_j\,, j = \overline{1, q}$ reprezintă parametrii necunoscuţi ce urmează a fi estimaţi. În [163] se utilizează relaţiile

$$A\left(a_1\,, a_2\,, \ldots, a_p\right) = A_0 + \sum_{i=1}^{p} a_i A_i\,, B\left(b_1\,, b_2\,, \ldots, b_q\right) = B_0 + \sum_{i=1}^{q} b_j B_j\,; \tag{2.183}$$

A_0 şi B_0 sunt matrice obţinute din $A(a_1, a_2, ..., a_p)$ şi $B(b_1, b_2, ..., b_q)$ înlocuind cu 0 toate elementele a_i şi b_j; matricele $A_i, i = \overline{1, p}$ şi $B_j, j = \overline{1, q}$ se obţin din $A(a_1, a_2, ..., a_p) - A_0$ şi, respectiv, $B(b_1, b_2, ..., b_q) - B_0$ făcând toate elementele a_i şi b_j egale cu 1 şi toate celelalte elemente egale cu 0 [163]. Ieşirea sistemului este

$$y(t) = Cx(t); \tag{2.184}$$

matricea C nu conţine parametrii necunoscuţi. Se face presupunerea $(C, A(a_1, a_2, ..., a_p))$ – pereche detectabilă $(\forall) a_i, i = \overline{1, p}$.

Se doreşte, în continuare, estimarea parametrilor necunoscuţi a_i şi b_j utilizând doar semnalul de intrare $u(t)$ şi cel de ieşire $y(t)$. În acest sens, se utilizează transformarea [163]

$$[a_1 \ \cdots \ a_p \ b_1 \ \cdots \ b_q \ 1]^T = \widetilde{T}[\theta_1 \ \theta_2 \ \cdots \ \theta_r]^T, \tag{2.185}$$

transformare ce face legătura între a_i, b_j şi $\theta_k, k = \overline{1, r}$, unde $r = p + q + 1$; matricea $\widetilde{T}$ din ecuaţia (2.5) are forma [163]

$$\widetilde{T} = \begin{bmatrix} & T & \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \tag{2.186}$$

unde $T \in \mathcal{M}^{(p+q)\times(p+q+1)}$ se alege astfel încât $\widetilde{T}$ să fie nesingulară. Ţinând cont de ecuaţia (2.185), expresiile (2.183) devin

$$A(a_1, a_2, ..., a_p) = \sum_{k=1}^{r} \theta_k \overline{A}_k, \ B(b_1, b_2, ..., b_q) = \sum_{k=1}^{r} \theta_k \overline{B}_k, \tag{2.187}$$

în care $\overline{A}_k$ şi $\overline{B}_k$ sunt matrice obţinute din $A(a_1, a_2, ..., a_p)$ şi $B(b_1, b_2, ..., b_q)$ prin înlocuirea valorilor $a_1, a_2, ..., a_p, b_1, b_2, ..., b_q$ cu valorile calculate cu ajutorul ecuaţiei (2.185) cu particularizarea $\theta_k = 1, \theta_l = 0 (l \neq k)$ [163]. În aceste condiţii, matricele $\overline{A}_k$ şi $\overline{B}_k$ au expresiile

$$\overline{A}_k = A_0 + \sum_{i=1}^{p} t_{ik} A_i \,,\, \overline{B}_k = B_0 + \sum_{j=1}^{q} t_{(p+j)k} B_j \,,\, k = \overline{1,r}\,, \tag{2.188}$$

unde t_{ik} este elementul de pe linia „*i*” şi coloana „*k*” a matricei *T* (ecuaţia (2.186)).

Relaţiile (2.187) reprezintă combinaţii liniare între $\overline{A}_k$ şi $\overline{B}_k$, ponderile asociate acestor combinaţii, adică $\theta_k \,, k = \overline{1,r}$ satisfăcând condiţia [163]:

$$\sum_{k=1}^{r} \theta_k = 1. \tag{2.189}$$

Ecuaţiile de stare-ieşire şi stare-intrare (ecuaţiile (2.182) şi (2.184)), utilizând formele (2.187), devin

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum\limits_{k=1}^{r} \left[\theta_k \overline{A}_k x(t) + \theta_k \overline{B}_k u(t)\right], \\ y(t) = C\, x(t). \end{cases} \tag{2.190}$$

Determinarea ponderilor $\theta_k \,, k = \overline{1,r}$ echivalează cu determinarea necunoscutelor $a_i \,, i = \overline{1,p}$ şi $b_j \,, j = \overline{1,q}$.

Alegând $\theta_k = 1$ şi $\theta_l = 0\,(l \neq k)$, se consideră sistemele virtuale

$$\begin{cases} \dot{x}_k(t) = \overline{A}_k x_k(t) + \overline{B}_k u(t), \\ y(t) = C\, x_k(t). \end{cases} \tag{2.191}$$

Se presupune că există matricele $L_k \,, k = \overline{1,r}$ care satisfac ecuaţiile [163]

$$\overline{A}_1 - L_1 C = \overline{A}_2 - L_2 C = \cdots = \overline{A}_r - L_r C \tag{2.192}$$

şi $\left(\overline{A}_k - L_k C\right)$– matrice stabile. Pentru sistemele virtuale (2.191), se introduc observerele:

$$O_k : \begin{cases} \dot{\hat{x}}_k(t) = \left(\overline{A}_k - L_k C\right)\hat{x}_k(t) + L_k y(t) + \overline{B}_k u(t), \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}_k(t),\, k = \overline{1,r}, \end{cases} \tag{2.193}$$

unde *u*(*t*) şi *y*(*t*) sunt intrările observerelor (2.193). Estimarea stărilor $x_k(t)$ înseamnă determinarea semnalelor $\hat{x}_k(t)$ şi $\hat{y}_k(t)$. Dependenţa între vectorul ieşirilor măsurabile *y*(*t*) şi cel asociat ieşirilor estimate $\hat{y}_k(t)$ ale sistemelor virtuale (2.191) este de forma [163]: $\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} \hat{y}_\theta(t)$, în care

$$\hat{y}_\theta(t) = \theta_1\hat{y}_1(t) + \theta_2\hat{y}_2(t) + \ldots + \theta_r\hat{y}_r(t). \tag{2.194}$$

În regim staţionar, $y(t) \to \hat{y}_\theta(t)$.

Pentru proiectarea observerelor $O_k, k = \overline{1,r}$, este nevoie de determinarea matricelor $L_k, k = \overline{1,r}$, ce satisfac ecuaţiile (2.192). Detectabilitatea perechii $(C, \overline{A}_k)$ este necesară pentru ca $(\overline{A}_k - L_k C)$ să fie matrice stabile; dar $\overline{A}_k$ sunt dependente de $t_{ik}, i = \overline{1,p}$ (ecuaţiile (2.188)). Deci, matricea *T* (ecuaţia (2.186)) trebuie aleasă astfel încât perechile $(C, \overline{A}_k)$ să fie detectabile. Existenţa unei astfel de matrice este garantată de presupunerea conform căreia $(C, A(a_1, a_2, \ldots, a_p))$ este detectabilă pentru valorile $a_i, i = \overline{1,p}$; de exemplu, t_{ik} se află în vecinătatea parametrilor necunoscuţi a_i. În acest caz, $\overline{A}_k$ este apropiată de $A(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ şi $(C, \overline{A}_k)-$ detectabile întrucât perechea $(C, A(a_1, a_2, \ldots, a_p))$ este detectabilă. În consecinţă, *T* se alege astfel încât $(C, \overline{A}_k)-$ perechi detectabile şi L_1 se alege astfel încât $(\overline{A}_1 - L_1 C)-$ stabilă. Apoi, din (2.192), pentru orice $k = \overline{1,r}$, se determină L_k astfel încât [163]

$$\overline{A}_k - L_k C = \overline{A}_1 - L_1 C. \tag{2.195}$$

Utilizând ecuaţiile (2.188), ecuaţia anterioară se reduce la [163]

$$\sum_{i=1}^{p} (t_{i1} - t_{ik}) A_i = (L_1 - L_k C),\ k = \overline{2,r}. \tag{2.196}$$

Identificarea parametrilor a_i şi b_j se face prin intermediul estimării parametrilor θ_k. Această operaţiune se face fie în prezenţa, fie în absenţa zgomotului de măsurare.

Pentru estimarea parametrilor θ_k în absenţa zgomotului de măsurare, se definesc vectorul parametric [163]

$$\Theta = [\theta_1 \ \theta_2 \ \cdots \ \theta_r]^T \tag{2.197}$$

şi matricele

$$\hat{Y}(t) = \begin{bmatrix} \hat{y}_1(t) & \hat{y}_2(t) & \cdots & \hat{y}_r(t) \\ \hat{y}_1(t-\tau_1) & \hat{y}_2(t-\tau_1) & \cdots & \hat{y}_r(t-\tau_1) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \hat{y}_1(t-\tau_l) & \hat{y}_2(t-\tau_l) & \cdots & \hat{y}_r(t-\tau_l) \end{bmatrix},$$
$$Y(t) = \left[y^T(t) \ y^T(t-\tau_1) \ \cdots \ y^T(t-\tau_l)\right]^T, \tag{2.198}$$

unde $0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_l$. Utilizând ecuaţiile (2.189) şi (2.194), se demonstrează în [163] că, în regim staţionar $(t \to \infty)$,

$$\begin{bmatrix} f \\ \hat{Y}^T(t) \end{bmatrix}^T \Theta \to \begin{bmatrix} 1 \\ Y(t) \end{bmatrix}, \tag{2.199}$$

unde $f = [1 \ 1 \ \cdots \ 1]$; de asemenea, dacă $\left[f^T \ \ \hat{Y}^T(t)\right]^T$ are rang de coloană maxim, rezultă

$$\hat{\Theta}(t) = \left(\left[f^T \ \ \hat{Y}^T(t)\right]\begin{bmatrix} f \\ \hat{Y}(t) \end{bmatrix}\right)^{-1}\left[f^T \ \ \hat{Y}^T(t)\right]\begin{bmatrix} f \\ Y(t) \end{bmatrix}, \tag{2.200}$$

în care $\hat{\Theta}(t)$ este estimarea vectorului parametric $\Theta(t)$. Aşadar, estimarea lui $\Theta(t)$ se face prin intermediul relaţiei (2.200), aceasta însemnând obţinerea estimărilor $\hat{\theta}_k$ (estimările parametrilor θ_k). Utilizând ecuaţiile (2.185) şi (2.197), se obţin parametrii necunoscuţi a_i şi b_j după cum urmează [163]:

$$\left[a_1 \ \cdots \ a_p \ \ b_1 \ \cdots \ b_q\right]^T = T\,\hat{\Theta}. \tag{2.201}$$

Dacă semnalul de măsurare este perturbat de un vector de tip zgomot $(w(t))$, ecuaţia de ieşire (2.11) este de tipul [163]

$$\tilde{y}(t) = Cx(t) + w(t); \tag{2.202}$$

în ecuaţiile (2.193), $y(t)$ va fi înlocuit cu $\tilde{y}(t)$. În aceste condiţii, relaţia (2.194) devine

$$\lim_{t\to\infty} \hat{y}_\theta(t) = \lim_{t\to\infty} \left[\tilde{y}(t) + \tilde{w}(t)\right], \tag{2.203}$$

în care $\tilde{w}(t)$ este ieşirea sistemului

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = A_s z(t) + \sum_{k=1}^{r} \theta_k L_k w(t), \\ \tilde{w}(t) = Cz(t) - w(t), \end{cases} \tag{2.204}$$

cu $z(0) = 0$; ecuaţia (2.203) implică [163]

$$\begin{bmatrix} f \\ \hat{Y} \end{bmatrix} \Theta = \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{Y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ W \end{bmatrix}, \hat{Y}(t) = \begin{bmatrix} \hat{y}_1(t_1) & \hat{y}_2(t_1) & \cdots & \hat{y}_r(t_1) \\ \hat{y}_1(t_2) & \hat{y}_2(t_2) & \cdots & \hat{y}_r(t_2) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \hat{y}_1(t_N) & \hat{y}_2(t_N) & \cdots & \hat{y}_r(t_N) \end{bmatrix},$$
$$\tilde{Y}(t) = \left[\tilde{y}^T(t_1)\ \tilde{y}^T(t_2) \cdots \tilde{y}^T(t_N)\right]^T, W = \left[\tilde{w}^T(t_1)\ \tilde{w}^T(t_2) \cdots \tilde{w}^T(t_N)\right]^T. \tag{2.205}$$

Deoarece W nu este cunoscută, se aplică metoda celor mai mici pătrate pentru minimizarea normei $\left\| \begin{bmatrix} f \\ \hat{Y} \end{bmatrix} \Theta - \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{Y} \end{bmatrix} \right\|$ pentru estimarea vectorului $\hat{\Theta}(t)$ [163]:

$$\hat{\Theta}(t) = \left(\left[f^T\ \ \hat{Y}^T(t)\right] \begin{bmatrix} f \\ \hat{Y}(t) \end{bmatrix} \right)^{-1} \left[f^T\ \ \hat{Y}^T(t)\right] \begin{bmatrix} f \\ \tilde{Y}(t) \end{bmatrix}. \tag{2.206}$$

CAPITOLUL 3

OBSERVERE OPTIMALE PENTRU ESTIMAREA STĂRII APARATELOR DE ZBOR

3.1. INTRODUCERE

În trecut, una dintre principalele aplicabilități ale soluțiilor problemelor liniare de control optimal stochastic a fost legată de faptul că dimensiunea şi complexitatea soluțiilor depăşeşte ceea ce este important pentru o lege de control satisfăcătoare. Astfel, pentru un sistem descris de n ecuații diferențiale ce includ şi zgomote albe, soluția necesită un filtru de ordinul n. Dacă nu există surse excitante de tip zgomot alb pentru sistem, este necesară o dimensiune chiar mai mare pentru filtru.

Atunci când, din diferite cauze (perturbații stochastice, absența unor senzori etc.), este imposibilă cunoaşterea perfectă a variabilelor de stare asociate unui sistem, utiliza-rea estimatoarelor de stare este esențială pentru controlul ulterior al sistemului. Lucră-rile în care se abordează această tematică utilizează două tipuri de modele dinamice: deterministe şi stochastice. În situația în care dinamica sistemului este afectată de in-certitudini (necunoscute) sau aceasta este parțial cunoscută, implementarea observerelor deterministe este o soluție viabilă. Dintre aceste observere, un loc important îl ocupă observerele cu amplificare mare (high-gain observers); în cadrul majorității observerelor cu amplificare mare, se presupune fie că sistemul nu este afectat de perturbații externe, fie că acesta nu are o dinamică nemodelată. În cazul sistemelor stochastice neliniare, chiar dacă informația este completă, estimarea optimală a stării este complexă întrucât este nevoie de rezolvarea aşa-numitelor ecuații diferențiale Duncan-Mortensen-Zakai cu soluții dimensional finite pentru modelele liniare, lucru care corespunde, în special, filtrelor Kalman. Proiectarea oricărui observer cu dimensiune finită necesită câteva aproximații în cadrul procesului de minimizare a limitei superioare a erorii de estimare.

Dintre observerele optimale, cel mai cunoscut este filtrul Kalman-Bucy ce presupune minimizarea unui criteriu de calitate ce implică eroarea de estimare. În consecință, proiectanții trebuie să proiecteze adesea observere cu ordin redus pentru satisfacerea constrângerilor ce apar datorită complexității filtrelor. Un alt motiv este acela că, deşi modelul unui sistem are multe grade de libertate, este necesară estimarea numai a unui număr mic de variabile de stare. Un alt element important în teoria estimării optimale a stării unui sistem o constituie problematica observării asimptotice. Este bine cunoscut faptul că filtrul Kalman este şi un observer asimptotic. Oricum, în teoria estimatoarelor de stare cu ordin redus, operațiile de estimare şi cele de observare sunt distincte, adică un estimator de stare cu ordin redus nu este neapărat şi observer. În multe aplicații practice, este însă nevoie de proiectarea unor estimatoare de stare cu ordin redus care să fie, în acelaşi timp, şi observere pentru o parte dintre stările sistemului.

În cadrul acestui capitol, sunt prezentate câteva dintre cele mai importante proceduri de proiectare a observerelor optimale atât pentru sistemele afectate de perturbații stochastice cât şi pentru cele afectate de perturbații deterministe.

3.2. ESTIMAREA STĂRII UTILIZÂND METODA CELOR MAI MICI PĂTRATE

Dinamica aparatului de zbor este descrisă de ecuația de stare

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{3.1}$$

cu x_0 – vectorul valorilor staționare ale variabilelor de stare; pentru estimarea lui x se minimizează indicatorul de performantă [50]

$$\mathcal{J}_c = (x - x_0)^T Q_c (x - x_0) + n^T R_c n, \tag{3.2}$$

unde Q_c şi R_c sunt matrice simetrice $\left(Q_c = Q_c^T, R_c = R_c^T\right)$, pozitiv definite şi nesingu-lare, iar n este vectorul zgomotelor senzorilor din ecuaţia

$$y = Cx + n. \tag{3.3}$$

Cu aceasta, $\mathcal{J}_c$ devine

$$\mathcal{J}_c = (x - x_0)^T Q_c (x - x_0) + (y - Cx)^T R_c (y - Cx). \tag{3.4}$$

Vectorul de stare estimat $\hat{x}$ se calculează din condiţia de minim a lui $\mathcal{J}_c$ în raport cu $x \left(\left. \frac{\partial \mathcal{J}_c}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}} = 0 \right)$

$$(y - C\hat{x})^T R_c C - (\hat{x} - x_0)^T Q_c = 0. \tag{3.5}$$

Pentru calculul lui $\hat{x}$, se transpune ecuaţia (3.5) şi se obţine

$$\hat{x} = LQ_c x_0 + LC^T R_c y, \tag{3.6}$$

unde matricea L este

$$L = \left(Q_c + C^T R_c C\right)^{-1}. \tag{3.7}$$

Din ecuaţia $ZZ^{-1} = I$, cu

$$Z = \begin{bmatrix} Q_c & C^T \\ C & -R_c^{-1} \end{bmatrix}, \; Z^{-1} = \begin{bmatrix} L & N \\ O^T & M \end{bmatrix}, \tag{3.8}$$

se obţin ecuaţiile

$$Q_c L + C^T O^T = I, O^T = R_c C L, \tag{3.9}$$

din care, prin eliminarea lui O^T, se obţine matricea

$$L = Q_c^{-1} - Q_c^{-1} C^T \left(C Q_c^{-1} C^T + R_c^{-1} \right)^{-1} C Q_c^{-1}. \tag{3.10}$$

Cu aceasta, ecuaţia (3.6) devine [50]

$$\hat{x} = x_0 + H(y - Cx_0), \tag{3.11}$$

unde

$$H = Q_c^{-1}C^T\left(CQ_c^{-1}C^T + R_c^{-1}\right)^{-1}. \tag{3.12}$$

Sistemul descris de ecuațiile (3.1), (3.3) şi (3.11) (aparat de zbor, senzori şi observer) este modelat de schema bloc din fig. 3.1.

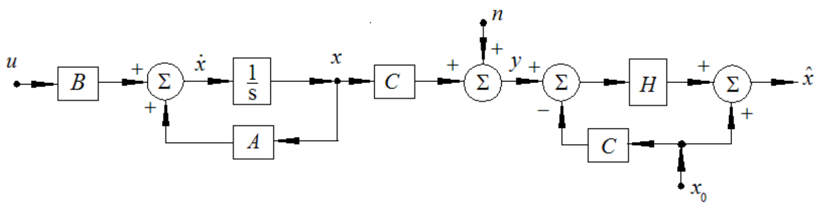

Fig. 3.1. Modelul sistemului aparat de zbor – senzori – observer

3.3. CHESTIUNI GENERALE DE PROIECTARE A OBSERVERELOR OPTIMALE

Considerând sistemul descris de ecuația (3.1) – dinamica aparatutului de zbor şi sistemul de măsurare descris de ecuația

$$y = Cx, \tag{3.13}$$

se proiectează un observer optimal care să furnizeze un vector de stare estimat $\hat{x} \to x$. Observerul de stare liniar este descris de ecuația [50]

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}), \tag{3.14}$$

cu y de forma (3.13) şi $\hat{y}-$ vectorul de ieşire estimat,

$$\hat{y} = C\hat{x}. \tag{3.15}$$

Cu (3.13) şi (3.15), ecuația (3.14) devine

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + LCx \tag{3.16}$$

şi, cu Bu exprimat din ecuaţia de stare (3.1) şi eroarea (abaterea) $e = \hat{x} - x$, se obţine ecuaţia

$$\dot{e} = \overline{A}e, \overline{A} = A - LC. \tag{3.17}$$

Matricea de amplificare L a observerului de stare se poate calcula din condiţia ca $\overline{A}$ să fie stabilă. Cu notaţia $z = \hat{y} - y$ şi ecuaţiile (3.13), (3.15), rezultă ecuaţia

$$z = Ce. \tag{3.18}$$

Dacă $\overline{A}$ este matrice Hurwitz, atunci, pentru fiecare matrice $Q_c > 0$ şi $Q_c = Q_c^T$, există o matrice P>0 care verifică ecuaţia Lyapunov

$$\overline{A}^T P + P\overline{A} + Q_c = 0. \tag{3.19}$$

Matricea P din funcţia Lyapunov

$$V(t) = e^T(t)Pe(t) \tag{3.20}$$

asigură realizarea condiţiei $V(t) > 0$ iar ecuaţia Lyapunov (3.19) asigură realizarea condiţiei de stabilitate $(\dot{V}(t) < 0)$. Într-adevăr, derivând funcţia (3.20) şi ţinând seama de ecuaţiile (3.17) şi (3.19), rezultă succesiv

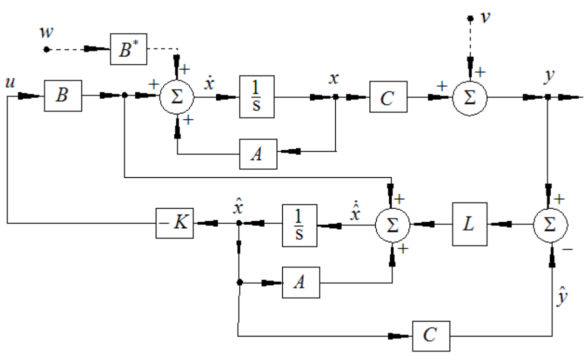

Fig. 3.2. Schema bloc de modelare a sistemului de comandă optimală a A cu observer liniar de stare

$$\dot{V}(t) = e^T P\dot{e} + \dot{e}^T Pe = e^T P\overline{A}e + \left(\overline{A}e\right)^T Pe = e^T\left(P\overline{A} + \overline{A}^T P\right)e = -e^T Q_c e < 0. \quad (3.21)$$

În fig. 3.2 este prezentată schema bloc de modelare a sistemului de comandă optimală a mişcării aparatului de zbor, constituită din următoarele subsisteme: modelul dinamic al aparatului de zbor, sistemul de măsurare, observerul liniar de stare şi subsistemul de comandă optimală (matricea de amplificare K). Precizăm că $w = v = 0$.

Fie cazul mişcării longitudinale a A descrisă de ecuația (1.47) şi sistemul de măsurare $y = Cx$, cu $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; deci, variabilele de stare măsurate sunt α şi θ, implicit $y = [\theta \quad \vartheta], \vartheta = \theta - \alpha$ fiind panta traiectoriei. Se calculează matricea de amplificare L a observerului prin metoda poziționării polilor (impunerea valorilor proprii ale matricei $\overline{A} = (A - LC)$ a observerului în circuit închis). Polii observerului se aleg astfel încât partea lor reală minimă să fie de $5 \div 10$ ori mai mare decât partea reală maximă a polilor sistemului condus (dinamicii longitudinale a aparatului de zbor), adică

$$\left|\mathrm{Re}\{\lambda_{\min}\}_{\text{observer}}\right| > 5 \div 10 \left|\mathrm{Re}\{\lambda_{\max}\}_{\text{sistem}}\right|. \quad (3.22)$$

S-au impus următoarele valori proprii ale matricei $\overline{A}$: -60.15, -2.84, -18.90, -15.11; rezultă matricea $L^T = 10^3 \cdot \begin{bmatrix} 1.45 & 0.06 & 0.07 & 0.92 \\ -0.26 & -0.04 & -0.02 & -0.40 \end{bmatrix}$.

Anterior calculului lui L, trebuie verificat dacă perechea (A, C) este observabilă şi dacă perechea (A, B) este controlabilă; în Matlab/Simulink se pot utiliza instrucțiunile obsv, respectiv ctrb; au rezultat două matrice cu rangul egal cu 4; deoarece n=4, rezultă că modelul mişcării longitudinale a aeronavei este controlabil şi observabil.

Folosind schema bloc din fig. 3.2, se calculează erorile de estimare a variabilelor de stare folosind observerul descris de ecuația (3.16), în absența legii de comandă (K=0); aceste erori sunt reprezentate în fig. 3.3. Cu vectorul de stare astfel estimat, se realizează comanda mişcării longitudinale ($u = -K\hat{x}$, cu matricea K obținută cu algoritmul ALGLX [140]); $K = [2.225 \quad -0.316 \quad -10.736 \quad -1.428]$. Utilizând din nou sche-ma bloc din fig. 3.2, se construiesc caracteristicile de timp din fig. 3.4, care exprimă variabilele de stare $x_i(t)-$ cu linie continuă şi $\hat{x}_i(t)-$ cu linie întreruptă; se constată că $\hat{x}_i(t) \to \ x_i(t) \to 0$ într-un interval de timp scurt.

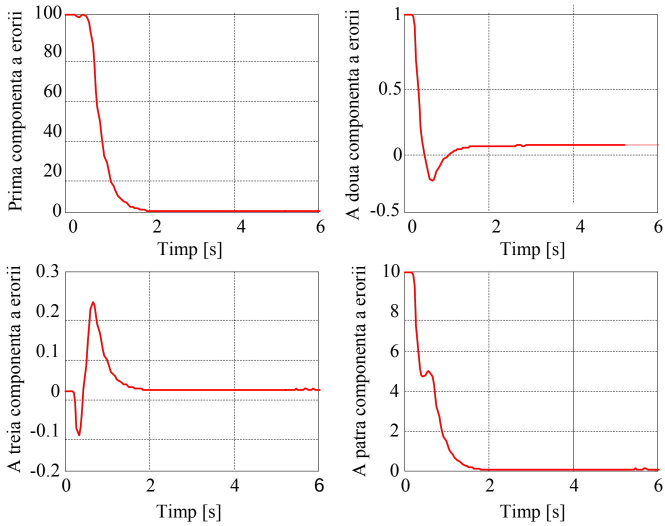

Fig. 3.3. Erorile de estimare a variabilelor de stare (u=0)

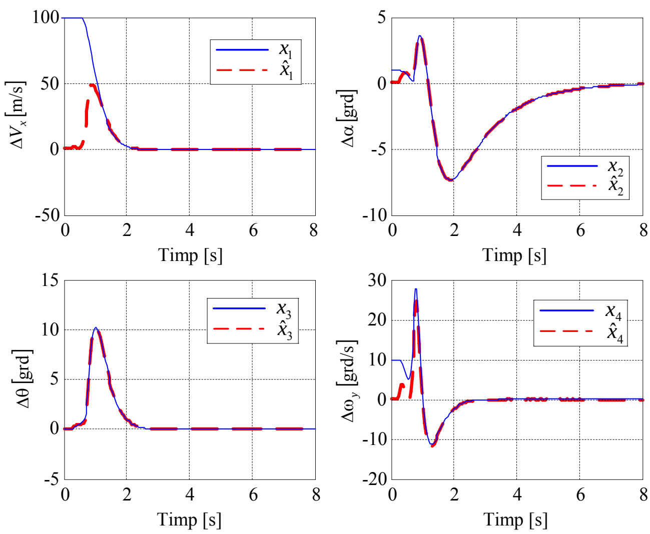

Fig. 3.4. Variabilele de stare $x_i(t)$ şi $\hat{x}_i(t)$ - mişcarea longitudinală $(K \neq 0)$

În cazul mişcării laterale descrisă de ecuaţia (1.49), cu $C = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$, alegând valorile proprii ale matricei $\overline{A}$ conform (3.22), adică $-66.27, -3.97, -10.36, -1.58$, rezultă matricea $L^T = 10^4 \cdot [1.21 \quad -0.05 \quad 0.11 \quad 0.008]$. Folosind aceeaşi schemă bloc ca mai sus, se obţin succesiv caracteristicile de timp din fig. 3.5 (erorile de estimare a variabilelor de stare ale observerului, pentru K=0) şi din fig. 3.6 (variabilele de stare $x_i(t)-$ cu linie continuă şi $\hat{x}_i(t)-$ linie întreruptă).

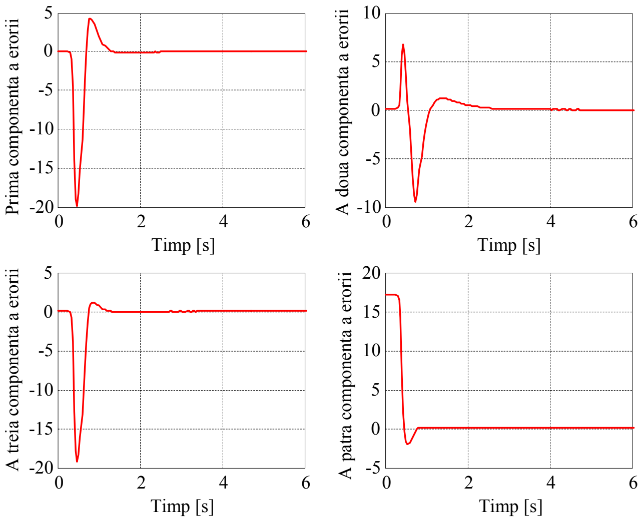

Fig. 3.5. Erorile de estimare a variabilelor de stare (u=0)

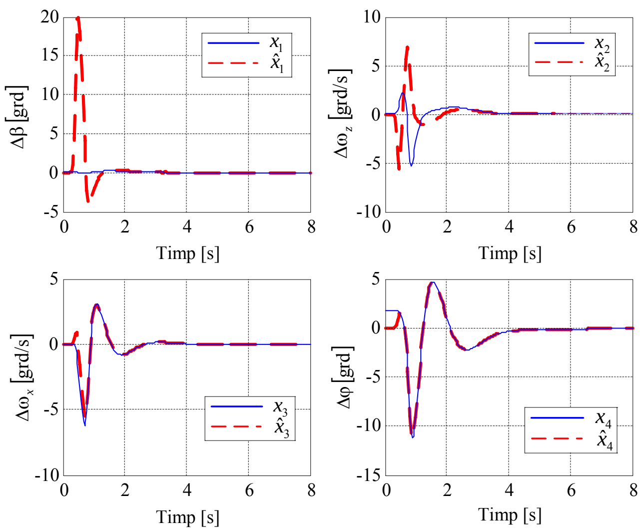

Fig. 3.6. Variabilele de stare $x_i(t)$ şi $\hat{x}_i(t)$ - mişcarea laterală $(K \neq 0)$

3.4. FILTRUL KALMAN

În cazul în care aparatul de zbor evoluează în condiții de perturbații aleatoare, se folosesc observerele optimale de tipul filtrului Kalman-Bucy. Pentru proiectarea acestui filtru, se consideră dinamica aeronavei descrisă de ecuația

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + B^*(t)w(t), \\ y(t) = C(t)x(t) + v(t), \end{cases} \tag{3.23}$$

în care $x \in \mathcal{M}^{n\times 1}$ este vectorul de stare, $u \in \mathcal{M}^{m\times 1}$ – vectorul de comandă, $A \in \mathcal{M}^{n\times n}$, $B \in \mathcal{M}^{n\times m}, B^* \in \mathcal{M}^{n\times l}$ – matrice; $w \in \mathcal{M}^{l\times 1}$ este un proces aleator de tip zgomot alb, $y \in \mathcal{M}^{m\times 1}$ – vector măsurat, $C \in \mathcal{M}^{m\times n}$ – matrice de selectare şi $v \in \mathcal{M}^{m\times 1}$ – zgomot asociat senzorilor (proces aleator de tip zgomot alb).

Procesele aleatoare w şi v sunt descrise cu ajutorul matricelor de corelație

$$Q^*(t) = \mathrm{M}\left[w(t)w^T(t')\right], R^*(t) = \mathrm{M}\left[v(t)v^T(t')\right], \tag{3.24}$$

unde $\mathrm{M}[\cdot]$ reprezintă media, Q^*, R^* – matrice simetrice şi pozitiv semidefinite care exprimă intensitățile zgomotelor w şi v [88], [140]

$$Q^*(t) = \begin{bmatrix} q_1(t) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_2(t) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & q_l(t) \end{bmatrix}, R^*(t) = \begin{bmatrix} r_1(t) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_2(t) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & r_m(t) \end{bmatrix}. \tag{3.25}$$

O covarianță mică implică intrări tip zgomot aproape de medie (zero în acest caz), iar o covarianță mare conduce la intrări zgomot departe de medie.

Procesele aleatoare w şi v sunt necorelate între ele, adică

$$N(t) = \mathrm{M}\left[w(t)v^T(t')\right] = 0. \tag{3.26}$$

În aplicații practice, dacă B^* nu se cunoaşte, se poate considera $B^* = B$.

Filtrul Kalman-Bucy are drept scop determinarea vectorului de stare estimat $(\hat{x}(t))$, funcție de măsurătorile $y(\tau)(0 \le \tau < t)$, care să minimezeze funcția [88]

$$J = \mathrm{trace}(L(t)), \tag{3.27}$$

în care L(t) este covarianța pentru eroarea de estimare

$$L(t) = M\left[(x(t)-\hat{x}(t))(x(t)-\hat{x}(t))^T\right]. \tag{3.28}$$

Estimatorul cuadratic liniar (LQE) se numeşte filtru Kalman-Bucy şi este descris de ecuațiile $\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t)-\hat{y}(t)), \hat{y}(t) = C\hat{x}(t),$ în care

$$L(t) = P^*(t)C^T(t)R^*(t); \tag{3.29}$$

$P^*(t)$ este o matrice pozitiv definită - soluție a ecuației Riccati [88]

$$\dot{P}^*(t) = A(t)P^*(t) + P^*(t)A^T(t) - P^*(t)C^T(t)R^{*-1}(t)C(t)P^*(t) + B^*(t)Q^*(t)B^{*T}(t) \tag{3.30}$$

sau

$$A(t)P^*(t) + P^*(t)A^T(t) - P^*(t)C^T(t)R^{*-1}(t)C(t)P^*(t) + B^*(t)Q^*(t)B^{*T}(t) = 0, \tag{3.31}$$

dacă sistemul este considerat invariant în timp. Considerând $e(t) = x(t) - \hat{x}(t) -$ eroarea de estimare a filtrului, se poate determina ecuația asociată dinamicii erorii

$$\begin{aligned}\dot{e}(t) = {}& A(t)x(t) + B(t)u(t) + B^*(t)w(t) - A(t)\hat{x}(t) - B(t)u(t) - L(t)[C(t)x(t) - C(t)\hat{x}(t)] - \\ & - L(t)v(t) = [A(t) - L(t)C(t)]e(t) + B^*(t)w(t) - L(t)v(t).\end{aligned} \tag{3.32}$$

Aşadar, viteza de convergență este dependentă de valorile proprii (părțile reale ale valorilor proprii) ale matricei $(A(t) - L(t)C(t))$ dar şi de zgomotul senzorilor. Asupra estimatorului cuadratic liniar (LQE) întotdeauna va exista o influență a zgomotului procesului (w) şi o influență a zgomotului senzorilor (v). Alegerea matricei $A(t)$ va accentua/diminua efectul lui $v(t)$ asupra lui $\hat{x}(t)$ [88].

Dacă $Q^*(t)$ şi $R^*(t)$ sunt matrice simetrice şi pozitiv semidefinite, dinamica sistemului este considerată constantă în timp, $(A, B^*)-$ pereche controlabilă şi $(A, C)-$ pereche detectabilă, se poate determina $P^*(t)$ ca soluție a ecuației (3.31) şi apoi matricea de amplificare a observerului L(t). Pentru filtrul Kalman-Bucy de tip optimal, se obține funcția de transfer [88]

$$\frac{\hat{X}(s)}{Y(s)} = \frac{L}{sI - (A - LC)}. \tag{3.33}$$

Funcția de transfer face legătura între "măsurători" şi "starea estimată.

Schema bloc de modelare a sistemului de comandă optimală a mişcării aparatului de zbor este prezentată în fig. 3.2; aceasta este constituită din următoarele subsisteme: modelul dinamic al aparatului de zbor, sistemul de măsurare, observerul optimal de tip filtru Kalman-Bucy şi subsistemul de comandă optimală (matricea de amplificare K).

Se consideră mişcarea aeronavei descrisă de ecuația de stare (1.47) [140] şi de ecuația de ieşire $y = Cx + v$ cu $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, adică $y^T = [\theta \quad \vartheta], \vartheta = \theta - \alpha$. Alegând $Q^* = [0.01]$ şi $R^* = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix}$, se rezolvă ecuația Riccati (3.31) şi rezultă

$$P^* = \begin{bmatrix} 1.73 & -0.20 & -0.11 & -0.02 \\ -0.20 & 0.04 & 0.04 & 0.08 \\ -0.11 & 0.04 & 0.04 & 0.09 \\ -0.02 & 0.08 & 0.09 & 0.44 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} -11.01 & 9.58 \\ 4.01 & -0.93 \\ 4.26 & 0.24 \\ 9.11 & 0.57 \end{bmatrix}. \tag{3.34}$$

Matricele P^* şi L se calculează utilizând instrucțiunea LQE, având sintaxa $[L, P, E] = \mathrm{LQE}(A, G, C, Q, R, N)$, în care: $P = P^*, Q = Q^*, R = R^*$, G=B*, N este matricea din ecuația $N(t) = \mathrm{M}[w(t)v^T(t')] = 0$, iar E reprezintă vectorul ce conține valorile proprii ale matricei A-LC. Rezultă caracteristicile de timp din fig. 3.7 (erorile de estimare a variabilelor de stare cu estimatorul de stare Kalman-Bucy pentru u=0) şi caracteristicile de timp din fig. 3.8 pentru legea de comandă $u = -K\hat{x}$ (K calculată cu algoritmul ALGLX [140]); caracteristicile exprimă variabilele de stare $x_i(t) -$ cu linie continuă şi $\hat{x}_i(t) -$ cu linie întreruptă.

Se implementează software filtrul Kalman-Bucy şi pentru cazul mişcării laterale a unei aeronave Boeing 747; ecuaţia de stare a mişcării laterale este (1.49). Se obţin

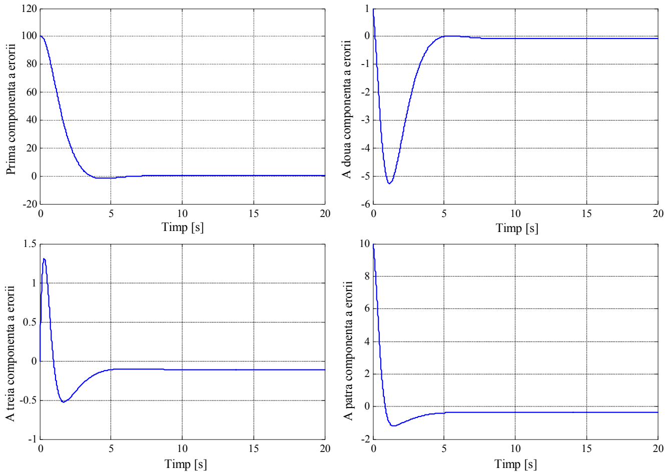

Fig. 3.7. Erorile de estimare a stării estimatorului Kalman-Bucy $(K=0)$

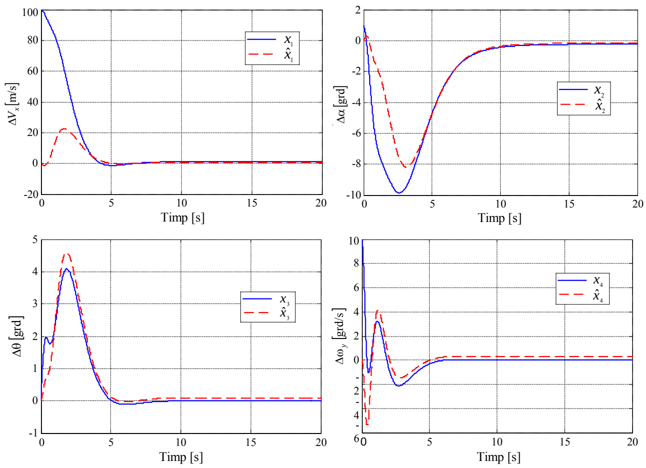

Fig. 3.8. Variabilele de stare $x_i(t)$ şi $\hat{x}_i(t)$ - mişcarea longitudinală $(K \neq 0)$

$$P^* = \begin{bmatrix} 0.0087 & -0.0004 & 0.0016 & 0.0002 \\ -0.0004 & 0.0055 & 0.0027 & 0.0023 \\ 0.0016 & 0.0027 & 0.0104 & 0.0070 \\ 0.0002 & 0.0023 & 0.0070 & 0.0120 \end{bmatrix}, \; L = \begin{bmatrix} 0.0238 \\ 0.2340 \\ 0.6993 \\ 1.1985 \end{bmatrix}; \tag{3.35}$$

erorile de estimare a variabilelor de stare sunt prezentate în fig. 3.9 (pentru K=0), iar variabilele de stare $x_i(t)$ şi $\hat{x}_i(t)$ pentru K calculată cu algoritmul ALGLX sunt prezentate în fig. 3.10.

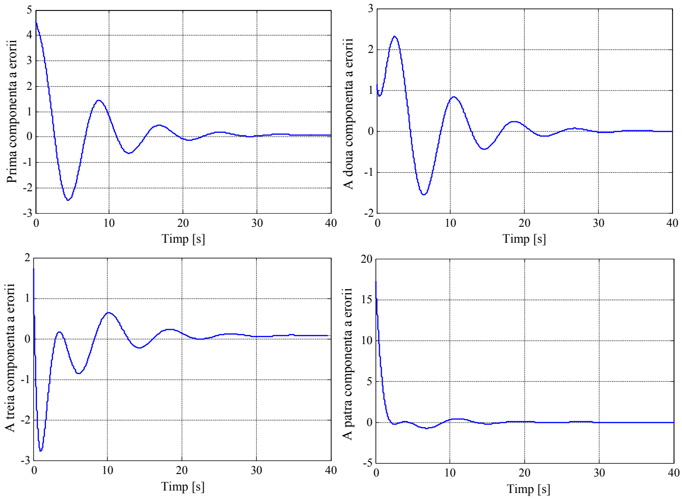

Fig. 3.9. Erorile de estimare a stării estimatorului Kalman-Bucy (K=0)

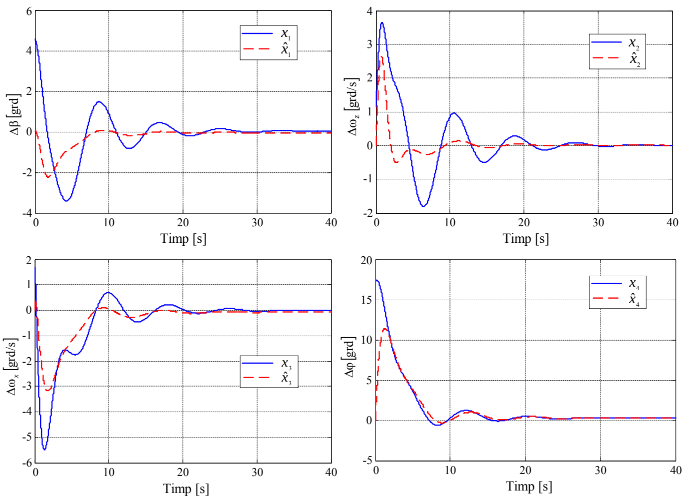

Fig. 3.10. Variabilele de stare $x_i(t)$ şi $\hat{x}_i(t)$ - mişcarea laterală $(K \neq 0)$

3.5. PROIECTAREA OBSERVERELOR H_∞ PENTRU SISTEME SINGULARE NELINIARE

3.5.1. INTRODUCERE

Proiectarea observerelor pentru sistemele neliniare reprezintă o preocupare constantă în ultimele 2 decenii. Acest lucru se datorează faptului că eroarea de estimare este în general necesară pentru controlul sistemului atunci când nu sunt disponibile măsurătorile tuturor stărilor sistemului. Pentru sistemele neliniare există câteva metode de proiectare a observerelor ce se bazează, de exemplu, pe transformări de coordonate [114], [125], [222]. În cadrul altor lucrări [13], nu este nevoie de astfel de transformări pentru proiectarea observerelor. O clasă importantă de sisteme neliniare (sisteme Lipschitz) sunt analizate pe larg în [186] şi [236].

În literatura de specialitate, se proiectează observere şi pentru sistemele singulare (cunoscute şi sub numele de descriptoare generalizate sau sisteme algebrice diferențiale [46]). Astfel de observere au fost proiectate în cadrul lucrărilor [30], [40], [139] etc; pe de altă parte, există şi observere proiectate special pentru sistemele singulare cu intrări necunoscute [45], [47], [49]. În ultimii ani, o metodă nouă pentru proiectarea observerelor a fost utilizată pentru o clasă de sisteme singulare neliniare, în cadrul cărora neliniaritățile se consideră a fi compuse dintr-o neliniaritate Lipschitz şi una ale-atorie, ultima fiind interpretată ca perturbație (intrare necunoscută) [46]. Metoda se ba-zează pe parametrizarea observerelor cu ordin întreg, ordin redus sau cu ordin minimal.

Problema estimării stării pentru sistemele liniare în prezența zgomotelor este subiectul mai multor studii în ultimele decenii. Se disting aici metode precum metoda filtrului Kalman şi metoda H_∞. În cadrul primei metode, sistemul şi zgomotele se presupun a fi de tip Gausian [48], [167], [168]. Când zgomotul este un semnal arbitrar şi mărginit, filtrarea H_∞ permite atingerea unui anumit nivel de atenuare a zgomotului. Dintre lucrările ce abordează filtrarea H_∞ pentru sistemele singulare, se remarcă [226] şi [227]. În carul acestor lucrări, estimarea stării şi intrărilor necunoscute se face simultan pentru sistemele singulare rectangulare; lucrarea [41] este prima în cadrul căreia este prezentată filtrarea robustă H_∞ pentru sistemele liniare singulare rectangulare. În cadrul acestei lucrări, sunt prezentate observere cu ordin întreg, cu ordin redus sau cu ordin minimal pentru sistemele continue sau discrete.

În lucrarea [46] este proiectat un observer H_∞ pentru sistemele singulare neliniare de tip Lipschitz pentru cazul în care modelul şi măsurătorile sunt afectate de zgomote; metoda din [46] unifică tehnicile de proiectare asociate observerelor cu ordin întreg, ordin redus şi ordin minimal.

3.5.2. DESCRIEREA SISTEMULUI

Se consideră sistemul singular neliniar [46]

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Df\left(t, F_L x, u\right) + D_1 w(t), \\ y(t) = Cx(t) + D_2 w(t), \end{cases} \tag{3.36}$$

cu starea inițială $x(0) = x_0$; în ecuațiile (3.36), $x(t) \in \mathcal{M}^{n\times 1}$ este semi-vectorul de stare, $u(t) \in \mathcal{M}^{m\times 1}$ – vectorul intrărilor necunoscute, $w(t) \in \mathcal{M}^{n_w\times 1}$ – vectorul perturbațiilor ce conține atât zgomotele sistemului cât şi zgomotele de măsurare, $y(t) \in \mathcal{M}^{p\times 1}$ – vectorul măsurătorilor (ieşirilor). Matricea $E \in \mathcal{M}^{n_1\times n}$ este singulară în cazul în care $n_1 = n$; dimensiunile celorlalte matrice sunt: $A \in \mathcal{M}^{n_1\times n}, B \in \mathcal{M}^{n_1\times m}, C \in \mathcal{M}^{p\times n}, D \in \mathcal{M}^{n_1\times n_f}$, $D_1 \in \mathcal{M}^{n_1\times n_w}$ şi $D_2 \in \mathcal{M}^{p\times n_w}$. Neliniaritatea $f\left(t, F_L x, u\right)$ verifică condiția Lipschitz

$$\left\| f\left(t, F_L x_1, u\right) - f\left(t, F_L x_2, u\right)\right\| \le \lambda \left\| F_L\left(x_1 - x_2\right)\right\|, \tag{3.37}$$

unde λ este o constantă Lipschitz cunoscută, iar matricea FL are elemente reale.

Ecuațiile (3.36) descriu o clasă largă de sisteme neliniare; de fapt, dacă se consideră sistemul [44], [80]

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + \varphi\left(t, F_L x, u\right) + D_1 w(t), \\ y(t) = Cx(t) + D_2 w(t), \end{cases} \tag{3.38}$$

în care neliniaritatea $\varphi\left(t, F_L x, u\right)$ este de forma [46]

$$\varphi\left(t, F_L x, u\right) = Df\left(t, F_L x, u\right) + D_d d(t), \tag{3.39}$$

unde $f\left(t, F_L x, u\right)$ este neliniaritate Lipschitz, $d(t) \in \mathcal{M}^{n_d\times 1}$ – vectorul intrărilor necunoscute, iar D_d – matrice cu rang de coloană maxim $\left(\mathrm{rang}\, D_d = n_d\right)$, sistemul de ecuații

(3.38) este echivalent cu sistemul (3.36) dacă se înmulţeşte acesta la stânga cu matricea cu rang de coloană maxim $\begin{bmatrix} \pi_{D_d} \\ D_d^+ \end{bmatrix}$, unde π_{D_d} este matricea de anulare la stânga a matricei Dd $\left(\pi_{D_d} \cdot D_d = 0\right)$, iar D_d^+ este inversa generalizată (pseudo-inversa) a matricei Dd ; aceasta satisface proprietatea $D_d D_d^+ D_d = D_d$. În aceste condiții, prima ecuație (3.38) devine [46]

$$\pi_{D_d} E\dot{x}(t) = \pi_{D_d} Ax(t) + \pi_{D_d} Bu(t) + \pi_{D_d} Df\left(t, F_L x, u\right) + \pi_{D_d} D_1 w(t), \tag{3.40}$$

sau

$$D_d^+ E\dot{x}(t) = D_d^+ Ax(t) + D_d^+ Bu(t) + D_d^+ Df\left(t, F_L x, u\right) + d(t) + D_d^+ D_1 w(t); \tag{3.41}$$

a doua ecuație (3.38) nu se modifică. În deducerea ecuațiilor (3.40) şi (3.41) s-a ținut seama de relația $D_d^+ D_d = I$ întrucât Dd are rang de coloană maxim. În acest caz, sistemul format din ecuația (3.40) şi ce de-a doua ecuație (3.38) este un sistem de forma (3.36). Ecuația (3.41) poate fi ulterior utilizată pentru determinarea vectorului intrărilor necunoscute d(t). Când intrările necunoscute afectează ieşirea y(t), este uşor de demonstrat că sistemul

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Df\left(t, F_L x, u\right) + D_d d(t) + D_1 w(t), \\ y(t) = Cx(t) + G_d d(t) + D_2 w(t), \end{cases} \tag{3.42}$$

în care d(t) este vectorul intrărilor necunoscute şi $\operatorname{rang} G_d = q_1$, poate fi adus la forma (3.36). În [46] se demonstrează că, fără micşorarea generalității, $G_d = \begin{bmatrix} I_{q_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $d(t) = \begin{bmatrix} d_1(t) \\ d_2(t) \end{bmatrix}, y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} D_{21} \\ D_{22} \end{bmatrix}, D_d = \begin{bmatrix} D_{d_1} & D_{d_2} \end{bmatrix}$ sunt matricele G_d din ecuațiile (3.39), precum şi partiționările vectorilor $d(t), y(t)$ şi a matricelor C, D_2 şi, respectiv, D_d.

În acest caz, sistemul (3.42) este echivalent cu [46]

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = \left(A - D_{d_1}C_1\right)x(t) + \overline{B}\overline{u}(t) + Df\left(t, F_L x, u\right) + D_{d_2}d_2(t) + \left(D_1 - D_{d_1}D_{21}\right)w(t), \\ y_2(t) = C_2 x(t) + D_{22}w(t), \end{cases} \tag{3.43}$$

cu $d_1(t) = y_1(t) - C_1x(t) - D_{21}w(t), \overline{B} = \begin{bmatrix} B & D_{d_1} \end{bmatrix}, \overline{u}(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ y_1(t) \end{bmatrix}$. Demonstrația se face folosind ecuațiile (3.38)-(3.41), precum şi matricea de anulare pentru D_{d_2}.

Modelul (3.36) este unul general şi poate fi utilizat pentru estimarea simultană a semi-vectorului de stare (x(t)) şi a vectorului intrărilor necunoscute. Astfel, dacă se con-sideră sistemul [46]

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + F_d d(t) + Df\left(t, x, u\right) + D_1 w(t), \\ y(t) = Cx(t) + G_d d(t) + D_2 w(t), \end{cases} \tag{3.44}$$

unde d(t) este vectorul intrărilor necunoscute ce urmează a fi estimat împreună cu x(t). Utilizând notațiile $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x(t) \\ d(t) \end{bmatrix}, \boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} E & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} A & F_d \end{bmatrix}, \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} C & G_d \end{bmatrix}, F_L = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}$, sistemul (3.44) poate fi adus la forma (3.36); se obține [46]

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + Bu(t) + Df\left(t, F_L\boldsymbol{x}, u\right) + D_1 w(t), \\ y(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + D_2 w(t). \end{cases} \tag{3.45}$$

Pentru proiectarea observerului, se consideră $\phi \in \mathcal{M}^{r_1 \times n_1}$ – o matrice cu rang de linie maxim astfel încât [44]

$$\phi\begin{bmatrix} E & D \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \phi E = 0 \text{ si } \phi D = 0. \tag{3.46}$$

În aceste condiții, înmulțind la stânga prima ecuație (3.36) cu ϕ, rezultă

$$\phi Ax(t) + \phi Bu(t) + \phi D_1 w(t) = 0. \tag{3.47}$$

Dacă se face presupunerea

$$\text{rang}\begin{bmatrix} E \\ \phi A \\ C \end{bmatrix} = n, \tag{3.48}$$

în [46] se demonstrează că sistemul liniar singular (E, A, B, C) este observabil, adică $\operatorname{rang}\begin{bmatrix} E & A \\ 0 & C \\ 0 & E \end{bmatrix} = n + \operatorname{rang} E$, dacă şi numai dacă este îndeplinită condiția (3.48). Întrucât s-a făcut deja această presupunere, se poate concluziona că sistemul (3.36) este observabil (condiție necesară pentru construirea unui estimator de stare).

3.5.3. PROIECTAREA OBSERVERULUI

Se urmăreşte proiectarea unui observer pentru sistemul (3.36) utilizându-se metoda H_∞. În [46], pentru estimarea vectorului de stare asociat sistemului (3.36), se proiectează observerul

$$\begin{cases} \dot{\zeta}(t) = N\zeta(t) + Jy(t) + Hu(t) + TDf\,(t, F_L\hat{x}, u), \\ \hat{x}(t) = P\zeta(t) - Q\phi Bu(t) + Fy(t), \end{cases} \tag{3.49}$$

cu $\zeta(0) = \zeta_0$. Vectorul $\zeta(t) \in \mathcal{M}^{q\times 1}$ este vectorul de stare al observerului, iar $\hat{x}(t) \in \mathcal{M}^{n\times 1}$ – vectorul de stare estimat. Matricele N, J, H, T, Q, P şi F urmează a fi determinate astfel încât, pentru $w(t) = 0$, eroarea de estimare $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ converge asimptotic la zero şi pentru $w(t) \neq 0, e(t) \to 0$.

Se consideră [46]

$$\varepsilon(t) = \zeta(t) - TEx(t); \tag{3.50}$$

dinamica erorii $\varepsilon(t)$ se calculează utilizând ecuațiile (3.36) şi (3.49); se obține [46]

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}(t) = \dot{\zeta}(t) - TE\dot{x}(t) = N\varepsilon(t) + (NTE - TA + JC)x(t) + (H - TB)u(t) + \\ + TD\Delta f + (JD_2 - TD_1)w(t), \end{aligned} \tag{3.51}$$

în care $\Delta f = f\,(t, F_L\hat{x}, u) - f\,(t, F_L x, u)$. De asemenea, eliminând $\zeta(t)$ între a doua ecu-ație (3.49) şi ecuația (3.50) şi ținând seama de relația (3.47), rezultă

$$\hat{x}(t) = P\varepsilon(t) + PTEx(t) - Q\phi Bu(t) + FCx(t) + FD_2 w(t) \Leftrightarrow$$
$$\hat{x}(t) = P\varepsilon(t) + \begin{bmatrix} P & Q & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} TE \\ \phi A \\ C \end{bmatrix} x(t) + (Q\phi D_1 + FD_2) w(t). \tag{3.52}$$

Dacă, pe lângă presupunerea (3.48), sunt valabile şi relațiile

$$NTE - TA + JC = 0, N = TB, \begin{bmatrix} P & Q & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} TE \\ \phi A \\ C \end{bmatrix} = I, \tag{3.53}$$

ecuațiile (3.51) şi (3.52) devin [46]

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}(t) = N\varepsilon(t) + TD\Delta f + (JD_2 - TD_1) w(t), \\ e(t) = P\varepsilon(t) + (Q\phi D_1 + FD_2) w(t). \end{cases} \tag{3.54}$$

Cu notațiile $\varphi_1 = JD_2 - TD_1$ şi $\varphi_2 = Q\phi D_1 + FD_2$, ecuațiile (3.54) devin [46]

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}(t) = N\varepsilon(t) + TD\Delta f + \varphi_1 w(t), \\ e(t) = P\varepsilon(t) + \varphi_2 w(t). \end{cases} \tag{3.55}$$

În continuare, se determină cele 7 matrice necunoscute (N, J, H, P, Q, F şi T) astfel încât condițiile (3.53) să fie satisfăcute şi efectul vectorului perturbațiilor asupra erorii de estimare a observerului să fie minimizat.

3.5.3.1. Condiții de stabilitate

Problema proiectării unui observer H_∞ poate fi formulată astfel [46]: Pentru un sistem neliniar singular având dinamica (3.36) şi un nivel al zgomotului $\gamma > 0$, trebuie determinat un observer de forma (3.49) astfel încât: 1) sistemul erorilor (3.55) să fie stabil; 2) în condiții inițiale nule, norma L2 a vectorului eroare e(t) este mai mică ca norma L2 a vectorului w(t) ponderată cu nivelul de zgomot γ, adică $\|e(t)\|_2 < \gamma \|w(t)\|_2$.

În ceea ce priveşte analiza stabilității sistemului (3.55), în [46] se arată că stabilitatea asimptotică a lui $\varepsilon(t)$ este suficientă pentru ca $\lim_{t \to \infty} e(t) = 0$ întrucât, pentru w(t)=0, se obține $e(t)=P\varepsilon(t)$. De asemenea, stabilitatea lui e(t), pentru w(t)=0, este verificată dacă există matricele pozitiv definite X şi Π care verifică inegalitatea matriceal-liniară (LMIs)

$$\begin{cases} \Pi < I, \\ \begin{bmatrix} N^T X + XN + \lambda^2 P^T F_L^T F_L P & XTD \\ (TD)^T X & -\Pi \end{bmatrix} < 0. \end{cases} \tag{3.56}$$

Pentru demonstrație [46], se consideră funcția Lyapunov $V(t)=\varepsilon^T(t)X\varepsilon(t)$ şi se derivează aceasta în raport cu timpul; rezultă

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \dot{\varepsilon}(t)X\varepsilon(t)+\varepsilon^T(t)X\dot{\varepsilon}(t) \overset{(3.55)}{=} [N\varepsilon(t)+TD\Delta f]^T X\varepsilon(t)+\varepsilon^T(t)X[N\varepsilon(t)+TD\Delta f]= \\ &= \varepsilon^T(t)\left[N^T X + XN\right]\varepsilon(t)+\Delta f^T (TD)^T X\varepsilon(t)+\varepsilon^T(t)XTD\Delta f + \underbrace{\Delta f^T \Pi \Delta f}_{\le \Delta f^T I \Delta f} - \Delta f^T \Pi \Delta f \le \\ &\le \varepsilon^T(t)\left[N^T X + XN\right]\varepsilon(t)+\Delta f^T (TD)^T X\varepsilon(t)+\varepsilon^T(t)XTD\Delta f + \underbrace{\Delta f^T \Delta f}_{\le \lambda^2 \varepsilon^T P^T F_L^T F_L P\varepsilon} - \Delta f^T \Pi \Delta f \le \\ &\le \begin{bmatrix} \varepsilon(t) \\ \Delta f \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} N^T X + XN + \lambda^2 P^T F_L^T F_L P & XTD \\ (TD)^T X & -\Pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon(t) \\ \Delta f \end{bmatrix}; \end{aligned} \tag{3.57}$$

Pentru a demonstra că $\Delta f^T \Delta f \le \lambda^2 \varepsilon^T P^T F_L^T F_L P\varepsilon$, se particularizează (3.37) pentru $x_1=\hat{x}$ şi $x_2=x$ şi rezultă

$$\left\| f(t,F_L\hat{x},u)-f(t,F_L x,u)\right\| \le \lambda \left\| F_L(\hat{x}-x)\right\| \Leftrightarrow \left\|\Delta f\right\| \le \lambda \left\| F_L e\right\|; \tag{3.58}$$

deoarece $\left\|\Delta f^T \Delta f\right\| = \left\|\Delta f\right\|^2 \le \lambda^2 \left\|F_L e\right\|^2 \le \lambda^2 \left\|F_L e^T\right\| \cdot \left\|F_L e\right\| \le \lambda^2 \left\|F_L \varepsilon^T P^T\right\| \cdot \left\|F_L P\varepsilon\right\|$, se obține $\Delta f^T \Delta f \le \lambda^2 \varepsilon^T P^T F_L^T F_L P\varepsilon$. S-a demonstrat, aşadar, că $\dot{V}(t)<0$; este, deci, îndeplinită LMI (3.56). Mai mult, în [46], se arată că inegalitatea matriceal liniară (3.56), pentru orice scalar $\mu>0$, este echivalentă cu

$$\begin{bmatrix} N^T X + XN + \lambda^2 \mu P^T F_L^T F_L P & XTD \\ (TD)^T X & -\mu I \end{bmatrix} < 0. \tag{3.59}$$

Demonstrația se face alegând $\Pi=\mu I$ şi $0<\mu<1$ [46].

3.5.3.2. Proiectarea observerului H_∞

În cadrul acestui paragraf, este prezentată procedura de proiectare a observerului H_∞. Următoarea teoremă furnizează condițiile suficiente pentru ca sistemul (3.55) să fie stabil pentru w(t)=0 şi $\|e(t)\|_2 < \gamma\|w(t)\|_2$ pentru $w(t) \neq 0$.

<u>TEOREMA 3.1</u> **[46]**

Lucrând cu presupunerea (3.48), dinamica (3.55) este asimptotic stabilă pentru w(t)=0 şi $\|e(t)\|_2 < \gamma\|w(t)\|_2$ pentru $w(t) \neq 0$ dacă există matricele simetrice şi pozitiv definite X şi Π astfel încât, pentru matricele T, N, P, φ_1 şi φ_2, sunt îndeplinite simultan condițiile

$$\begin{cases} \Pi < I, \\ \Sigma = \begin{bmatrix} N^T X + XN + P^T \rho P & X(TD) & X\varphi_1 + P^T \rho \varphi_2 \\ (TD)^T X & -\Pi & 0 \\ \varphi_1^T X + \varphi_2^T \rho P & 0 & \varphi_2^T \rho \varphi_2 - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \end{cases} \tag{3.60}$$

unde $\rho = I + \lambda^2 F_L^T F_L$.

<u>DEMONSTRAȚIE</u> **[46]**

Mai întâi, se observă că dacă $\Sigma < 0$, din teorema Schur, se obține inecuația matriceal-liniară (3.56), deci sistemul (3.55) este stabil pentru w(t)=0. În cazul în care $w(t) \neq 0, \dot{V}(t)$ devine [46]

$$\begin{aligned} &\dot{V}(t) = \dot{\varepsilon}(t) X \varepsilon(t) + \varepsilon^T(t) X \dot{\varepsilon}(t) = [N\varepsilon(t) + TD\Delta f + \varphi_1 w(t)]^T X\varepsilon(t) + \\ &+ \varepsilon^T(t) X\,[N\varepsilon(t) + TD\Delta f + \varphi_1 w(t)] = \varepsilon^T(t)\left[N^T X + XN\right]\varepsilon(t) + \Delta f^T (TD)^T X\varepsilon(t) + \\ &+ \varepsilon^T(t) X (TD)\Delta f + w^T(t)\varphi_1^T X\varepsilon(t) + \varepsilon^T(t) X\varphi_1 w(t) + \underbrace{\Delta f^T \Pi \Delta f}_{\leq \Delta f^T \Delta f} - \Delta f^T \Pi \Delta f \\ &\leq \varepsilon^T(t)\left[N^T X + XN\right]\varepsilon(t) + \Delta f^T (TD)^T X\varepsilon(t) + \varepsilon^T(t) X (TD)\Delta f + w^T(t)\varphi_1^T X\varepsilon(t) + \\ &+ \varepsilon^T(t) X\varphi_1 w(t) + \lambda^2 e^T F_L^T F_L e - \Delta f^T \Pi \Delta f \leq \varepsilon^T(t)\left[N^T X + XN\right]\varepsilon(t) + \Delta f^T (TD)^T X\varepsilon(t) + \\ &+ \varepsilon^T(t) X (TD)\Delta f + w^T(t)\varphi_1^T X\varepsilon(t) + \varepsilon^T(t) X\varphi_1 w(t) + \lambda^2 e^T F_L^T F_L e - \Delta f^T \Pi \Delta f\,. \end{aligned} \tag{3.61}$$

Utilizând notația $\eta = \begin{bmatrix} \varepsilon(t) \\ \Delta f \\ w(t) \end{bmatrix}$, ecuația (3.61) şi a doua ecuație (3.55), rezultă

$$\dot{V} + e^T e - \gamma^2 w^T w \le \eta^T \Sigma \eta; \tag{3.62}$$

dacă $\Sigma < 0$ (LMI (3.60)), inecuația (3.62) devine $\dot{V} \le \gamma^2 w^T w - e^T e$, care, integrată între 0 şi ∞, conduce la [46]

$$\int_0^\infty \dot{V}(\tau)\mathrm{d}\tau < \int_0^\infty \gamma^2 w^T(\tau) w(\tau)\mathrm{d}\tau - \int_0^\infty e^T(\tau) e(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{3.63}$$

echivalentă cu

$$V(\infty) - V(0) < \gamma^2 \|w(t)\|_2^2 - \|e(t)\|_2^2. \tag{3.64}$$

În condiții inițiale nule, se obține

$$V(\infty) < \gamma^2 \|w(t)\|_2^2 - \|e(t)\|_2^2 \Leftrightarrow \|e(t)\|_2^2 < \gamma^2 \|w(t)\|_2^2. \tag{3.65}$$

Determinarea matricelor observerului se face utilizând, în principal, ecuațiile (3.53); cu notația $\widetilde{T} = T + \psi\phi$, unde ψ este o matrice aleasă aleator, ecuațiile (3.53) devin

$$\begin{bmatrix} N & \psi & J \\ P & Q & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{T}E \\ \phi A \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{T}A \\ I_n \end{bmatrix}. \tag{3.66}$$

Ecuația (3.66) are soluție dacă şi numai dacă este îndeplinită condiția [46]

$$\operatorname{rang} \begin{bmatrix} \widetilde{T}E \\ \phi A \\ C \\ \widetilde{T}A \\ I_n \end{bmatrix} = \operatorname{rang} \begin{bmatrix} \widetilde{T}E \\ \phi A \\ C \end{bmatrix} = n. \tag{3.67}$$

Deoarece s-a făcut presupunerea (3.48), rezultă $\operatorname{rang}\begin{bmatrix}\widetilde{T}E\\ \phi A\\ C\end{bmatrix}=\operatorname{rang}\begin{bmatrix}E\\ \phi A\\ C\end{bmatrix}=n$. Fie acum R – o matrice cu rang de linie maxim aleasă aleator astfel încât

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix}R\\ \phi A\\ C\end{bmatrix}=\operatorname{rang}\begin{bmatrix}E\\ \phi A\\ C\end{bmatrix}=\operatorname{rang}\begin{bmatrix}\widetilde{T}E\\ \phi A\\ C\end{bmatrix}=n; \tag{3.68}$$

În [46] se arată că există întotdeauna matricele K şi $\widetilde{T}$ astfel încât

$$\widetilde{T}E=R-K\begin{bmatrix}\phi A\\ C\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\widetilde{T} & K\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E\\ \phi A\\ C\end{bmatrix}=R. \tag{3.69}$$

Soluţia ecuaţiei (3.69) este [46]

$$\begin{bmatrix}\widetilde{T} & K\end{bmatrix}=R\begin{bmatrix}E\\ \phi A\\ C\end{bmatrix}^{+}, \tag{3.70}$$

ecuaţie echivalentă cu

$$\widetilde{T}=R\begin{bmatrix}E\\ \phi A\\ C\end{bmatrix}^{+}\begin{bmatrix}I\\ 0\end{bmatrix},K=R\begin{bmatrix}E\\ \phi A\\ C\end{bmatrix}^{+}\begin{bmatrix}0\\ I\end{bmatrix}. \tag{3.71}$$

Aşadar, se poate acum determina soluţia ecuaţiei (3.66) [46]:

$$\begin{bmatrix}N & \psi & J\\ P & Q & F\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\widetilde{T}A\\ I_n\end{bmatrix}\Omega^{+}-\begin{bmatrix}Y_1\\ Y_2\end{bmatrix}\left(I-\Omega\Omega^{+}\right), \tag{3.72}$$

în care $\Omega=\begin{bmatrix}\widetilde{T}E\\ \phi A\\ C\end{bmatrix}$ şi $\begin{bmatrix}Y_1\\ Y_2\end{bmatrix}$ – matrice aleasă în mod aleator. Cu notaţiile:

$$\Lambda_P = \Omega^+ \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \Lambda_Q = \Omega^+ \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix}, \Lambda_F = \Omega^+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}, \Lambda_N = \tilde{T}A\Lambda_P, \Lambda_\psi = \tilde{T}A\Lambda_Q,$$
$$\Lambda_J = \tilde{T}A\Lambda_F, \Delta_N = \left(I - \Omega\Omega^+\right) \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \Delta_\psi = \left(I - \Omega\Omega^+\right) \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix}, \Delta_J = \left(I - \Omega\Omega^+\right) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} \tag{3.73}$$

ecuațiile (3.72) devin [46]

$$\begin{aligned} & N = \Lambda_N - Y_1\Delta_N, \psi = \Lambda_\psi - Y_1\Delta_\psi, \\ & J = \Lambda_J - Y_1\Delta_J, P = \Lambda_P - Y_2\Delta_N, \\ & Q = \Lambda_Q - Y_2\Delta_\psi, F = \Lambda_F - Y_2\Delta_J. \end{aligned} \tag{3.74}$$

Cu acestea, se obțin

$$\varphi_1 = \Lambda_{\varphi_1} - Y_1\Delta_{\varphi_1}, \varphi_2 = \Lambda_{\varphi_2} - Y_2\Delta_{\varphi_2}, TD = \Lambda_{TD} - Y_1\Delta_{TD}, \tag{3.75}$$

în care

$$\begin{aligned} & \Lambda_{\varphi_1} = \Lambda_J D_2 - \tilde{T}D_1 - \Lambda_\psi \phi D_1, \Delta_{\varphi_1} = \Delta_J D_2 - \Delta_\psi \phi D_1, \\ & \Lambda_{\varphi_2} = \Lambda_Q \phi D_1 + \Lambda_F D_2, \Delta_{\varphi_2} = \Delta_Q \phi D_1 - \Delta_J D_2, \\ & \Lambda_{TD} = \tilde{T}D + \Lambda_\psi \phi D, \Delta_{TD} = \Delta_\psi \phi D. \end{aligned} \tag{3.76}$$

În cazul standard (E=I), rezultă $\phi = 0$ şi presupunera (3.48) este întotdeauna verificată. Rezultatele obținute pot fi aplicate în cadrul proiectării observerelor cu ordin întreg şi cu ordin redus.

3.6. PROIECTAREA OBSERVERELOR PENTRU SISTEME CU INCERTITUDINI DETERMINISTE ŞI STOCHASTICE

3.6.1. INTRODUCERE

Inconvenientul utilizării observerelor este legat de faptul că erorile acestora pot fi interpretate ca alarme false. Cauza o reprezintă incertitudinile în cadrul sistemelor, acestea putând fi grupate după cum urmează: incertitudini deterministe şi incertitudini stochastice. Prima categorie este legată de eroarea de estimare inițială, eroarea de modelare şi bias, în timp ce incertitudinile stochastice includ zgomote albe sau zgomote ale senzorilor. Deoarece observerele sunt afectate de ambele tipuri de incertitudini, în etapa de proiectare a observerului, acestea trebuie luate în considerație. Observere ce iau în considerație incertitudinile deterministe au fost proiectate de Spugeon (1990) [198], Bhattacharyya 1976 [23], Stefani 1982 [199], Huh & Stein (1994) [90], Shafai & Carrol (1985) [191] etc. Observere ce iau în calcul incertitudinile stochastice au fost proiectate de-a lungul ultimelor decenii de către Bernstein & Haddad (1989) [20], Chen & Zhou (2002) [35] (filtre H_2 / H_∞), Pettersen & Fcfarlane (1994) [182], Xie & Soh (1994) [223], Fu & co. (2001) [68], Shaked & co. (2001) [192] etc. (filtre robuste de tip Kalman); aceste metode garantează mărginirea erorri medii pătratice a observerului [109].

3.6.2. PROIECTAREA OBSERVERULUI

Se consideră un sistem liniar, variabil în timp, descris de ecuațiile [109]

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + \Delta A)x + Bu + w, \\ y = Cx + v, \end{cases} \tag{3.77}$$

unde $x \in \mathcal{M}^{n\times 1}, u \in \mathcal{M}^{m\times 1}, y \in \mathcal{M}^{p\times 1}$ sunt, respectiv, vectorii de stare, intrare şi ieşire ai sistemului; ΔA este incertitudine deterministă, iar vectorii w şi v sunt incertitudini stochastice ce se consideră a fi necorelate. Se notează cu $Q \in \mathcal{M}^{n\times n}$ şi $R \in \mathcal{M}^{p\times p}$ – matricele de covarianță asociate acestor vectori. De asemenea, se consideră că perechea (A, C) este observabilă. În aceste condiții, se poate construi observerul [109]

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B(u + \delta u) + L(y + \delta y - C\hat{x}), \tag{3.78}$$

în care L este matricea de amplificare a sistemului, δu şi δy sunt biasurile de măsurare asociate intrărilor (u) şi ieşirilor (y); acestea pot fi interpretate ca semnale deterministe.

Scăzând membru cu membru ecuațiile (3.77) şi (3.78), se obține dinamica erorii

$$\dot{e} = (A - LC)e + w - Lv + \Delta Ax - B\delta u - L\delta y, \tag{3.79}$$

unde $e = x - \hat{x}$ este eroarea de estimare a observerului.

Dacă sistemul nu ar fi afectat de semnale deterministe, dinamica erorii observerului ar fi

$$\dot{e} = (A - LC)e + w - Lv; \tag{3.80}$$

în [109] se arată că dacă matricea (A-LC) este asimptotic stabilă, matricea de covarianță a erorii staționare (notată mai jos cu X) este soluția ecuației Lyapunov [111]

$$(A - LC)X + X(A - LC)^T + Q + LRL^T = 0, \tag{3.81}$$

cu soluția [109]

$$X = \int_0^\infty e^{(A-LC)t}\left(Q + LRL^T\right)e^{(A-LC)^T t}\,\mathrm{d}t; \tag{3.82}$$

matricea X se mai numeşte şi gramian de controlabilitate, variația erorii observerului măsurându-se prin [109]

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(X) = \mathrm{tr}\left[\left(Q + LRL^T\right)\int_0^\infty e^{(A-LC)t}\left(Q + LRL^T\right)e^{(A-LC)^T t}\,\mathrm{d}t\right] \le \\ \le \mathrm{tr}\left(Q + LRL^T\right)\cdot \lambda_{\max}\left[\int_0^\infty e^{(A-LC)^T t}\,e^{(A-LC)t}\,\mathrm{d}t\right]; \end{aligned} \tag{3.83}$$

aceasta reprezintă suma elementelor de pe diagonala principală a matricei de covarianță.

Considerând un scalar pozitiv α, limita superioară a variației erorii observerului este exprimată prin intermediul relației [109]

$$\mathrm{tr}(X) \le \mathrm{tr}\left(Q + LRL^T\right)\cdot \int_0^\infty e^{-2\alpha t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{tr}\left(Q + LRL^T\right)\cdot \frac{1}{2\alpha}. \tag{3.84}$$

α se numeşte marginea inferioară a ratei de scădere a observerului; altfel spus, viteza de convergență a matricei (A-LC) este cel puțin α. Aşadar, limita superioară $(\mathrm{tr}(X))$ poate fi minimizată prin maximizarea lui α şi minimizarea lui L. De aceea, α şi L se consideră factori de robustețe stochastică pentru observer [109].

Robustețea deterministă a fost studiată în [90]. În cadrul acestei lucrări a fost definit indicatorul

$$\mu(V) = \|V\|_2 \|V^{-1}\|_2, \tag{3.85}$$

unde $\mu(V)$ este o funcție de matricea vectorilor proprii ai observerului (V) (vectorii proprii asociați matricei A-LC). Se arată în [90] că numărul de condiționare $\mu(V)$ este factor de robustețe deterministă, el trebuind minimizat pentru asigurarea unei robusteți deterministe; o valoare mare a acestui factor echivalează cu sensibilitate mare a observerului la condiții inițiale, erori de modelare sau biasuri, în timp ce o valoare mai mică a acestui factor echivalează cu o influență redusă a incertitudinilor deterministe asupra procesului de estimare a stării.

Pentru a asigura atât robustețe stochastică cât şi robustețe deterministă, este nevoie de maximizarea limitei inferioare a ratei observerului (α), minimizarea amplificării observerului (L), precum şi de minimizarea indicatorului $\mu(V)$. Este însă nevoie şi de obținerea unor relații între factorii de robustețe şi amplificarea observerului, deci a unor relații între α şi L, pe de o parte, şi α şi $\mu(V)$, pe de altă parte. În [109] şi [90] se precizează că numărul de condiționare nu poate fi exprimat explicit ca funcție de amplificarea observerului şi nici invers, dar acest număr de condiționare are o limită superioară ce poate fi modificată prin modificarea valorilor proprii asociate matricei (A-LC). Mai mult, această limită superioară este o funcție crescătoare de raportul

$$\beta = \frac{\|M\|_F}{\min\limits_{i \neq j} |\lambda_i - \lambda_j|}, \tag{3.86}$$

unde M se numeşte matrice de nenormalitate şi este o sub-matrice a matricei diagonale ce se calculează în funcție de transformarea Schur. Numărătorul din ecuația (3.86) reprezintă norma Frobenius a matricei M, iar $\min_{i \neq j} \left| \lambda_i - \lambda_j \right|$ reprezintă distanța minimă între valorile proprii. În locul calculului numărului de condiționare, raportul (3.86) este utilizat pentru a obține o dependență de amplificarea observerului pentru robustețea deterministă.

În [109] este formulată o teoremă pentru condiția de stabilitate asociată estimatorului de stare; condiția de stabilitate a observerului se bazează pe teoria Lyapunov [29], [89] şi este cuprinsă în cadrul următoarei teoreme:

TEOREMA 3.2 **[109]**

Pentru constantele δ_1, δ_2 şi v0, există o matrice de amplificare a observerului (L) ce stabilizează dinamica erorii (3.80) dacă există $P > 0, \tau_1 \geq 0, \tau_2 \geq 0$ astfel încât

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA - C^T C + P & P & -\frac{1}{2}C^T \\ P & -\tau_1 I & 0 \\ -\frac{1}{2}C & 0 & -\tau_2 I \end{bmatrix} < 0 \tag{3.87}$$

şi

$$\tau_1 \delta_1 + \tau_2 \delta_2 < v_0 . \tag{3.88}$$

În aceste condiții, observerul este descris de ecuația (3.78), cu

$$L = \frac{1}{2} P^{-1} C^T . \tag{3.89}$$

DEMONSTRAȚIE **[109]**

Se consideră funcția Lyapunov

$$v(e,t) = e^T(t) P e(t), \tag{3.90}$$

cu P – matrice simetrică şi pozitiv definită. Condiția de stabilitate pentru convergența la zero a erorii observerului este $\dot{v}(e,t) < 0$, aceasta devenind [109]

$$e^T\left[(A-LC)^T P+P(A-LC)\right]e+w^T Pe+e^T Pw-v^T L^T Pe-e^T PLv<0. \tag{3.91}$$

Dacă se presupune că zgomotele w şi v satisfac condiţiile

$$w^T w\leq \delta_1, v^T v\leq \delta_2, \tag{3.92}$$

adică normele zgomotelor procesului şi a celor de măsurare sunt mărginite, relaţiile (3.92) sunt echivalente cu $\mathrm{tr}(Q)\leq S_1$ şi $\mathrm{tr}(R)\leq S_2$. În cadrul demonstraţiei, se presupune şi că funcţia Lyapunov este mărginită inferior, adică

$$v(e,t)\geq v_0, \tag{3.93}$$

unde v0 este o constantă pozitivă. De aici rezultă că dinamica erorii este stabilă în domeniul $\{|e|\geq v_0/\lambda_{\max}(P)\}$ dacă $\dot{v}(e,t)<0$ [109]. Dacă se foloseşte procedura din [29] şi se introduce o nouă variabilă $S=L^T P$, inegalităţile (3.91), (3.92) şi (3.93) pot fi com-binate şi rezultă o nouă inegalitate de tipul

$$\begin{bmatrix} e \\ w \\ v \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T P+PA-C^T S-S^T C+\tau_3 P & P & -S^T \\ P & -\tau_1 I & 0 \\ -S & 0 & -\tau_2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ w \\ v \end{bmatrix} +\tau_1\delta_1+\tau_2\delta_2-\tau_3 v_0<0 \tag{3.94}$$

pentru $\tau_1\geq 0, \tau_2\geq 0$ şi $\tau_3\geq 0$. Inegalitatea (3.94) este echivalentă cu [109]

$$\begin{bmatrix} A^T P+PA-C^T S-S^T C+P & P & -S^T & 0 \\ -S^T C+\tau_3 P & -\tau_1 I & 0 & 0 \\ -S & 0 & -\tau_2 I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau_1\delta_1+\tau_2\delta_2-\tau_3 v_0 \end{bmatrix}<0. \tag{3.95}$$

Inegalitatea (3.95) este echivalentă cu următoarele 2 inegalităţi matriceal-liniare [109]

$$\begin{bmatrix} A^T P+PA-C^T S-S^T C+\tau_3 P & P & -S^T \\ P & -\tau_1 I & 0 \\ -S & 0 & -\tau_2 I \end{bmatrix}<0, \tau_1\delta_1+\tau_2\delta_2<v_0; \tag{3.96}$$

fără micşorarea generalităţii, s-a ales $\tau_3=1$. Bazându-ne pe teorema lui Finsler [29],

[89], în cadrul lucrării [109] a fost eliminată matricea S din ecuația (3.96) şi s-a obținut

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA - \sigma C^T C + P & P & -\frac{\sigma}{2} C^T \\ P & -\tau_1 I & 0 \\ -\frac{\sigma}{2} C & 0 & -\tau_2 I \end{bmatrix} < 0, \tag{3.97}$$

în care, fără micşorarea generalității, se poate alege $\sigma = 1$, obținându-se astfel inegalitatea (3.87). Demonstrația teoremei 3.2 este acum completă. Proiectarea observerului (3.78) nu este însă completă fără rezolvarea problemei de optimizare legată de termenii de robustețe deterministă şi stochastică. Aşadar, scopul procesului de optimizare este minimizarea amplificării observerului, maximizarea limitei inferioare şi minimizarea indicatorului de robustețe deterministă $\mu(V)$ - ecuația (3.85) [109].

Pentru început, problema minimizării amplificării observerului poate fi rezolvată prin minimizarea valorii singulare maxime a matricei de amplificare. Cum L depinde de P^{-1} (ecuația (3.89)), minimizarea lui L este echivalentă cu maximizarea valorilor proprii minime ale matricei P, ceea ce înseamnă maximizarea unei noi variabile k astfel încât $P > kI$ [29]. Bazându-se pe această proprietate, autorii lucrării [109] au formu-lat problema minimizării matricei L sub forma unei probleme de maximizate a varia-bilei k (teorema 3.3).

<u>TEOREMA 3.3</u> **[109]**

Pentru constantele δ_1, δ_2 şi v0, există o matrice de amplificare a observerului (L) ce stabilizează dinamica erorii (3.80) dacă este maximizat k, în condițiile

$$P = P^T > kI, \tau_1 \geq 0, \tau_2 \geq 0, k > 0, \tau_1\delta_1 + \tau_2\delta_2 < v_0 \tag{3.98}$$

şi

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA - C^T C + P & P & -\frac{1}{2} C^T \\ P & -\tau_1 I & 0 \\ -\frac{1}{2} C & 0 & -\tau_2 I \end{bmatrix} < 0; \tag{3.99}$$

în aceste condiții, matricea L se determină tot prin intermediul ecuației (3.89).

Pentru maximizarea limitei superioare a ratei observerului (α), se utilizează condițiile de stabilitate din [29]. Astfel, dacă este îndeplinită condiția [109]

$$\dot{v}(e,t) \leq -2\alpha v(e,t) \tag{3.100}$$

pentru orice traiectorie, funcția Lyapunov converge exponențial cu o viteză cel puțin egală cu 2α, iar viteza de scădere a erorii este cel puțin egală cu α. În plus, cea mai mare valoare pentru limita superioară poate fi determinată prin rezolvarea unei probleme optimale de maximizare a lui α [29].

În al treilea rând, este nevoie şi de minimizarea indicatorului de robustețe deterministă $\mu(V)$. Matricea vectorilor proprii V se obține din analiza modală a matricei observerului şi este determinată în mod unic de către P. Astfel, indicatorul de robustețe $\mu(V)$ poate fi ales ca funcție obiectiv şi minimizat.

În [109] este formulată o teoremă ce însumează optimizarea tuturor celor 3 funcții obiectiv prezentate anterior (teorema 3.4).

<u>TEOREMA 3.4</u> **[109]**

Pentru constantele δ_1, δ_2 şi v0, există o matrice de amplificare a observerului (L) ce minimizează cele 3 funcții obiectiv şi stabilizează dinamica erorii (3.80) dacă se poate minimiza $\frac{w_1\mu(V)}{\mu(V)^*} - \frac{(1-w_1)k}{k^*}$, în condițiile

$$P = P^T - kI > 0, \tau_1 \geq 0, \tau_2 \geq 0, k > 0, \tau_1\delta_1 + \tau_2\delta_2 - v_0 < 0 \tag{3.101}$$

şi

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA - C^T C + (2\alpha + 1)P & P & -\frac{1}{2}C^T \\ P & -\tau_1 I & 0 \\ -\frac{1}{2}C & 0 & -\tau_2 I \end{bmatrix} < 0, \tag{3.102}$$

unde $0 \leq w_1 \leq 1$. Matricea vectorilor proprii V este obținută din analiza modală a matricei observerului $A-\frac{1}{2}P^{-1}C^{T}C$, iar matricea de amplificare a observerului rezultat se calculează tot prin intermediul ecuației (3.89). Valorile țintă $\mu(V)^{*}$ şi t^{*} sunt introduse pentru normalizarea funcțiilor obiectiv, acestea alegându-se ca valori dorite pentru fiecare funcție obiectiv în parte.

Alegerea valorilor țintă depinde de cerințele de estimare. De exemplu, dacă acuratețea de estimare este mai importantă ca erorile şi biasurile de modelare, valoarea țintă pentru $\mu(V)^{*}$ se alege aproape de 1 pentru asigurarea robusteței deterministe.

3.7. METODE OPTIMALE PENTRU DETERMINAREA MATRICEI DE AMPLIFICARE A OBSERVERELOR

În cadrul procesului de proiectare a estimatoarelor de stare, există numeroase metode pentru determinarea matricei de amplificare a observerului, scopul principal fiind asigurarea stabilității asimptotice a erorii. Dintre aceste metode, cele mai importante sunt: tehnica poziționării polilor [37], [138], [172], [209], metoda ecuațiilor algebrice Lyapunov [102], [126], metoda inegalităților matriceal liniare [11], [202], [207], şi metoda optimizării prin minimizarea unui indicator pătratic de calitate [26], [151]. Întrucât acest indicator de calitate este construit în funcție de un sistem dual, acesta nu exprimă performanțele reale ale observerului, chiar dacă rezultatele obținute sunt satisfăcătoare.

3.7.1. DETERMINAREA AMPLIFICĂRII OPTIMALE FOLOSIND SISTEME DUALE

Se consideră sistemul

$$\begin{cases} \dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t), \\ y(t)=Cx(t)+Du(t), \end{cases} \tag{3.103}$$

unde $x(t)\in\mathcal{M}^{n\times 1}$ este vectorul de stare, $u(t)\in\mathcal{M}^{p\times 1}$ – vectorul intrărilor, $y(t)\in\mathcal{M}^{m\times 1}$ –

vectorul ieşirilor, iar matricele A, B, C, D sunt matrice constante. Presupunând că perechea (A, C) este observabilă, se poate construi observerul Luenberger pentru sistemul (1) de forma [10]

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L[y(t) - \hat{y}(t)], \\ y(t) = C\hat{x}(t) + Du(t), \end{cases} \tag{3.104}$$

unde $\hat{x}(t) \in \mathcal{M}^{n\times 1}$ este vectorul de stare estimat, iar $L \in \mathcal{M}^{n\times m}$ este matricea de amplificare a observerului.

Dinamica erorii observerului $(e(t) = x(t) - \hat{x}(t))$ este de forma

$$\dot{e}(t) = A_0 e(t), \tag{3.105}$$

unde $A_0 = A - LC$. Printre tehnicile de determinare a matricei L se numără şi minimizarea indicatorului pătratic de calitate [10]

$$\bar{J} = \int_0^\infty \left[\bar{e}^T(t) Q \bar{e}(t) + \bar{u}^T(t) R \bar{u}(t)\right] \mathrm{d}t \tag{3.106}$$

cu $Q = Q^T \geq 0$ şi $R = R^T > 0$.

Pentru sistemele duale, se scrie [26]

$$\dot{\bar{e}}(t) = \bar{A}\bar{e}(t) + \bar{B}\bar{u}(t), \tag{3.107}$$

unde $\bar{A} = A^T$ şi $\bar{B} = C^T$. Minimizarea lui $\bar{J}$ conduce la obținerea matricei

$$L = \overline{M} C^T R^{-1}, \tag{3.108}$$

în care $\overline{M} = \overline{M}^T > 0$ este soluția ecuației matriceale algebrice Riccati

$$\overline{M} A^T + A\overline{M} - \overline{M} C^T R^{-1} C \overline{M} = -Q. \tag{3.109}$$

Dezavantajul acestei metode este acela că $\bar{J}$, care a fost minimizat, nu are o interpretare fizică directă în raport cu eroarea e(t). În cele ce urmează, este prezentată o metodă de optimizare ce exprimă performanțele dorite ale estimatorului de stare în funcție de di-namica erorii [10].

3.7.2. DETERMINAREA MATRICEI DE AMPLIFICARE PENTRU OBSERVERELE CU ORDIN ÎNTREG

Dinamica erorii (3.105) poate fi pusă sub forma [10]

$$\begin{cases} \dot{e}(t) = Ae(t) + \varepsilon(t), \\ \mu(t) = Ce(t) \\ \varepsilon(t) = -L\mu(t), \end{cases} \tag{3.110}$$

în care $\varepsilon(t) \in \mathcal{M}^{n\times 1}, \mu(t) \in \mathcal{M}^{m\times 1}; \varepsilon(t)$ este privit în [10] ca reacție negativă după vectorul de ieşire $\mu(t), e(t)$ echivalând, în acest caz, cu starea sistemului. În aceste condiții, indicatorul de calitate ce trebuie minimizat este

$$J = \int_0^\infty \left[e^T(t)Qe(t) + \varepsilon^T(t)R\varepsilon(t)\right]\mathrm{d}t, \tag{3.111}$$

cu Q şi R – matrice simetrice şi pozitiv definite.

Minimizarea lui J poate fi interpretată drept determinarea unui compromis între minimizarea erorii observerului, reprezentată prin termenul $e^T(t)Qe(t)$, şi minimizarea amplificării L, cuprinsă în termenul $\varepsilon^T(t)R\varepsilon(t)$. În aceste condiții, J poate fi scris sub una din formele succesive

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty \left[e^T(t)Qe(t) + (L\mu(t))^T R(L\mu(t))\right]\mathrm{d}t = \int_0^\infty \left[e^T(t)Qe(t) + \mu^T(t)L^T RL\mu(t)\right]\mathrm{d}t = \\ &= \int_0^\infty \left[e^T(t)Qe(t) + e^T(t)C^T L^T RLCe(t)\right]\mathrm{d}t = \int_0^\infty \left[e^T(t)\left(Q + C^T L^T RLC\right)e(t)\right]\mathrm{d}t = \\ &= \int_0^\infty \left[e^T(t)F(L)e(t)\right]\mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{3.112}$$

unde $F(L) = Q + C^T L^T RLC$. Utilizând acum soluția ecuației (3.105), adică $e(t) = e^{A_0 t}e_0$, în care $e_0 = e(0)$, ultima formă a ecuației (3.112) devine [10]

$$J = \int_0^\infty \left[e_0^T e^{A_0^T t} F(L) e^{A_0 t} e_0 \right] \mathrm{d}t, \tag{3.113}$$

expresie ce poate fi scrisă sub forma

$$J = \mathrm{tr}\left[M \quad e_0 e_0^T\right], \tag{3.114}$$

cu $M = \int_0^\infty \left[e^{A_0^T t} F(L) e^{A_0 t} \right] \mathrm{d}t$ şi $\mathrm{tr}\left[M \quad e_0 e_0^T\right]$– urma matricei $\left[M \quad e_0 e_0^T\right]$. Pe de altă parte, $A_0^T M + MA_0 = \int_0^\infty \left[A_0^T e^{A_0^T t} F(L) e^{A_0 t} + e^{A_0^T t} F(L) e^{A_0 t} A_0 \right] \mathrm{d}t$; de aceea, matricea M satisface ecuația Lyapunov

$$S(L, M) = A_0^T M + MA_0 + F(L) = 0. \tag{3.115}$$

Considerând $E\left(e_0 e_0^T\right) = I_n$, indicatorul J şi, implicit, soluția optimală nu vor mai depinde de valoarea lui e0. Condițiile necesare pentru minimizarea indicatorului de calitate (3.114) în raport cu L şi M (soluția ecuației Lyapunov (3.115)) sunt obținute în [10] utilizând operațiile cu gradient pentru Lagrangianul

$$\mathcal{F}(L, M, T) = \mathrm{tr}(M) + \mathrm{tr}\left(T^T S(L, M)\right), \tag{3.116}$$

unde $T \in \mathcal{M}^{n \times n}$ – matricea Lagrangian. Condițiile necesare se scriu $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathcal{L}} = 0, \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial M} = 0,$ $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T} = 0$, acestea conducând la [10]

$$\begin{cases} (RLC - M)TC^T = 0, \\ A_0 T + TA_0^T + I_n = 0, \\ A_0^T M + MA_0 + F(L) = 0. \end{cases} \tag{3.117}$$

Din prima ecuație (3.117) se obține

$$L = R^{-1} MTC^T \left(CTC^T\right)^{-1}, \tag{3.118}$$

matricele M şi T determinându-se, în prealabil, din celelalte 2 ecuații (3.117).

3.7.3. DETERMINAREA MATRICEI DE AMPLIFICARE PENTRU OBSERVERELE CU ORDIN REDUS

Sistemul descris de ecuațiile (3.103), cu presupunerile $\text{rang}(C) = m$ şi $D = 0_{m\times p}$, devine [26]

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t) + B_1u(t), \\ \dot{x}_2(t) = A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t) + B_2u(t), \\ y(t) = x_1(t), \end{cases} \tag{3.119}$$

în care $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, A_{11} \in \mathcal{M}^{m\times m}, B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, B_1 \in \mathcal{M}^{m\times p}, x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, x_1(t) \in \mathcal{M}^{m\times 1}$, $C = \begin{bmatrix} I_m & 0_{m\times(n-m)} \end{bmatrix}$; aşadar, ieşirile sistemului sunt componentele vectorului de stare $x_1(t)$ (vector ce nu va fi estimat întrucât este direct măsurabil), componentele vectorului de stare $x_2(t)$ fiind cele ce urmează a fi estimate prin intermediul observerului cu ordin redus. Ecuațiile asociate observerului liniar pentru estimarea vectorului $x_2(t)$ sunt [10]

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \hat{A}_{21}y(t) + \hat{A}_{22}z(t) + \hat{B}_2u(t), \\ \hat{x}_2(t) = z(t) + L_2y(t), \end{cases} \tag{3.120}$$

în care L2 este matricea de amplificare a observerului cu ordin redus, iar matricele $\hat{A}_{21}, \hat{A}_{22}$ şi $\hat{B}_2$ se exprimă în funcție de L2 după cum urmează [10]

$$\hat{A}_{22} = A_{22} - L_2A_{12}, \hat{A}_{21} = A_{21} + A_{22}L_2 - L_2A_{11} - L_2A_{12}L_2, \hat{B}_2 = B_2 - L_2B_1. \tag{3.121}$$

Dinamica erorii $e_2(t)$ (expresia lui $\dot{e}_2(t)$) este $\dot{e}_2(t) = (A_{22} - L_2A_{12})e_2(t) = \hat{A}_{22}e_2(t)$, unde L2 – matrice ce trebuie determinată optimal astfel încât $\lim_{t\to\infty} e_2(t) = 0, (\forall)e_2(0)$. În multe lucrări, determinarea lui L2 se face utilizând tehnica poziționării polilor; în [10], L2 se determină prin rezolvarea unei probleme optimale, adică prin minimizarea indicatorului pătratic de calitate

$$J_2 = \int_0^\infty \left[e_2^T(t) Q_2 e_2(t) + \varepsilon_2^T(t) R_2 \varepsilon_2(t) \right] \mathrm{d}t, \tag{3.122}$$

unde Q_2 şi R_2 sunt matrice simetrice şi pozitiv definite, iar $\varepsilon_2(t)$ şi $e_2(t)$ joacă rolul lui $\varepsilon(t)$ şi, respectiv, $e(t)$ din paragraful anterior; astfel, dinamica erorii observerului cu ordin redus se scrie

$$\begin{cases} \dot{e}_2(t) = A_{22} e_2(t) + \varepsilon_2(t), \\ \mu_2(t) = A_{12} e_2(t) \\ \varepsilon_2(t) = -L_2 \mu_2(t). \end{cases} \tag{3.123}$$

Se observă o analogie cu cazul proiectării optimale a observerelor cu ordin întreg; aici, A22 joacă rolul lui A, L2 joacă rolul lui L, iar A12 pe cel al matricei C. Utilizând din nou paşii algoritmului anterior, rezultă [10]

$$L_2 = R_2^{-1} M_2 T_2 A_{12}^T \left(A_{12} T_2 A_{12}^T \right)^{-1}, \tag{3.124}$$

în care M2 şi T2 sunt soluțiile sistemului neliniar

$$\begin{cases} \left(R_2 L_2 A_{12} - M_2 \right) T_2 A_{12}^T = 0, \\ \hat{A}_{22} T_2 + T_2 \hat{A}_{22}^T + I_{n-m} = 0, \\ \hat{A}_{22}^T M_2 + M_{222} \hat{A}_{22} + F(L_2) = 0, \end{cases} \tag{3.125}$$

în care $F(L_2) = Q_2 + A_{12}^T L_2^T R_2 L_2 A_{12}, T_2 \in \mathcal{M}^{(n-m)\times(n-m)}$ – matrice Lagrangian asociată observerului cu ordin redus (3.120), iar $M_2 = \int_0^\infty \left[e^{\hat{A}_{22}^T t} F(L_2) e^{\hat{A}_{22} t} \right] \mathrm{d}t$ – soluția ecuației Lyapunov $S(L_2, M_2) = \hat{A}_{22}^T M_2 + M_2 \hat{A}_{22} + F(L_2) = 0$ [10]. Matricele L şi M, pentru obser-verele cu ordin întreg, respectiv L2 şi M2, pentru observerele cu ordin redus, pot fi calculate în Matlab/Simulink utilizând funcția fmincon. Deoarece rezolvarea siste-melor (3.117) şi (3.125) se face iterativ, este nevoie de valori inițiale pentru matricele M şi M2; în [10], aceste valori inițiale se aleg identice cu $\overline{M}$ şi $\overline{M}_2$, adică cu soluțiile ecuațiilor Lyapunov

$$\overline{M}A^T + A\overline{M} - \overline{M}C^T R^{-1} C\overline{M} = -Q, \overline{M}_2 A_{22}^T + A_{22}\overline{M}_2 - \overline{M}_2 A_{12}^T R_2^{-1} A_{12}\overline{M}_2 = -Q_2. \quad (3.126)$$

3.8. PROIECTAREA OPTIMALĂ A OBSERVERELOR ALUNECĂTOARE

Observerele alunecătoare diferă de observerele Luenberger printr-un termen de injecție (discontinuitate liniară) ce depinde de eroarea de estimare a ieşirii. Acest tip de observer este mai robust decât observerele Luenberger deoarece termenul de tip discontinuitate permite observerului să respingă (anuleze) perturbațiile sistemului. Termenul de injecție este proiectat astfel încât eroarea de estimare a stării să aparțină unei anumite suprafețe din spațiul erorilor. În majoritatea cazurilor, această suprafață, numită şi suprafață de alunecare, este aleasă ca fiind diferența dintre ieşirea observerului şi ieşirea sistemului; de aceea, aceasta trebuie să fie zero. Utkin (1992) a proiectat un observer simplu cu reacție doar după termenul de tip discontinuitate [211]; Walcott & Zak (1987) au proiectat un observer cu reacție după eroarea de estimare a ieşirii, metoda Lyapunov fiind apoi utilizată pentru a demonstra stabilitatea estimatorului de stare [216]. Edwards & Spurgeon (1994) au propus o formă canonică pentru observerele alunecătoare, precum şi condițiile ce dau legătura dintre matricele de distribuție asociate intrării, respectiv ieşirii [58]. Unul dintre cei mai performanți algoritmi de proiectare a observerelor alunecătoare a fost propus de Tan & Edwards (2001). În cadrul lucrării acestor autori [203], este prezentată o metodă de proiectare a observerelor alunecătoare utilizând inegalitățile matriceal-liniare, fiind demonstrată o relație între componenta liniară a observerului alunecător şi un sub-observer optimal ce ia naştere din teoria lini-ară quadratică Gaussiană [203]. Metodologia de proiectare a observerului alunecător Tan & Edwards este prezentată în continuare.

3.8.1. CHESTIUNI PRELIMINARE

Se consideră sistemul dinamic

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + D\xi(t, x, u), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \quad (3.127)$$

unde $A \in \mathcal{M}^{n\times n}, B \in \mathcal{M}^{n\times m}, C \in \mathcal{M}^{p\times n}$ şi $D \in \mathcal{M}^{n\times q}\,(p \geq q)$. Se presupune că matricele C şi D au rang maxim şi $\xi : R_+ \times \mathcal{M}^{n\times 1} \times \mathcal{M}^{m\times 1} \to \mathcal{M}^{q\times 1}$ este un termen necunoscut dar mărginit [203]

$$\|\xi(t, x, u)\| \leq r_1 \|u\| + \alpha(t, y), \tag{3.128}$$

în care r1 este o constantă cunoscută, iar $\alpha : R_+ \times \mathcal{M}^{p\times 1} \to R_+$ este o funcție cunoscută.

Se consideră observerul de forma [203]

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) - G_l e_y(t) + G_n v\,, \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t), \end{cases} \tag{3.129}$$

unde $G_l \in \mathcal{M}^{n\times p}$ şi $G_n \in \mathcal{M}^{n\times p}$. Vectorul de tip discontinuitate v se defineşte astfel [203]

$$v = \begin{cases} -\rho(t, y, u)\|D_2\|\left(P_2 e_y / \|P_2 e_y\|\right), \text{ daca } e_y \neq 0, \\ 0, \text{ daca } e_y = 0, \end{cases} \tag{3.130}$$

unde $e_y = \hat{y} - y; P_2 \in \mathcal{M}^{p\times p}$ – matrice simetrică şi pozitiv definită, iar $D_2 \in \mathcal{M}^{p\times q}$ satisface condiția [203]

$$\rho(t, y, u) \geq r_1\|u\| + \alpha(t, y) + \gamma_0\,, \tag{3.131}$$

cu γ_0 – scalar pozitiv. Notând eroarea de estimare cu $e = \hat{x} - x$, din ecuațiile (3.127) şi (3.129), se obține

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \dot{\hat{x}}(t) - \dot{x}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) - G_l e_y(t) + G_n v - Ax(t) - Bu(t) - D\xi(t, x, u) = \\ &= A_0 e(t) + G_n v - D\xi(t, x, u), \end{aligned} \tag{3.132}$$

unde $A_0 = A - G_l C$.

Pentru un sistem dinamic cu forma generală $\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx + Du$, zerourile invariante sunt valorile complexe ale numărului complex „s” pentru care rangul matricei $F = \begin{bmatrix} A - sI & B \\ C & D \end{bmatrix}$ scade față de valoarea sa normală; valoarea normală a rangului matricei F este rangul pentru valori ale lui „s” altele decât zerourile de transmisie (caz particular al zerourilor invariante).

Utilizând conceptul enunțat mai sus (zerouri invariante ale unui sistem), în [58] se demonstrează că există 2 condiții necesare şi suficiente pentru existența unei mişcări de alunecare stabile pe $\mathcal{S} = \left\{ e \in \mathcal{M}^{n\times 1} : e_y = Ce = 0 \right\}$, suprafață ce depinde de ξ; aces-tea sunt:

1) $\operatorname{rang}(CD) = q$;

2) zerourile invariante ale tripletului (A, D, C) se află poziționate în semiplanul stâng complex.

Matricele G_l, G_n şi P_2 trebuie determinate astfel încât mişcarea de alunecare să se realizeze pe $\mathcal{S}$; de aceea, în continuare, se consideră că cele 2 condiții enunțate anterior sunt îndeplinite. În [58] s-a demonstrat că dacă matricea (CD) are rang maxim, există o schimbare de coordonate, realizată prin intermediul unei matrice T_0, astfel încât sistemul descris de ecuațiile (3.127) se poate scrie

$$\begin{cases} \dot{\overline{x}}(t) = \overline{A}\overline{x}(t) + \overline{B}u(t) + \overline{D}\xi(t,x,u), \\ y(t) = \overline{C}\overline{x}(t), \end{cases} \tag{3.133}$$

cu $\overline{x} = T_0 x$, iar tripletul $\left(\overline{A}, \overline{D}, \overline{C}\right)$ are următoarea structură [203]

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} \overline{A}_{11} & \vdots & \overline{A}_{12} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \overline{A}_{211} & \vdots & \overline{A}_{22} \\ \overline{A}_{212} & & \end{bmatrix}, \overline{A}_{11} = \begin{bmatrix} \overline{A}_{11}^0 & \overline{A}_{12}^0 \\ 0 & \overline{A}_{22}^0 \end{bmatrix}, \overline{A}_{211} = \begin{bmatrix} 0 & \overline{A}_{21}^0 \end{bmatrix}, \overline{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ D_2 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \overline{D}_2 \end{bmatrix}, \overline{C} = \begin{bmatrix} 0 & T \end{bmatrix}, \tag{3.134}$$

cu $\overline{A}_{11} \in \mathcal{M}^{(n-p)\times(n-p)}, \overline{A}_{211} \in \mathcal{M}^{(n-q)\times(n-p)}, \overline{A}_{11}^0 \in \mathcal{M}^{r\times r}, \overline{A}_{21}^0 \in \mathcal{M}^{(p-q)\times(n-p-r)}, r \geq 0$, perechea $\left(\overline{A}_{22}^0, \overline{A}_{21}^0\right)$ este observabilă, $\overline{D}_2 \in \mathcal{M}^{q\times q}$ – nesingulară, $T \in \mathcal{M}^{p\times p}$ – ortogonală $\left(T^T = T^{-1}\right)$.

3.8.2. PROIECTAREA OBSERVERULUI ALUNECĂTOR

Aplicând schimbarea de coordonate T0 observerului descris de ecuațiile (3.129), se obține [203]

$$\begin{cases} \dot{\hat{\bar{x}}}(t) = \bar{A}\hat{\bar{x}}(t) + \bar{B}u(t) - \bar{G}_l e_y(t) + \bar{G}_n v, \\ \hat{y}(t) = \bar{C}\hat{\bar{x}}(t); \end{cases} \tag{3.135}$$

se definește $\bar{A}_0 = \bar{A} - \bar{G}_l\bar{C}$. Matricea $\bar{G}_l$ urmează a fi determinată și se presupune că

$$\bar{G}_n = \begin{bmatrix} -\bar{L}T^T \\ T^T \end{bmatrix}, \tag{3.136}$$

unde $\bar{L} \in \mathcal{M}^{(n-p)\times p}$ și $\bar{L} = [L \quad 0]$, cu $L \in \mathcal{M}^{(n-p)\times(p-q)}$ [203].

<u>TEOREMA 3.5</u> **[203]**

Dacă există o matrice pozitiv definită $\bar{P}$, ce satisface $\overline{PA_0} + \bar{A}_0^T\bar{P} < 0$ și a cărei formă este

$$P = \begin{bmatrix} \bar{P}_1 & \bar{P}_1\bar{L} \\ \bar{L}^T\bar{P}_1 & \bar{P}_2 + \bar{L}^T\bar{P}_1\bar{L} \end{bmatrix} > 0, \tag{3.137}$$

unde $\bar{P}_1 \in \mathcal{M}^{(n-p)\times(n-p)}$ și $\bar{P}_2 \in \mathcal{M}^{p\times p}$, atunci dinamica erorii (3.132) este quadratic stabilă.

<u>DEMONSTRAȚIE</u> **[109]**

Se consideră funcția Lyapunov

$$\mathcal{V}(\bar{e}) = \bar{e}\bar{P}\bar{e}, \tag{3.138}$$

în care $\bar{e} = T_0 e$. Dacă $\bar{P}_1 > 0$ și $\bar{P}_2 > 0$, din teorema Schur rezultă $\bar{P} > 0$ [203]. Derivând $\mathcal{V}(\bar{e})$, se obține

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{V}} &= \bar{e}^T\left(\overline{PA_0}\bar{e} + \overline{PD}\xi\right) + \left(\bar{e}^T\bar{A}_0^T + v^T\bar{G}_n^T - \xi^T D^T\right)\bar{P}\bar{e} = \\ &= \bar{e}^T\left(\overline{PA_0} + \bar{A}_0^T\bar{P}\right)\bar{e} + 2\bar{e}^T\bar{P}\bar{G}_n v - 2\bar{e}^T\overline{PD}\xi; \end{aligned} \tag{3.139}$$

s-a ținut cont de egalitatea constantelor $2\bar{e}^T\bar{P}\bar{G}_n v = \left(2\bar{e}^T\bar{P}\bar{G}_n v\right)^T = v^T\bar{G}_n^T\bar{P}^T\bar{e}$. Din ecuațiile (3.134), (3.136) și (3.137), rezultă [203]

$$\overline{P}\overline{G}_n = \begin{bmatrix} \overline{P}_1 & \overline{P}_1\overline{L} \\ \overline{L}^T\overline{P}_1 & \overline{P}_2 + \overline{L}^T\overline{P}_1\overline{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\overline{L}T^T \\ T^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \overline{P}_2 T^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ T^T T\overline{P}_2 T^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ T^T \end{bmatrix} P_2 = \overline{C} P_2, \tag{3.140}$$

unde $P_2 = T\overline{P}_2 T^T$. Folosind structura matricelor $\overline{L}$ şi D_2, rezultă $\overline{L}D_2 = 0$ şi se obţine

$$\begin{aligned} \overline{P}\overline{D} &= \begin{bmatrix} \overline{P}_1 & \overline{P}_1\overline{L} \\ \overline{L}^T\overline{P}_1 & \overline{P}_2 + \overline{L}^T\overline{P}_1\overline{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{P}_1\overline{L}D_2 \\ \overline{P}_2 D_2 + \overline{L}^T\overline{P}_1\overline{L}D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \overline{P}_2 D_2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ T^T P_2 T D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ T^T \end{bmatrix} P_2 T D_2 = C^T P_2 \mathcal{D}_2, \end{aligned} \tag{3.141}$$

în care $\mathcal{D}_2 = TD_2$; de asemenea, $\|\mathcal{D}_2\| = \|D_2\|$.

În continuare, ţinând cont de egalitatea $e_y = \hat{y} - y = \overline{C}\hat{\overline{x}} - \overline{C}\overline{x} = \overline{C}\left(\hat{\overline{x}} - \overline{x}\right) = \overline{C}\overline{e}$, de definiţia vectorului discontinuitate (3.130), de expresiile (3.140) şi (3.141), ecuaţia (3.139) capătă forma

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{V}} &= \overline{e}^T\left(\overline{A}_0^T\overline{P} + \overline{P}\overline{A}_0\right)\overline{e} + 2e_y^T P_2 v - 2e_y^T P_2 \mathcal{D}_2 \xi \le \\ &\le \overline{e}^T\left(\overline{A}_0^T\overline{P} + \overline{P}\overline{A}_0\right)\overline{e} - 2\rho\|\mathcal{D}_2\|\|P_2 e_y\| - 2e_y^T P_2 \mathcal{D}_2 \xi. \end{aligned} \tag{3.142}$$

Utilizând mărginirea termenului $\xi(t, x, u)$ (ecuaţia (3.128)), rezultă [203]

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{V}} &\le \overline{e}^T\left(\overline{A}_0^T\overline{P} + \overline{P}\overline{A}_0\right)\overline{e} - 2\rho\|\mathcal{D}_2\|\|P_2 e_y\| - 2\|\mathcal{D}_2\|\left(r_1\|u\| + \alpha\right)\|P_2 e_y\| \le \\ &\le \overline{e}^T\left(\overline{A}_0^T\overline{P} + \overline{P}\overline{A}_0\right)\overline{e} - 2\gamma_0\|\mathcal{D}_2\|\|P_2 e_y\| \end{aligned} \tag{3.143}$$

în care $\gamma_0 = \rho + r_1\|u\| + \alpha > 0$. Întrucât $\overline{A}_0^T\overline{P} + \overline{P}\overline{A}_0 < 0$, rezultă $\dot{\mathcal{V}} \le 0 (\forall)\overline{e} \ne 0$ şi teo-rema 5 [203] este acum complet demonstrată.

În [203] se demonstrează că dinamica de alunecare este furnizată de matricea $\overline{A}_{11} + L\overline{A}_{211}$; de asemenea, deoarece perechea $\left(\overline{A}_{11}, \overline{A}_{211}\right)$ este detectabilă (ecuaţia (3.134)), există o familie de matrice $L \in \mathcal{M}^{(n-p)\times(p-q)}$ astfel încât $\overline{A}_{11} + L\overline{A}_{211}$ este stabilă. Dacă se efectuează o nouă schimbare de coordonate

$$T_L = \begin{bmatrix} I_{n-p} & \overline{L} \\ 0 & T \end{bmatrix} \tag{3.144}$$

pentru tripletul $\left(\overline{A}, \overline{D}, \overline{C}\right)$ şi matricea Lyapunov $\overline{P}\left(\overline{A} \to \mathcal{A}, \overline{D} \to \mathcal{D}, \overline{C} \to \mathcal{C}\right)$, rezultă

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{11} & \mathcal{A}_{12} \\ \mathcal{A}_{21} & \mathcal{A}_{22} \end{bmatrix}, \mathcal{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{D}_2 \end{bmatrix}, \mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0 & I_p \end{bmatrix}, \tag{3.145}$$

în care $\mathcal{A}_{11} = \overline{A}_{11} + L\overline{A}_{211}$ şi $\mathcal{D}_2 = TD_2$; conversia $\overline{P} \to \mathcal{P}$ conduce la matricea [203]: $\mathcal{P} = \left(T_L^{-1}\right)^T \overline{P}\left(T_L^{-1}\right)$ sau

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} \overline{P}_1 & 0 \\ 0 & T\overline{P}_2 T^T \end{bmatrix}. \tag{3.146}$$

Prin poziționarea noului vector eroare, se obține $\begin{bmatrix} e_1^T & e_y^T \end{bmatrix}^T$, cu $e_1 \in \mathcal{M}^{(n-p)\times 1}$; vectorul eroare e1 este asociat cu mişcarea de alunecare cu ordin redus. În [58] se demonstrează că $\mathcal{A}_{11}$ este stabilă şi, deci, mişcarea de alunecare este stabilă.

3.8.3. DETERMINAREA MATRICELOR $\overline{P}$ ŞI $\overline{G}_l$

În cadrul acestui paragraf, $\overline{P}$ şi $\overline{G}_l$ sunt determinate astfel încât [203]

$$\overline{A}_0^T \overline{P} + \overline{P}\overline{A}_0 < -\overline{P}W\overline{P} - \overline{P}\overline{G}_l V \overline{G}_l \overline{P}, \tag{3.147}$$

matricele W şi V – matrice simetrice şi pozitiv definite, iar $\overline{P}$ – de forma (3.137). Înlocuind în (3.147) pe $\overline{A}_0$ cu $\overline{A} - \overline{G}_l\overline{C}$, inegalitatea (3.147) devine

$$\begin{aligned} &\left(\overline{A} - \overline{G}_l\overline{C}\right)^T \overline{P} + \overline{P}\left(\overline{A} - \overline{G}_l\overline{C}\right) < -\overline{P}W\overline{P} - \overline{P}\overline{G}_l V \overline{G}_l^T \overline{P} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \overline{A}^T \overline{P} - \overline{C}^T \overline{G}_l^T \overline{P} + \overline{P}\overline{A} - \overline{P}\overline{G}_l\overline{C} < -\overline{P}W\overline{P} - \overline{P}\overline{G}_l V \overline{G}_l^T \overline{P} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \overline{A}^T \overline{P} + \overline{P}\overline{A} - \left(\overline{Y}\,\overline{C}\right)^T + \overline{P}W\overline{P} + \overline{Y}V\overline{Y}^T < 0, \end{aligned} \tag{3.148}$$

unde s-a făcut notația $\overline{Y} = \overline{P}\overline{G}_l$. În [203] se arată că (3.148) este echivalentă cu

$$\overline{A}^T \overline{P} + \overline{P}\overline{A} + \left(\overline{Y}^T - V^{-1}\overline{C}\right)^T V \left(\overline{Y}^T - V^{-1}\overline{C}\right) - \overline{C}^T V^{-1} \overline{C} + \overline{P}W\overline{P} < 0; \tag{3.149}$$

o condiție necesară şi suficientă pentru a fi îndeplinită inegalitatea (3.149) şi, implicit, (3.148) este [203]

$$\overline{A}^T\overline{P}+\overline{P}\overline{A}+\overline{C}^T V^{-1}\overline{C}+\overline{P}W\overline{P}<0 \tag{3.150}$$

dacă şi numai dacă se alege

$$\overline{Y}^T=V^{-1}\overline{C}. \tag{3.151}$$

Deoarece $\overline{Y}=\overline{P}\overline{G}_l$, dacă se minimizează $\mathrm{tr}\left(\overline{P}^{-1}\right)$ şi dacă $\overline{P}$ verifică inegalitatea (3.150), se poate determina uşor $\overline{G}_l$ astfel:

$$\overline{G}_l=\overline{P}^{-1}\overline{C}^T V^{-1}. \tag{3.152}$$

Inegalitatea matriceal-liniară (3.150), utilizând teorema Schur, se scrie

$$\begin{bmatrix}\overline{A}^T\overline{P}+\overline{P}\overline{A}+\overline{C}^T V^{-1}\overline{C} & \overline{P}\\ \overline{P} & -W^{-1}\end{bmatrix}<0. \tag{3.153}$$

Considerând $\overline{X}\in\mathcal{M}^{n\times n}$ – o matrice simetrică şi pozitiv definită, inecuația matriceal-liniară (LMI)

$$\begin{bmatrix}-\overline{P} & I\\ I & -\overline{X}\end{bmatrix}<0 \tag{3.154}$$

este echivalentă cu $\overline{X}>\overline{P}^{-1}$; în acest caz, minimizarea lui $\mathrm{tr}\left(\overline{P}^{-1}\right)$, în condițiile verificării LMI (3.150) este echivalentă cu minimizarea lui $\mathrm{tr}\left(\overline{X}\right)$ în condițiile verificării inegalităților matriceal-liniare (3.153) şi (3.154). Inegalitatea (3.137) poate fi scrisă şi sub forma [203]

$$\overline{P}=\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12}\\ P_{12}^T & P_{22}\end{bmatrix}>0, \tag{3.155}$$

unde $P_{11}\in\mathcal{M}^{(n-p)\times(n-p)}, P_{22}\in\mathcal{M}^{p\times p}$ şi $P_{12}=\begin{bmatrix}P_{121} & 0\end{bmatrix}$ cu $P_{121}\in\mathcal{M}^{(n-p)\times(p-q)}$; relațiile de legătură sunt următoarele: $\overline{P}_1=P_{11}, \overline{L}=P_{11}^{-1}P_{121}$ şi $\overline{P}_2=P_{22}-P_{12}^T P_{11}^{-1}P_{12}$. În aceste con-diții, problema de minimizare reprezintă o problemă de optimizare convexă în raport cu

P_{11}, P_{121}, P_{22} şi $\overline{X}$. Aşadar, se doreşte minimizarea lui $\mathrm{tr}\left(\overline{X}\right)$ în raport cu variabilele P_{11}, P_{121}, P_{22} şi $\overline{X}$ în condițiile verificării inegalităților matriceal-liniare (3.153), (3.154) şi (3.155).

Cu schimbarea de coordonate (3.144), $\overline{G_l} \to \mathcal{G}_l$, care este de forma (3.152), adică $\mathcal{G}_l = \mathcal{P}^{-1} C^T V^{-1}$, se arata că [203]

$$\mathcal{G}_l = \begin{bmatrix} 0 \\ T\overline{P}_2^{-1} T^T V^{-1} \end{bmatrix}. \tag{3.156}$$

Motivația alegerii inegalității (3.147) şi minimizării $\mathrm{tr}\left(\overline{P}^{-1}\right)$, în condițiile verificării (3.150) şi (3.154), este că, în absența incertitudinilor $(\gamma_0 \to 0)$, observerul are o structură LQG (Linear Quadratic Gaussian). Pentru a demonstra acest lucru, se defineşte $\overline{Q} = \overline{P}^{-1}$ şi se înmulțeşte la stânga şi apoi la dreapta inegalitatea (3.150) cu $\overline{Q}$; se obține [203]

$$\overline{A}\,\overline{Q} + \overline{Q}\,\overline{A}^T - \overline{Q}\,\overline{C}^T V^{-1} \overline{C}\,\overline{Q} + W < 0; \tag{3.157}$$

obiectivul este minimizarea lui $\mathrm{tr}\left(\overline{Q}\right)$ în condițiile verificării inegalității (3.157). Metoda standard de proiectare a observerelor optimale LQG este prezentată în [150]; în cadrul metodei, se foloseşte soluția stabilizatoare $\tilde{\tilde{Q}}$ a ecuației algebrice Riccati

$$\overline{A}\,\tilde{\tilde{Q}} + \tilde{\tilde{Q}}\,\overline{A}^T - \tilde{\tilde{Q}}\,\overline{C}^T V^{-1} \overline{C}\,\tilde{\tilde{Q}} + W = 0. \tag{3.158}$$

Cu soluția $\tilde{\tilde{Q}}$ se calculează ulterior $\tilde{\tilde{G}}_l = \tilde{\tilde{Q}}\,\overline{C}^T V^{-1}$. În inegalitatea (3.157), W - matrice de ponderare a observerului, iar V - matrice de covarianță a zgomotelor senzorilor.

<u>TEOREMA 3.6</u> **[203]**

Fie $\overline{Q}$ – matrice simetrică şi pozitiv definită ce satisface inegalitatea (3.157); fie, de asemenea, $\tilde{\tilde{Q}}$ – soluția ecuației Riccati (3.158). În acest caz, $\overline{Q} > \tilde{\tilde{Q}}$ şi, deci, $\mathrm{tr}\left(\overline{Q}\right) > \mathrm{tr}\left(\tilde{\tilde{Q}}\right)$. Demonstrația teoremei 3.6 este prezentată în [203].

ANEXE

ANEXA A1.1

```
% Proiectarea observerelor utilizand metoda Bass-Gura (miscarea longitudinala n=4,s=1)
clear all;run prog2sec;close all;
clear A;clear B;clear C;clear D;clear e;clear ee;clear R;clear r1;clear contor;
% Declararea matricelor sistemului
A=[-0.007 0.012 -9.81 0;-0.128 -0.54 0 1;0 0 0 1;0.065 0.96 0 -0.99];
B=[0;-0.04;0;-12.5];C=[0 0 1 0];
n=size(A,1);m=size(B,2);s=size(C,1);
x0=[100;1;0;10];                % Starea initiala (x0)
xc0=[70;0;-5;2];                % Starea initiala a observerului (xc0)
q1=-1;q2=-2;q3=-3;q4=-4;        % Valorile proprii dorite ale observerului
OB=obsv(A,C);                   % Calculul matricei de observabilitate
r1=rank(OB);                    % Calculul rangului matricei de observabilitate
% Calculul polinoamelor caracteristice asociate matricelor A si Ac
a=(poly(A))';
ac=[1 -(q1+q2+q3+q4) (q1*q2+q1*q3+q1*q4+q2*q3*q2*q4+q3*q4) (-q3*q4*(q1+q2)-q1*q2*(q3+q4)) (q1*q2*q3*q4)]';
Dif=ac(2:length(ac))-a(2:length(a));            % Dif=ac-a
% Calculul matricei asociate observerului
Ta=[1 0 0 0;a(2) 1 0 0;a(3) a(2) 1 0;a(4) a(3) a(2) 1]
L=(inv(Ta*OB))*Dif
Aobs=A-L*C;eig(Aobs);
% Simularea schemei fara controler (K=0)
K=zeros(m,n);sim('Sch_Bass_Gura');
subplot(221);plot(t,x1-xc1);grid;subplot(222);plot(t,x2-xc2);grid;
```

```
subplot(223);plot(t,x3-xc3);grid;subplot(224);plot(t,x4-xc4);grid;
% Simularea schemei cu controler (K=K)
K=KK;sim('Sch_Bass_Gura');h=figure;
subplot(221);plot(t,x1,'b',t,xc1,'r--');grid;subplot(222);plot(t,x2,'b',t,xc2,'r--');grid;
subplot(223);plot(t,x3,'b',t,xc3,'r--');grid;subplot(224);plot(t,x4,'b',t,xc4,'r--');grid;
```

ANEXA A1.2

```
% Observer cu ordin redus de tip Luenberger - miscarea longitudinala (n=4,m=1)
clear all;run prog2sec;close all;clear A;clear B;clear C;clear D;
clear e;clear ee;clear R;clear r1;clear contor;clear i;KK=K;
% Declararea matricelor sistemului
A=[-0.007 0.012 -9.81 0;-0.128 -0.54 0 1;0 0 0 1;0.065 0.96 0 -0.99];B=[0;-0.04;0;-
12.5];
n=size(A,1);m=size(B,2);C=[eye(2) zeros(2)];s=size(C,1);D=zeros(s,m);
pp=eig(A-B*K);        % Valorile proprii ale sistemul in circuit inchis (A-B*K)
% Pasul 1: Calculul lui p si partitionarea matricelor A, B si C
p=rank(C);
A11=A(1:p,1:p);A12=A(1:p,(p+1):n);A21=A((p+1):n,1:p);A22=A((p+1):n,(p+1):n);
B1=B(1:p,1:m);B2=B((p+1):n,1:m);C1=C(:,1:p);C2=C(:,(p+1):n);
% Pasul 2: Calculul matricei T
T=[C1 C2;zeros(p) eye(n-p)];
r_T=rank(T);          % rangul matricei T trebuie sa fie n=rank(A)
if r_T~=rank(A)
   disp('Observerul nu poate fi construit');
end
% Pasul 3: Caclulul matricelor Ab11, Ab12, Ab21, Ab22, Bb1, Bb2, Ab, Bb, Cb
Ab11=(C1*A11+C2*A21)*(inv(C1));Ab12=-Ab11*C2+C1*A12+C2*A22;
Ab21=A21*(inv(C1));Ab22=A22-A21*(inv(C1))*C2;
Bb1=C1*B1+C2*B2;Bb2=B2;
```

```
Ab=[Ab11 Ab12;Ab21 Ab22];Bb=[Bb1;Bb2];Cb=[eye(p) zeros(n-p)];
% Pasul 4: Observabilitatea perechii (Ab22,Ab12) si calculul matricei L
OB=obsv(Ab22,Ab12);r_OB=rank(OB);
if r_OB~=p
   disp('Observerul nu poate fi construit');
end
q=[-0.7;-0.7];     % valorilor proprii dorite ale observerului (q)
L=place(Ab22',Ab12',q);L=L';
% Pasul 5: Calculul matricelor Mb, Nb, Pb
Mb=Ab22-L*Ab12;Nb=Bb2-L*Bb1;
Pb=Ab21+Ab22*L-L*Ab11-L*Ab12*L;
% Pasii 6,7: Constructia observerului
x0=[10;1;0;2];xb0=T*x0;zc0=zeros(p,1);     % x(0), xb(0) si zc(0)
% Simularea schemei fara controler (K=0)
K=zeros(m,n);sim('Luenberger_sch_long');
for j=1:size(xc,3);
   xxc1(j)=xc(1,:,j);xxc2(j)=xc(2,:,j);xxc3(j)=xc(3,:,j);xxc4(j)=xc(4,:,j);
   xx1(j)=x(1,:,j);xx2(j)=x(2,:,j);xx3(j)=x(3,:,j);xx4(j)=x(4,:,j);
end
subplot(221);plot(t,xx1,'b',t,xxc1,'r--');grid;subplot(222);plot(t,xx2,'b',t,xxc2,'r--');grid;
subplot(223);plot(t,xx3,'b',t,xxc3,'r--');grid;subplot(224);plot(t,xx4,'b',t,xxc4,'r--');grid;
% Simularea schemei cu controler (K=K)
K=KK;sim('Luenberger_sch_long');h=figure;
for j=1:size(xc,3);
   xxc1(j)=xc(1,:,j);xxc2(j)=xc(2,:,j);xxc3(j)=xc(3,:,j);xxc4(j)=xc(4,:,j);
   xx1(j)=x(1,:,j);xx2(j)=x(2,:,j);xx3(j)=x(3,:,j);xx4(j)=x(4,:,j);
end
subplot(221);plot(t,xx1,'b',t,xxc1,'r--');grid;subplot(222);plot(t,xx2,'b',t,xxc2,'r--');grid;
subplot(223);plot(t,xx3,'b',t,xxc3,'r--');grid;subplot(224);plot(t,xx4,'b',t,xxc4,'r--');grid;
```

ANEXA A1.3

```
% Identificarea miscarii longitudinale (n=4, m=1) folosind filtrul Kalman
clear all;run prog2sec;close all;
clear A;clear B;clear C;clear D;clear e;clear ee;clear R;clear r1;clear contor;clear
L;clear Q;
% Declararea matricelor sistemului
A=[-0.007 0.012 -9.81 0;-0.128 -0.54 0 1;0 0 0 1;0.065 0.96 0 -0.99];
B=[0;-0.04;0;-12.5];C=[0 0 1 0;0 -1 1 0];Bs=B;
n=size(A,1);s=size(B,2);m=size(C,1);N=zeros(s,m);D=zeros(m,m);
w=0.1*rand(s,1);v=0.1*rand(m,1);
% Starile initiale ale vectorului de stare si vect. de stare estimat
x0=[100;1;0;10]; xc0=zeros(n,1);
% Determinarea matricelor P si L folosind filtrul Kalman
Qs=0.01*eye(s);Rs=0.01*eye(m);KK=K;
[L,Ps,E] = LQE(A,Bs,C,Qs,Rs,N)
% Simularea schemei fara controler (K=0)
K=zeros(s,n);sim('Kalm_long_sch');
subplot(221);plot(t,x1-xc1,'r');grid;xlabel('Timp [s]');
subplot(222);plot(t,x2-xc2,'r');grid;xlabel('Timp [s]');
subplot(223);plot(t,x3-xc3,'r');grid;xlabel('Timp [s]');
subplot(224);plot(t,x4-xc4,'r');grid;xlabel('Timp [s]');
% Simularea schemei cu controler (K=K)
K=KK;sim('Kalm_long_sch');h=figure;
subplot(221);plot(t,x1,'b',t,xc1,'r--');grid;xlabel('Timp [s]');
subplot(222);plot(t,x2,'b',t,xc2,'r--');grid;xlabel('Timp [s]');
subplot(223);plot(t,x3,'b',t,xc3,'r--');grid;xlabel('Timp [s]');
subplot(224);plot(t,x4,'b',t,xc4,'r--');grid;xlabel('Timp [s]');
```

ANEXA A1.4

```
% Filtru Kalman - Bucy de tip discret pentru miscarea longitudinala (n=4)
close all;clear all;
% Declararea matricelor sistemului si a zgomotelor albe
A=[-0.007 0.012 -9.81 0;-0.128 -0.54 0 1;0 0 0 1;0.065 0.96 0 -0.99];B=[0;-0.04;0;-
12.5];
C=eye(4);n=size(A,1);m=size(B,2);s=size(C,1);D=zeros(s,m);Bs=B;H=zeros(s,m);
w=0.1*rand(m,m);v=0.1*rand(s,m);
Ts=0.01;sysc=ss(A,B,C,D);Rv=0.01*eye(s);Rw=0.01*eye(m);
% Discretizarea sistemului
sysd=c2d(sysc,Ts,'zoh');[Ad,Bd,Cd,Dd,Ts]=ssdata(sysd);
% Determinarea maticei de amplificare K
R=eye(m);Q=eye(n);[K,S,E]=DLQR(Ad,Bd,Q,R);K1=K;K2=zeros(m,n);
% Initializarea sistemului si observerului
x0=[100;1;0;10];xc0=zeros(4,1);u(1)=0;P=zeros(n);w0=w;
x1(1)=x0(1);x2(1)=x0(2);x3(1)=x0(3);x4(1)=x0(4);
xc1(1)=xc0(1);xc2(1)=xc0(2);xc3(1)=xc0(3);xc4(1)=xc0(4);
x=[x1(1);x2(1);x3(1);x4(1)];xc=[xc1;xc2;xc3;xc4];
% FOR-ul general
for k=2:3000
   xb=Ad*xc+Bd*u(k-1); N=Ad*P*Ad'+Bs*Rw*Bs';
   P=N-N*Cd'*(inv(Cd*N*Cd'+Rv))*Cd*N;
   L0=P*Cd'*(inv(Rv));x=Ad*x+Bd*u(k-1)+Bs*w; y=Cd*x+v;
   x1(k)=x(1);x2(k)=x(2);x3(k)=x(3);x4(k)=x(4);
   xc=Ad*xb+L0*(y-Cd*xb);
   xc1(k)=xc(1);xc2(k)=xc(2);xc3(k)=xc(3);xc4(k)=xc(4);u(k)=-K1*xc;
end
t1=1:length(x1);t=t1*Ts;
```

```
subplot(221);plot(t,x1,t,xc1,'r--');grid;subplot(222);plot(t,x2,t,xc2,'r--');grid;
subplot(223);plot(t,x3,t,xc3,'r--');grid;subplot(224);plot(t,x4,t,xc4,'r--');grid;
h=figure;
subplot(221);plot(t,x1-xc1,'r');grid;subplot(222);plot(t,x2-xc2,'r');grid;
subplot(223);plot(t,x3-xc3,'r');grid;subplot(224);plot(t,x4-xc4,'r');grid;
```

ANEXA A1.5

```
% Observer O'Reilly îmbunătăţit, miscarea longitudinala n=4
clear all;run prog2sec;close all;clear A;clear B;clear C;clear D;clear e;clear ee;clear
R;clear r1;clear contor;clear i;KK=K;
% Declararea matricelor sistemului
A=[-0.007 0.012 -9.81 0;-0.128 -0.54 0 1;0 0 0 1;0.065 0.96 0 -0.99];B=[0;-0.04;0;-
12.5];D=B;
n=size(A,1);p=size(B,2);s=size(D,2);d=randn(s,1);C=eye(2,n);m=size(C,1);
% Pasul 1: Verificarea conditiilor de existenta ale observerului
OB=obsv(A,C);
if s>m | rank(D)~=s | rank(C)~=m | rank(C*D)~=s | rank(OB)~=n
   disp('Observerul nu poate fi construit');
end
% Pasul 2: Calculul matricelor E si P
E=-D*(pinv(C*D));P=eye(n)+E*C;
% Pasul 3: Calculul matricei G
G=P*B;
% Pasul 4: Partitionarea matricelor N,P,L,C,A
P1=P(1:(n-m),1:(n-m));P2=P(1:(n-m),(n-m+1):n);
P3=P((n-m+1):n,1:(n-m));P4=P((n-m+1):n,(n-m+1):n);
A1=A(1:(n-m),1:(n-m));A2=A(1:(n-m),(n-m+1):n);
A3=A((n-m+1):n,1:(n-m));A4=A((n-m+1):n,(n-m+1):n);
C1=C(:,1:(n-m));C2=C(:,(n-m+1):n);
```

```
vp=[1;1;1;1];        % valori proprii necesare ciclului while
while real(vp(1))>0 | real(vp(2))>0 | real(vp(3))>0 | real(vp(4))>0
% Pasul 5: Calculul matricelor A1t,A2t,A3t,A4t
N1=7*randn((n-m),(n-m));N3=2*randn(m,(n-m));
A1t=P1*A1+P2*A3-N1*P1;A2t=P1*A2+P2*A4-N1*P2;
A3t=P3*A1+P4*A3-N3*P1;A4t=P3*A2+P4*A4-N3*P2;
% Pasul 6: Calculul matricelor L1,L2,N2,N4
PP4=pinv(P4);
L1=(A1t-A2t*PP4*P3)*pinv(C1-C2*PP4*P3);L2=(A3t-A4t*PP4*P3)*pinv(C1-
C2*PP4*P3);
N2=(A2t-L1*C2)*PP4;N4=(A4t-L2*C2)*PP4;
% Verificari intermediare
ANS1=N1*P1+N2*P3+L1*C1-P1*A1-P2*A3
ANS2=N1*P2+N2*P4+L1*C2-P1*A2-P2*A4
ANS3=N3*P1+N4*P3+L2*C1-P3*A1-P4*A3
ANS4=N3*P2+N4*P4+L2*C2-P3*A2-P4*A4
% Pasul 7: Calculul matricelor N,L
N=[N1 N2;N3 N4];L=[L1;L2];
% Verificari
M1=N*P+L*C-P*A       % M1 trebuie sa fie zero
M2=G-P*B             % M2 trebuie sa fie zero
M3=(eye(n)+E*C)*D    % M3 trebuie sa fie zero
vp=eig(N)            % matricea N trebuie sa fie stabila
end                  % end while
% Simularea schemei fara controler (K=0)
x0=[100;1;0;10];xc0=zeros(n,1);z0=xc0+E*C*x0;
K=zeros(p,n);sim('OR_L_sch');
subplot(221);plot(t,x1,'b',t,xc1,'r--');grid;subplot(222);plot(t,x2,'b',t,xc2,'r--');grid;
subplot(223);plot(t,x3,'b',t,xc3,'r--');grid;subplot(224);plot(t,x4,'b',t,xc4,'r--');grid;
h=figure;
```

```
subplot(221);plot(t,x1-xc1);grid;subplot(222);plot(t,x2-xc2);grid;
subplot(223);plot(t,x3-xc3);grid;subplot(224);plot(t,x4-xc4);grid;
% Simularea schemei cu controler (K=K)
K=KK;h=figure;sim('OR_L_sch');
subplot(221);plot(t,x1,'b',t,xc1,'r--');grid;subplot(222);plot(t,x2,'b',t,xc2,'r--');grid;
subplot(223);plot(t,x3,'b',t,xc3,'r--');grid;subplot(224);plot(t,x4,'b',t,xc4,'r--');grid;
h=figure;
subplot(221);plot(t,x1-xc1);grid;subplot(222);plot(t,x2-xc2);grid;
subplot(223);plot(t,x3-xc3);grid;subplot(224);plot(t,x4-xc4);grid;
```

ANEXA A1.6

```
% Observer ALGLIN (miscarea longitudinala - 6 variabile de stare)
close all;clear all;
% Introducerea datelor (matricele A,B,C,D din ecuatiile de stare)
A=[-0.444 0.594 -0.362 -9.794 0.000 0.014;-0.983 -7.804 15.322 0.481 0.001 0.000;
0.180 -8.310 -35.203 0.000 -0.000 0.000;0.000 0.000 1.000 0.000 0.000 0.000;
0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000;136.660 2.962 0.000 0.000 0.054 -8.501];
B=1000*[-0.000   0.000;-0.004   0.000;-0.106   0.000;0.000   0.000;0.000   0.000;0.000
3.894];
C=[1.000 0.022 0.000 0.000 0.000 0.000;-0.001 0.059 0.000 0.000 0.000 0.000;
0.000 0.000 1.000 0.000 0.000 0.000;0.000 0.000 0.000 1.000 0.000 0.000];
D=1000*[-0.000   0.000;-0.004   0.000;-0.106   0.000;0.000   0.100;0.000   0.000;0.000
3.894];
n=size(A,1);m=size(C,1);p=size(B,2);s=size(D,2);
Q=0.1*eye(n);R=10*eye(2);[K,P,E] = LQR(A,B,Q,R);KK=K;qq=eig(A-B*K)
% Pasul 1: Verificare rang(C*D)=rang(D)
r1=rank(C*D);r2=rank(D);
if r1~=r2
   disp('Observerul nu poate fi cosntruit');
```

```
end
% Pasul 2: Alegerea matricei N
r3=1;
while r3~=n
N=randn(n,(n-s));T=[N D];r3=rank(T);
Ab=(inv(T))*A*T;Bb=(inv(T))*B;Db=(inv(T))*D;Cb=C*T;
while Db-[zeros((n-s),s);eye(s)]~=zeros(n,s);
   disp('Observerul nu poate fi cosntruit. Trebuie aleasa o alta matrice N');r3=1;
end
% Pasul 3: Calculul matricelor Ab, Bb, Cb, Db, Ab11, Ab12, Ab21, Ab22, Bb1, Bb2,
Cb1, Cb2
Ab11=Ab(1:m,1:m);Ab12=Ab(1:m,m+1:n);
Ab21=Ab(1:(n-m),1:m);Ab22=Ab(1:(n-m),1:(n-m));
Bb1=Bb(1:m,1:p);Bb2=Bb(m+1:n,1:p);Cb1=Cb(1:m,1:m);Cb2=Cb(1:m,m+1:n);
% Pasul 4: Verificare rang Cb2 si determinare H2, R2, K2
if rank(Cb2)-size(Cb2,2)~=0
    disp('Cb2 nu are rang de coloana maxim. Trebuie aleasa o alta matrice N');r3=1;
end
H2=eye(m,n);R2=eye(n-m);R20=[R2;zeros(m,(n-m))];
K2=transpose((pinv(R20))*(pinv(H2))*Cb2);
if rank(R2)~=(n-m) | H2*transpose(H2)~=eye(m)
   disp('Observerul nu poate fi cosntruit. Trebuie aleasa o alta matrice N');r3=1;
end
M_nula=H2*R20*(transpose(K2))-Cb2
% Pasul 5: Partitionarea matricei H2
H21=H2(:,1:(n-m));H22=H2(:,(n-m+1):n);
% Pasul 6: Calculul matricei C1
C1=(transpose(H22))*Cb1;
% Pasul 7: Calculul matrielor At1, Bt1, Et1
Gt=[eye(n-m) zeros((n-m),m)];
```

```
At1=Ab11-Ab12*K2*inv(R2)*Gt*transpose(H2)*Cb1;
Bt1=Bb1;Et1=Ab12*K2*inv(R2)*Gt*transpose(H2);
OB=obsv(At1,C1);
if rank(OB)~=size(At1,1)
   disp('Observerul nu poate fi cosntruit. Trebuie aleasa o alta matrice N');r3=1;
end
% Pasul 8: Se proiecteaza observerul Luenberger
q=1*qq(2:5);      % valorilor proprii dorite ale observerului (q)
L=place(At1',C1',q);L=L';eig(At1-L*C1)
% Pasii 9,10,11: Se proiecteaza observerul Luenberger
U1=K2*(inv(R2))*Gt*(transpose(H2));
U2=K2*R2*Gt*transpose(H2)*Cb1*(L*transpose(H22)+Et1)+
Ab22*K2*(inv(R2))*Gt*transpose(H2);
U3=K2*(inv(R2))*Gt*transpose(H2)*Cb1*(At1-L*C1)+Ab21-
Ab22*K2*(inv(R2))*Gt*transpose(H2)*Cb1;
U4=K2*(inv(R2))*Gt*transpose(H2)*Cb1*Bt1+Bb2;
% Valorile de trimare
Vx0=17;Vy0=3/100;Vz0=3.7/10;                    % Componentele vitezei [m/s]
wx0=0*(pi/180);wy0=0*pi/180;wz0=0*pi/180;       % Componentele vitezei unghiulare
[rad/s]
fi0=0.1*(pi/180);teta0=0.25*(pi/180);psi0=-43.6*(pi/180);        % Unghiurile Euler
[rad]
H0=100;                                          % Altitudinea de zbor
[m]
omega_e0=5.09*100;                               % Viteza unghiulara
elice [grd/s]
delta_e0=1.01/100;delta_d0=-6.7/100;delta_p0=9.1/100;        % Bracajele la trimare
[rad]
delta_T0=42.5;                                   % [%]
% Simularea schemei fara controler (K=0)
```

```
x0=[Vx0;Vz0;wy0;teta0;0;omega_e0];xbc10=zeros(m,1);
K=zeros(p,n);sim('ALGLIN_sch');
for j=1:size(xc,3);
  xxc1(j)=xc(1,:,j);xxc2(j)=xc(2,:,j);xxc3(j)=xc(3,:,j);
  xxc4(j)=xc(4,:,j);xxc5(j)=xc(5,:,j);xxc6(j)=xc(6,:,j);
  xx1(j)=x(1,:,j);xx2(j)=x(2,:,j);xx3(j)=x(3,:,j);
  xx4(j)=x(4,:,j);xx5(j)=x(5,:,j);xx6(j)=x(6,:,j);
end
subplot(321);plot(t,xx1,'b',t,xxc1,'r--');grid;subplot(322);plot(t,xx2,'b',t,xxc2,'r--');grid;
subplot(323);plot(t,xx3,'b',t,xxc3,'r--');grid;subplot(324);plot(t,xx4,'b',t,xxc4,'r--');grid;
subplot(325);plot(t,xx5,'b',t,xxc5,'r--');grid;subplot(326);plot(t,xx6,'b',t,xxc6,'r--');grid;
h=figure;
subplot(321);plot(t,xx1-xxc1);grid;subplot(322);plot(t,xx2-xxc2);grid;
subplot(323);plot(t,xx3-xxc3);grid;subplot(324);plot(t,xx4-xxc4);grid;
subplot(325);plot(t,xx5-xxc5);grid;subplot(326);plot(t,xx6-xxc6);grid;
% Simularea schemei cu controler (K=KK)
h=figure;K=KK;sim('ALGLIN_sch');
for j=1:size(xc,3);
   xxc1(j)=xc(1,:,j);xxc2(j)=xc(2,:,j);xxc3(j)=xc(3,:,j);
   xxc4(j)=xc(4,:,j);xxc5(j)=xc(5,:,j);xxc6(j)=xc(6,:,j);
   xx1(j)=x(1,:,j);xx2(j)=x(2,:,j);xx3(j)=x(3,:,j);
   xx4(j)=x(4,:,j);xx5(j)=x(5,:,j);xx6(j)=x(6,:,j);
end
subplot(321);plot(t,xx1,'b',t,xxc1,'r--');grid;subplot(322);plot(t,xx2,'b',t,xxc2,'r--');grid;
subplot(323);plot(t,xx3,'b',t,xxc3,'r--');grid;subplot(324);plot(t,xx4,'b',t,xxc4,'r--');grid;
subplot(325);plot(t,xx5,'b',t,xxc5,'r--');grid;subplot(326);plot(t,xx6,'b',t,xxc6,'r--');grid;
h=figure;
subplot(321);plot(t,xx1-xxc1);grid;subplot(322);plot(t,xx2-xxc2);grid;
subplot(323);plot(t,xx3-xxc3);grid;subplot(324);plot(t,xx4-xxc4);grid;
subplot(325);plot(t,xx5-xxc5);grid;subplot(326);plot(t,xx6-xxc6);grid;
```

```
end             % end ciclul while (alegere matricei N)
```

ANEXA A1.7

```
% Proiectarea observerelor utilizand algoritmul Zhang (miscarea longitudinala n=4,p=1)
clear all;close all;
run prog1sec;close all;KK=K;
% KK=[0.5478 -5.0206 6.8979 0.5399];      % mat. K de amplificare a sist.
clear A;clear B;clear C;clear D;clear e;clear ee;clear R;clear K;
% Declararea matricelor sistemului
A=[-0.026 0.025 -0.1 0;-0.36 -3 0 1;0 0 0 1;0.4212 -38.42 0 -3.67];B=[0;0;0;1];Psi=B;
n=size(A,1);p=size(Psi,2);n=size(A,1);
C=[0 0 1 0];m=size(C,1);Ct=transpose(C);
x0=[100;1;0;10];              % Starea initiala (x0)
xc0=[90;2;0;11];              % Starea initiala a observerului (xc0)
%xc0=zeros(n,1);              % Starea initiala a observerului (xc0)
% Rezolvarea ecuatiei Riccati cu necunoscuta P si calculul matricei K
Q=1.2*eye(4);R=[80];[KKK,P,E]=lqr(A,Ct,Q,R);K=P*Ct*inv(R);
eig(A-K*C);GAMA0=zeros(n,p);
Teta=2;M=[3];S=20*eye(m,m);     % Alegerea matricelor M si Sigma(S)
Tetac0=zeros(p,1);                       % Valoarea initiala a vectorului parametrilor necunoscuti
% Simularea schemei bloc si realizarea catracteristicilor de timp
sim('ZHANG_sch_long');
subplot(2,3,1);plot(t,xc1-x1);grid;xlabel('Timp[s]');ylabel('x1c-x1[m/s]');
subplot(2,3,2);plot(t,xc2-x2);grid;xlabel('Timp[s]');ylabel('x2c-x2[grd]');
subplot(2,3,3);plot(t,xc3-x3);grid;xlabel('Timp[s]');ylabel('x3c-x3[grd]');
subplot(2,3,4);plot(t,xc4-x4);grid;xlabel('Timp[s]');ylabel('x4c-x4[grd/s]');
subplot(2,3,5);plot(t,Tetac-Teta);grid;xlabel('Timp[s]');ylabel('Tetac-Teta[grd]');
```

```
subplot(2,3,6);plot(t,Tetac);grid;xlabel('Timp[s]');ylabel('Tetac[grd]');
h=figure;
subplot(2,2,1);plot(t,x1,'b',t,xc1,'--r');grid;subplot(2,2,2);plot(t,x2,'b',t,xc2,'--r');grid;
subplot(2,2,3);plot(t,x3,'b',t,xc3,'--r');grid;subplot(2,2,4);plot(t,x4,'b',t,xc4,'--r');grid;
```

ANEXA A1.8

```
% Estimator adaptiv (Lakhal) cu retea neuronala (misc. long. - avion cu unghi de
incidenta mare)
close all;clear all;
% Declararea matricelor sistemului
AA=[-1.85 -2.9 -0.85 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
    -5 -3 18.1 30 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
    -0.25 8 -0.1 0 -14 -350 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
    -0.15 0.08 -0.2 -3.9 0 0 -0.1 0.19 0.34 0.25 0.15 -0.12 0.2 -0.12 0;
    0.1 -0.04 -0.1 0 -4.3 0 0.058 0.16 0.29 0.2 -0.05 0.12 -0.05 0 -0.09];
A=AA(1:5,1:5);
nn=size(A,1);          % numarul variabilelor de stare
B=[3.1;2.9;1;1;1];C=eye(nn);
% Structura retelelei neuronale
n=size(A,1)+size(B,2)   % numar neuroni de intrare
s=nn;                   % numar neuroni din stratul ascuns
m=1;                    % numar neuroni din stratul de iesire
ita1=1;ita2=1;k=0.5;    % declararea constantelor NN
q=25*[-1;-2;-3;-4;-5];  % valori proprii dorite pentru matricea G=A-L*C
L=place(A,C,q);         % determinarea matricei observerului L
% Verificarea alegerii matricei L
ee=eig(A-L*C);
if ee(1)~=q(5) | ee(2)~=q(4) | ee(3)~=q(3) | ee(4)~=q(2) | ee(5)~=q(1)
    disp('Matricea L nu a fost bine aleasa');
```

```
else
        disp('Matricea L a fost bine aleasa');
end
G=A-L*C;Gt=transpose(G);Ct=transpose(C);
% Declararea matricelor S si F ale NN
S=-ita1*((inv(Gt))*Ct*C);F=-ita2*((inv(Gt))*Ct*C);
% Verificarea alegerii matricelor S si F
d=randn(1,s);
if d*S*(transpose(d))<0 | d*F*(transpose(d))<0
    disp('S si/sau F nu au fost alese bine');
else
    disp('S si/sau F au fost alese bine');
end
x0=[4;0.5;1;1;1];xc0=zeros(nn,1);         % valorile initiale ale starii si starii estimate
Wc0=randn(s,m);Vc0=randn(s,n);          % valorile initiale ale ponderilor NN
sim('neuro_obsv_sch');timp=t;
for i=1:length(t)
xcc1(i)=xc1(:,:,i);xcc2(i)=xc2(:,:,i);xcc3(i)=xc3(:,:,i);xcc4(i)=xc4(:,:,i);xcc5(i)=xc5(:,:,i
);
end
% Trasarea caracteristicilor grafice
subplot(3,2,1);plot(timp,x1,timp,xcc1,'r--');grid;xlabel('Timp');
subplot(3,2,2);plot(timp,x2,timp,xcc2,'r--');grid;xlabel('Timp');
subplot(3,2,3);plot(timp,x3,timp,xcc3,'r--');grid;xlabel('Timp');
subplot(3,2,4);plot(timp,x4,timp,xcc4,'r--');grid;xlabel('Timp');
subplot(3,2,5);plot(timp,x5,timp,xcc5,'r--');grid;xlabel('Timp');
h=figure;
subplot(3,2,1);plot(timp,x1-xcc1');grid;xlabel('Timp');
subplot(3,2,2);plot(timp,x2-xcc2');grid;xlabel('Timp');
subplot(3,2,3);plot(timp,x3-xcc3');grid;xlabel('Timp');
```

```
subplot(3,2,4);plot(timp,x4-xcc4');grid;xlabel('Timp');
subplot(3,2,5);plot(timp,x5-xcc5');grid;xlabel('Timp');
% Afisarea ponderilor NN dupa terminarea procesului de antrenare
Wc_final=Wc(:,:,size(Wc,3))
Vc_final=Vc(:,:,size(Wc,3))
```

ANEXA A1.9

```
% Estimator adaptiv (Jing) cu retea neuronala ortogonala (avion cu incidenta mare)
close all;clear all;
% Matricele din ecuatiile de stare
AA=[-1.85 -2.9 -0.85 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;-5 -3 18.1 30 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
        -0.25 8 -0.1 0 -14 -350 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
        -0.15 0.08 -0.2 -3.9 0 0 -0.1 0.19 0.34 0.25 0.15 -0.12 0.2 -0.12 0;
         0.1 -0.04 -0.1 0 -4.3 0 0.058 0.16 0.29 0.2 -0.05 0.12 -0.05 0 -0.09];
A=AA(1:5,1:5);nn=size(A,1);B=[3.1;2.9;1;1;1];Bs=eye(nn);C=eye(nn);
% Determinarea matricelor L,P,M
q=[-1;-2;-3;-4;-5];        % valori proprii dorite pentru matricea A-L*C
L=place(A,C,q);ee=eig(A-L*C);
if ee(1)~=q(5) | ee(2)~=q(4) | ee(3)~=q(3) | ee(4)~=q(2) | ee(5)~=q(1)
       disp('Matricea L nu a fost bine aleasa');
else
       disp('Matricea L a fost bine aleasa');
end
Q=eye(nn);P=lyap(A-L*C,Q);     % determinarea matricei P
M=transpose(Bs)*P*pinv(C);      % determinarea matricei M
% Introducerea constantelor
G1=1;sigma=5;ita=10;gama=2;k0=2;
W0=zeros(nn,nn);              % valorile initiale ale ponderilor NN
x0=[4;0.5;1;1;1];             % valorile initiale ale starilor
```

```
xc0=[3;1;0.5;0.7;0.5];        % valorile initiale ale starilor estimate
sim('Jing_obsv_sch');timp=t;
% Trasarea caracteristicilor grafice
subplot(3,2,1);plot(timp,x1-xc1);grid;xlabel('Timp');
subplot(3,2,2);plot(timp,x2-xc2);grid;xlabel('Timp');
subplot(3,2,3);plot(timp,x3-xc3);grid;xlabel('Timp');
subplot(3,2,4);plot(timp,x4-xc4);grid;xlabel('Timp');
subplot(3,2,5);plot(timp,x5-xc5);grid;xlabel('Timp');
h=figure;
subplot(3,2,1);plot(timp,x1,timp,xc1,'r--');grid;xlabel('Timp');
subplot(3,2,2);plot(timp,x2,timp,xc2,'r--');grid;xlabel('Timp');
subplot(3,2,3);plot(timp,x3,timp,xc3,'r--');grid;xlabel('Timp');
subplot(3,2,4);plot(timp,x4,timp,xc4,'r--');grid;xlabel('Timp');
subplot(3,2,5);plot(timp,x5,timp,xc5,'r--');grid;xlabel('Timp');
% Afisarea ponderilor NN dupa terminarea procesului de antrenare si afisarea lui k
W_final=W(:,:,size(W,3))
k=k(length(k))
```

BIBLIOGRAFIE

[1] Abdollahi, F., Talebi, H.A., *A stable neural network observer with application to flexible joint manipulators*, 9th International Conference on Neural Information Processing (ICONIP'O2), vol. 4, 2002, pag. 1910-1914.

[2] Abdollahi, F., Talebi, H.A., *A stable neural network-based observer with application to flexible joint manipulators*. IEEE Transactions on Neural Network, vol 1, 2006, pag. 118-129.

[3] Angelov, P., Filev, D., *An Approach to Online Identification of Takagi-Sugeno Fuzzy Models*. IEEE Transactions on systems, Man and Cybernetics, Part B, vol. 34, nr. 1, 2004, pag. 484-498.

[4] Akhenak, A., Chadli, M., Maquin, D., Ragot, J., *Multiple observer with unknown inputs. Application to a three tank system.* IAR Annual Meeting, 2002.

[5] Akhenak, A., Chadli, M., Maquin, D., Ragot, J., *State estimation of uncertain multiple model with unknown inputs*. 43rth IEEE Conference on Decision and Control (CDC), 14-17 Dec. 2004, pag. 3563-3568.

[6] Akhenak, A., Chadli, M., Maquin, D., Ragot, J., *Sliding mode multiple observer for fault detection and isolation*. 42th IEEE Conference on Decision and Control, Hawaii, December 9-12, 2003.

[7] Akhenak, A., Chadli, M., Maquin, D., Ragot, J., *State estimation via multiple observer. Three tank system.* 5th IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety for Technical Processes, Washington, 2003, pag. 1227-1232.

[8] Akhenak, A., Chadli, M., Ragot, J., Maquin, D., *Unknown input multiple observer based-approach - application to secure communications*. 1st IFAC Conference on analysis and Control of Chaotic Systems, Reims, France, 2006.

[9] Akhenak, A., Chadli, M., Ragot, J., Maquin, D., *Design of sliding mode unknown input observer for uncertain Takagi-Sugeno model*. 15th Mediteranean Conference on Control and Automation (MED'07), Grecia, 2007.

[10] Aloui, R., Braiek, N.B., *On the determination of an optimal state observer gain for multivariable systems: Application to induction motors*. Journal of Automation and Systems Engineering, vol. 2, nr. 3, 2008, pag. 206-218.

[11] Aloui, R., Tlili, A.S., Braiek, N.B., *Observateurs d'etat non lineaires et/ou robustes a mode glissant d'une machine asyncrone*. Conf. Int. Francophone d'Auto. CIFA 2006, Bordeaux, France.

[12] Antsaklis, P.J., Michel, A.N., *Linear systems*. Editura McGraw Hill, 1997.

[13] Arcak, M., Kokotovic, P., *Nonlinear observers: a circle criterion design and robustness analysis*. Automatica, vol. 37, nr. 12, 2001, pag. 1923-1930.

[14] Astrom, K., Wittenmark, B., *Computer-Controlled Systems: Theory and Design*. Prentice Hall, 1997.

[15] Basseville, M., Nikiforov, I.V., *Detection of Abrupt Changes: Theory and Application*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1993.

[16] Bastin, G., Gevers, M.R., *Stable adaptive observers for nonlinear time-varying systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 33, 1988, pag. 650-658.

[17] Baumann, W.T., Rugh, W.J., *Feedback control of nonlinear systems extended linearization*. IEEE Transactions on Automatic Control, AC-31, pag. 40-46.

[18] Berdjag, D., Christophe, C., Cocquempot, V., Jiang, B., *Nonlinear model decomposition for robust fault detection and isolation using algebraic tools*. International Journal of Innovative Computing, Information and Control, vol. 2, nr. 6, 2006, pag. 1337-1354.

[19] Bergsten, P., Palm, R., Driankov, D., *Observers for Takagi-Sugeno fuzzy systems*. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics – Part B: Cybernetics, vol. 32, nr. 1, 2002, pag. 114-121.

[20] Bernstein, D.S., Haddad, W., *Steady-state Kalman filtering with an H1 error bound*. Syst. Con. Let., vol. 12, 1989, pag. 9-16.

[21] Besançon, G., *Remarks on nonlinear adaptive observer design*. Systems & Control Letters, vol. 41, 2000, pag. 271-280.

[22] Bhattacharyya, S.P., *Observer design for linear system with unknown inputs*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-23, 1978, pag. 483-484.

[23] Bhattacharyya, S.P., *The structure of robust observers*. IEEE Trans. Auto. Con., vol. 21, 1976, pag. 581-588.

[24] Blanco, Y., Gouaisbaut, F., Perruquetti, W., Borne, P., *Sliding mode controller design using polytopic formulation*. IEEE Conference on Decision and Control, CDC'2001, Orlando USA, December 2001.

[25] Blanke, M., Kinnaert, M., Lunze, J., Staroswiecki, M., *Diagnosis and Fault-Tolerant Control* (Second edition), Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2006.

[26] Borne, P. Tanguy, G.D., Richard, J.P., Rotella, F., Zambettakis, I., *Commande et optimisation des processus*. Technip, vol. 1, 1990.

[27] Boubaker, O., *Robust Observers for Linear Systems with Unknown Inputs: a Review*. ASCE Journal, vol. 5, Issue II, June, 2005, pag. 45-51.

[28] Boubaker, O., Sfaihi, B., *Robust Observers for Linear Systems with Unknown Inputs: a comparative sudy*. IEEE SSD’2005, Sousse, Tunisia, 2005.

[29] Boyd, S., Ghaoui, L.E., Feron, E., Balakrishnan, V., *Linear Matrix Inequals*. Syst Cont Theory, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994.

[30] Campbell, S.L., *Singular systems of differential equations*. Pitman, 1982.

[31] Chadli, M., Maquin, D., Ragot, J., *On the stability analysis on multiple model systems*. European Control Conference, Portugal, 2001.

[32] Chen, J., Patton, R.J., *Robust Model-Based Fault Diagnosis for Dynamic Systems*. Publisher: Springer; 1st Edition, ISBN-10: 0792384113.

[33] Chen, J., Patton, R.J., Zhang, H., *Design of unknown input observers and robust fault detection filters*. International Journal of Control, vol. 63, 1996, pag. 85-105.

[34] Chen, J., Zhang, H., *Robust detection of faulty actuators via unknown input observers*. International Journal of Systems Science, vol. 22, nr. 10, 1980.

[35] Chen, X., Zhou, K., *H-inf Gaussian filter on infinite time horizon*. IEEE Trans. Circuits and Syst.: Fundamental Theory and Applications, vol. 49, 2002, pag. 674-679.

[36] Cheng, C., Chang, M., *Design of derivative estimator using adaptive sliding mode*. Proceedings of 2006 IEEE American Control Conference, (Minneapolis,

MN), 2006, pag. 2611-2615.

[37] Chilali, M., Gahinet, P., *H-inf design with pole placement constraints an LMI approach*. IEEE Trans. Aut. Control, 1996, pag. 358-367.

[38] Cho Y.M., Rajamani, R., *A systematic approach to adaptive observer synthesis for nonlinear systems*. IEEE Transaction on Automatic Control, vol. 42, nr. 4, 1997, pag. 534-537.

[39] Corless, M., Tu, J., *State and input estimation for a class of uncertain systems*. Automatica, vol. 34, nr.6, 1998, pag. 757-764.

[40] Dai, L., *Singular control systems*. New York: Springer-Verlag, 1989.

[41] Darouach, M., *H_∞ unbiased filtering for descriptor systems via LMI*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 54, nr. 8, 2009, pag. 1966-1972.

[42] Darouch, M., *Linear Functional Observers for Systems with Delays in Stable Variables.* IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 46, 2001, pag. 491-496.

[43] Darouach, M., *Functional Observers for Systems with Unknown Inputs*. Proceedings of the 16th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems, Leuven, Belgia, 2004.

[44] Darouach, M., Boutat-Baddas, L., *Observer for a class of nonlinear singular systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 53, nr. 11, 2008, pag. 2627-2633.

[45] Darouach, M., Boutayeb, M., *Design of observers for descriptor systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 40, nr. 7, 1995, pag. 1323-1327.

[46] Darouach, M., Boutat-Baddas, L., Zerrougui, M., *H_∞ observers design for a class of nonlinear singular systems*. Automatica, vol. 47, 2011, pag. 2517-2525.

[47] Darouach, M., Zasadzinski, M., Hayar, M., *Reduced-order observer design for descriptor systems with unknown inputs*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 41, nr. 7, 1996, pag. 1068-1072.

[48] Darouach, M., Zasadzinski, M., Mehdi, D., *State estimation of stochastic singular linear systems*. International Journal of Systems Science, vol. 24, 1993, pag. 345-354.

[49] Darouach, M., Zasadzinski, M., Xu, S.J., *Full-order observers for linear*

systems with unknown inputs. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 39, 1994, pag. 606-609.

[50] Donald, McL., *Automatic Flight Control Systems*. Prentice Hall Publisher, 1990.

[51] Dorato, P., Abdallah, C.T., Cerone, V., *Linear Quadratic Control, An Introduction*. Malabar, FL: Krieger, 2000.

[52] Duan, G.R., *Solution to matrix equation AV+BW=VF and their application to eigenstructure assignment in linear systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 38, 1993, pag. 276-280.

[53] Duan, G.R., Patton, R.J., *Robust fault detection using Luenberger-type unknown input observers - a parametric approach*. International Journal of Systems Science, vol. 32, nr. 4, 2001, pag. 533-540.

[54] Duan, G.R., Patton, R.J., *Robust fault detection in linear systems using Luenberger observers*. Proceedings of International Conference on Control, Swansea, 1-4 Septembrie 1998, pag. 1468-1473.

[55] Edwards, C., *A comparison of sliding mode and unknown input observers for fault reconstruction*. Proceedings of the 43th IEEE Conference on Decision and Control, 2004, pag. 5279- 5284.

[56] Edwards, C., Spurgeon, S.K., *On the development of discontinuous observers*. International Journal of Control, nr. 59, 1994, pag. 1211-1229.

[57] Edwards, C., Spurgeon, S.K., *Sliding mode observers for fault detection and isolation*. Automatica, vol. 36, nr. 6, 2000, pag. 541-553.

[58] Edwards, C., Spurgeon, S.K., *Sliding Mode Control: Theory and Applications*. Taylor and Francis, 1998.

[59] Edwards, C., Spurgeon, S.K., Patton, R.J., *Sliding mode observers for fault detection and isolation*. Automatica, nr. 36, 2000, pag. 541-553.

[60] Etkin, B., Reid, L., *Vehicle Stability and Pitch.* 5th Conference on Mathematics and Computers, Australia, 14-16 June, 2000.

[61] Fekih, A., Xu, H., Chowdhury, F.N., *Neural networks based system identification techniques for model based fault detection of nonlinear systems*. International Journal of Innovative Computing, Information and Control, vol.

3, nr. 5, 2007, pag. 1073-1085.

[62] Fernando, T., Jennings, L., Trinh, H., *Generality of Functional Observer Structures*. Proceedings of the 50th IEEE Conference on Decision and Control, Orlando, USA, 2011, pag. 4000-4004.

[63] Fernando, T., MacDougall, S., Sreeram, V., Trinh, H., *Existence conditions for unknown input functional observers*. International Journal of Control, vol. 86, nr. 1, 2013, pag. 22-28.

[64] Floquet, T., Barbot, J.P., *An observability form for linear systems with unknown inputs*. International Journal of Control, vol. 79, 2006, pag. 132-139.

[65] Frank, P.M., *Fault diagnosis in dynamic systems using analytical and knowledge-based redundancy - a survey and some new results*. Automatica, vol. 26, 1994, pag. 955-981.

[66] FRANKLIN, G.F., POWELL, J.D., WORKMAN, M.L., *DIGITAL CONTROL OF DYNAMIC* (3RD ED.). ADDISON WESLEY, 850 PAG., 2006.

[67] Friedland, B., *Full-Order State Observers*. Physical Sciences, Engineering & Technology Resources-Sample Chapter (http://www.eolss.net/EolssSample Chapters).

[68] Fu, M., De Souza, C., Luo, Z.Q., *Finite-horizon robust Kalman filter design*. IEEE Trans. Signal Process., vol. 49, 2001, pag. 2103-2112.

[69] Fu, M.Y., Duan, G.R., Song, S.M., *Design of Unknown Input Observer for Linear Time-Delay Systems*. International Journal of Control, Automation, and Systems, vol. 2, nr. 4, 2004, pag. 530-535.

[70] Funahashi, K., *On the approximate realization of continuous mapping by neural networks.* Neural networks, vol. 2, 1989, pag.183-192.

[71] Garimella, P., Yao, B., *Nonlinear adaptive robust observer design for a class of nonlinear systems*. Proceedings of the 2003 American Control Conference, pag. 4391-4396.

[72] Gasso, K., Mourot, G., Ragot, J., *Structure identification in multiple model representation: elimination and merging of local models*. IEEE Conference on Decision and Control, CDC'2001, Orlando, USA, 2001.

[73] Gejic, Z., *Introduction to Linear and Nonlinear Observers.* Rutgers University.

[74] Germani, A., Manes, C., Pepe, P., *A new approach to state observation of nonlinear systems with delayed output*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 47, 2002.

[75] Ghinea, M., Fireteanu, V., *Matlab-calcul numeric-grafica-aplicatii*. Editura Teora, 2001.

[76] Godoy, M., Bose, K., *Neural network based estimation of feedback signals for a vector controlled induction motor drive*. IEEE Transaction on Industry applications, vol 31, 1995, pag. 620-629.

[77] Golub, G., *Numerical methods for solving least squares problems*. Numerische Mathematik, vol. 7, 1965, pag. 206-216.

[78] Gopinath, B., *On the control of linear multiple input-output systems*. Bell Syst. Tech. J., 1971.

[79] Guan, Y., Saif, M., *A Novel Approach to the Design of Unknown Input Observers*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 36, nr. 5, 1991, pag. 632-635.

[80] Ha, Q.P., Trinh, H., *State and input simultaneous estimation for a class of nonlinear systems*. Automatica, vol. 40, 2004, pag. 1779-1785.

[81] Hanlon, P.D., Maybeck, P.S., *Multiple-Model Adaptive Estimation Using a Residual Correlation Kalman Filter Bank.* IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, vol. 36, nr. 2, 2000, pag. 393-406.

[82] Hautus, M.L., *Strong detectability and observers.* Linear Algebra & Applications, vol. 50, 1983, pag. 353-368.

[83] Haddad, W.M., Chellaboina, V., *Nonlinear Dynamical Systems and Control*. Princeton, 2008.

[84] Hornik, K., Stinchombe, M., White, H., *Multilayer feedforward networks are universal approximators*. Neural Networks, 1989, pag. 359-366.

[85] Hou, M., Muller, P.C., *Design of Observers for Linear Systems with Unknown Inputs.* IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 37, 1992, pag. 871-875.

[86] Hou, M., Zitek, P., Patton, R.J., *An Observer Design for Linear Time-Delay*

Systems. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 47, 2002, pag. 121-125.

[87] Hovakimyan, N., Calise, A.J., Madyastha, V.K., *An adaptive observer design methodology for bounded nonlinear processes.* Proceedings of 41st IEEE Conference on Decision & Control, vol. 4, 2002, pag. 4700-4705.

[88] How, J., *Feedback control systems.* Course materials, 2007 (http://ocw.mit.edu).

[89] Howell, A., Hedrick, J.K., *Nonlinear observer design via convex optimization*. Proceedings of the American Control Conference, 2002, pag. 2088-2093.

[90] Huh, K., Stein, J.L., *A quantitative performance index for observer-based monitoring systems*. Trans. ASME, J. Dynam. Syst. Meas. Con., vol. 116, 1994, pag. 487-497.

[91] Hui, S., Zak, S.H., *Observer Design for Systems with Unknown Inputs.* Int. J. Appl. Math. Comput. Sci., vol. 15, nr. 4, 2005, pag. 431-446.

[92] HTTP://EN.WIKIPEDIA.ORG/WIKI/STATE_OBSERVER.

[93] Ioannou, P.A., Sun, J., *Robust Adaptive Cont*rol, Prentice Hall, 1996.

[94] IDAN, M., CALISE, A.J., KUTAY, A.T., *ADAPTIVE NEURAL NETWORK BASED APPROACH FOR ACTIVE FLOW CONTROL.* ASME FLUIDS ENGENEERING DIVISION SUMMER MEETING, NEW ORLEANS, LOUISIANA, MAY 29 – JUNE 3, 2001.

[95] Jain, K., *Artificial neural networks, a tutorial*, IEEE, 31-44.

[96] Jamel, W., Khedher, A., Bouguila, N., Othman, K., *State Estimation via Observers with Unknown Inputs: Application to a Particular Class of Uncertain Takagi-Sugeno Systems*. Studies in Informatics and Control, vol. 19, nr. 3, 2010, pag. 219-228.

[97] Jazwinski, A., *Stochastic Processes and Filtering Theory*. Mathematics in Scince and Engineering. Academic Press, New York, vol. 64, 1970.

[98] Jeong, C.S., Yaz, E.E., Bahakeem, A., Yaz, I., *Nonlinear Observer Design with General Criteria.* International Journal of Innovative Computing, Information and Control, vol. 2, nr. 4, 2006.

[99] Jiang, B., Staroswiecki, M., Cocquempot, V., *Fault accommodation for nonlinear dynamic systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 51, nr. 9,

September 2006, pag. 1578-1583.

[100] Jiang, B., Wang, J.L., Soh, Y.C., *An adaptive technique for robust diagnosis of faults with independent effects on system outputs*. International Journal of Control, vol. 75, nr. 11, 2002, pag. 792-802.

[101] Jing, W., Tan, Z., Ma, X., Gao, J., *A Novel Adaptive Observer-Based Control Scheme for Synchronization and Suppression of a Class of Uncertain Chaotic Systems*. Chinese Physics Letters, vol. 26, nr. 5, 2009.

[102] Jo, N.H., Seo, J.H., *Input output linearization approach to state observer design for nonlinear system*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 45, 2000, pag. 2388-2393.

[103] Johansen, T.A., Foss, A.B., *Constructing NARMAX using ARMAX Models*. International Journal of Control, vol. 58, nr. 5, 1993, pag. 1125-1153.

[104] Johansen, T., Foss, A., *Nonlinear Local Model Representation for Adaptive Systems*. International Conference on Intelligent Control and Instrumentation, Singapore, February 17-21, 1992.

[105] Johansen, T.A., Rabuska, R., *Multiobjective Identification of Takagi-Sugeno Fuzzy Models*. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol. 11, nr. 6, 2003, pag. 847-860.

[106] Johnson, C.D., *An observer for linear systems with unknown and inaccessible inputs*. International Journal of Control, vol. 21, 1975, pag. 825-831.

[107] Juloski, A.L., Mihajlovic, W.P., Heemels, M.H., Nijmeijer, H., *Observer Design for Experimental Rotor with Discontinous Friction.* Proceedings of the 2006 American Control Conference, Mineapolis, 2006.

[108] Jung, J., Huh, K., Fathy, H., Stein, L., *Optimal Robust Adaptive Observer Design for a Class of Nonlinear Systems via an H-Infinity Approach*. Proceedings of the 2006 Americn Control Conference, Minnesota, June 14-16, 2006, pag. 3637-3642.

[109] Jung, J., Huh, K., Lee, T.H., *Observer design methodology for stochastic and deterministic robustness*. International Journal of Control, vol. 81, nr. 7, pag. 1172-1182.

[110] Kaczorek, T., *Vectors and Mattrices in Control and Electrical Engineering,* Warssaw, 1998.

[111] Kalman, R.E., Bucy, R.S., *New results in linear filtering and prediction theory*. Trans. ASME Series D: J. Basic Eng., vol. 83, 1961, pag. 95-108.

[112] Kalman, R.E., Falb, P.L., Arbib, M.A., *Teoria sistemelor dinamice*. Editura Tehnică, Bucureşti, 1975.

[113] Kazantzis, N., Kravaris, C., *Nonlinear Observer Design using Lyapunov's Auxiliary Theore*. CDC, San Diego, 1997.

[114] Keller, H., *Nonlinear observer design by transformation into generalized observer canonical form*. International Journal of Control, vol. 46, nr. 6, 1987, pag. 1915-1930.

[115] Khalil, H.K., *Nonlinear Systems*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, Third edition, 2002.

[116] Khedher, A., Benothman, K., Maquin, D., Benrejeb, M., *State and unknown input estimation via a proportional integral observer*. 9th International Conference on Sciences and Techniques of Automatic Control and Computer Engineering (STA'2008), Sousse, Tunisia, 2008.

[117] Khedher, A., Benothman, K., Maquin, D., Benrejeb, M., *Adaptive observer for fault estimation in nonlinear systems described by a Takagi-Sugeno model*. Mediterranean Conference on Control & Automation, 2010, pag. 261-266.

[118] Kim, B.S., Calise, A.J., *Nonlinear Flight Control Using Neural Networks*. Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation and Control Conference, Scottsdale, AZ, pag. 930-940, 1994.

[119] Kim, Y.M., Lewis, F., Abdallah, C.T., *A dynamic recurrent neural network based adaptive observer for a class of nonlinear systems*. Automatica, vol 33, 1997, 1539-1543.

[120] Kiriakidis, K., O'Brien, J.R., *H-infinity parameter estimation for state-space models*. Proceedings of the 2004 American Control Conference, pag. 2836-2839.

[121] Koenig, D., Mammar, S., *Design of the class of reduced order unknown inputs*

nonlinear observer for fault diagnosis. American Control Conference, ACC' 2001, Arlington, USA, June 2001.

[122] Krantz, S., Parks, H., *The Implicit Function Theorem: History, Theory, and Applications*. Boston, MA: BirkhÄauser, 2008.

[123] Kreisselmeier, G., *Adaptive observers with exponential rate of convergence.* IIEEE Transaction on automatic Control, vol. 22, nr. 1, 1977, pag. 2-8.

[124] Krener A., Isidori, A., *Linearization by Output Injection and Nonlinear Observers.* Systems and Control Letters, nr. 3, 1983, pag. 47-52.

[125] Krener, J., Respondek, W., *Nonlinear observer design with linearizable error dynamics*. SIAM Journal on Control and Optimization, vol. 23, nr. 2, 1985, pag. 197-216.

[126] Krener, A.J., Xiao, M.Q., *Observers for linearly unobservable nonlinear* systems. Int. Journal of control, vol. 74, 2001, pag. 1559-1567.

[127] Krzeminsky, S., Kaczorec, T., *Perfect Reduced – Order Unknown – Input Observer for Standard Systems.* Buletin of the Polish Academy of Sciences Technical Sciences, vol. 52, nr. 2, 2004, pag. 103-107.

[128] KRZEMINSKI, S., KACZOREC, T., *PERFECT REDUCED – ORDER UNKNOWN – INPUT OBSERVER FOR DESCRIPTOR SYSTEMS.* 7TH INTERNATIONAL MULTICONFERENCE ON INFORMATICS, SYSEMICS AND CYBERNETICS, ORLANDO, 2003.

[129] Kudva, P. Viswandam, N., Ramakrishna, A., *Observers for linear systems with unknown inputs.* IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-25, 1980, pag. 113-115.

[130] Kulcsar, B., *LQR/LTR Controller Design for An Aircraft Model.* Periodica Politechnica Ser. Transp. Eng., vol. 28, nr. 1-3, 2000, pag. 131-142.

[131] Lakhal, A.N., Tlili, A.S., Benhadj, B., *Neural Network Observer for Nonlinear Systems Application to Induction Motors*. International Journal of control and Automation, vol. 3, nr. 1, March 2010.

[132] Lavretky, E., Hovakimyan, N., Calise, A.J., *Reconstruction of Continous-Time Dynamics Using Delayed Output and Feedforward Neural Networks.* IEEE

Transactions on Automatic Control, sept. 2003.

[133] Lee, S.H., Hong, J., See, J.H., *Observers for bilinear systems with unknown inputs and application to superheater temperature control*. Control Engineering Practice, vol. 5, nr. 4, 1997, pag. 493-506.

[134] Lewis, F., Liu, K., Yesildirek, A., *Neural net robot controller with guaranteed tracking performance*. IEEE Transaction on Neural Network, vol. 6., 1995, pag. 703-715.

[135] Leyva-Ramos, J., Pearson, A.E., *An asymptotic model observer for linear autonomous time lag systems.* IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 40, nr. 7, 1995, pag. 1291-1294.

[136] Lin, S.F., Wang, A.P., *Unknown Input Observers Designed by Eigenstructure Assignment*. Systems Analysis Modelling Simulation, vol. 42, nr. 3, 2002, pag. 415-428.

[137] Luders, G., Narendra, K., *An adaptive observer and identifier for a linear system.* IEEE Transaction on automatic Control, vol. 18, 1973, pag. 496-499.

[138] Luenberger, D., *An introduction to* observers. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-16, 1971, pag. 596-603.

[139] Luenberger, D., *Nonlinear descriptor systems*. Journal of Economics Dynamics and Control, vol. 1, 1979, pag. 219–242.

[140] Lungu, M., *Sisteme de conducere a zborului*. Editura Sitech, Craiova, 2008.

[141] Lungu, M., *Algoritmi si structuri pentru identificarea, estimarea si conducerea zborului aeronavelor si rachetelor*. Editura Sitech, Craiova, 2013.

[142] Lungu, M., Lungu, R., *Full-Order Observer Design for Linear Systems with Unknown Inputs*. International Journal of Control, vol. 85, nr. 10, 2012, pag. 1602-1615.

[143] Lungu, R., *Echipamente şi sisteme giroscopice*. Editura Universitaria, Craiova, 1997.

[144] Lungu, R., *Automatizarea aparatelor de zbor*. Editura Universitaria, Craiova, 2000.

[145] Lungu, R., *Sisteme de dirijare aerospaţială.* Editura Sitech, Craiova, 2002.

[146] Lungu, R., Corcău, J., Lungu, M. *Gyroscopic Stabilization System with Kalman-Bucy State Estimator.* XIII-th International Sysposium on Electrical Apparatus and Tehnologies, 29-30 May 2003, Plovdiv, Bulgaria, pag. 129-134.

[147] Lungu, R., Grigorie, L., *Traductoare accelerometrice şi girometrice.* Editura Sitech, Craiova, 2005.

[148] LUNGU, R., LUNGU, M., *OPTIMAL CONTROL OF THE ROCKET'S LATERAL DEVIATION IN RAPPORT WITH EQUAL SIGNAL LINE.* A 6–A CONFERINŢĂ INTERNAŢIONALĂ DE SISTEME ELECTROMECANICE ŞI ENERGETICE, SIELMEN, 2007, CHIŞINAU, REPUBLICA MOLDOVA.

[149] Lyshevski, S.E., *Nonlinear Identification of Control Systems*. Proceedings of the American Control Conference, Philadelphia, PA, 1998, pag. 2366-2370.

[150] Maciejowski, J.M., *Multivariable Feedback Design*. Addison-Wesley, 1989.

[151] Maeda, H., Hino, H., *Design of optimal observers for linear time-invariant systems*. Int. J. Control, vol. 19, nr. 5, 1975, pag. 993-1004.

[152] Maquin, D., Gaddouna, B., Ragot, J., *Estimation of unknown inputs in linear systems.* American Control Conference, vol. 1, 1994, pag. 1195-1197.

[153] Marino, R., *Adaptive observers for single output nonlinear systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 35, 1990, pag. 1054-1058.

[154] Marino, R., Santosuosso, G.L., Tomei, P., *Robust adaptive observers for nonlinear systems with bounded disturbances*. IEEE Transaction on Automatic Control, vol. 46, nr. 6, 2001, pag. 967-972.

[155] Marino, R., Tomei, P., *Adaptive observers with arbitrary exponential rate of convergence for nonlinear systems.* IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 40, nr. 7, 1995, pag. 1300-1304.

[156] Marino, R., Tomei, P., *Global adaptive observers for nonlinear systems via filtered transformations*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 37, nr. 8, 1992, pag. 1239-1245.

[157] Marx, B., Koenig, D., Ragot, J., *Design of observers for Takagi-Sugeno descriptor systems with unknown inputs and application to fault diagnosis*.

IET Control Theory and Applications, vol. 5, 2007, pag. 1487-1495.

[158] Meditch, J.S., Hostetter, G.H., *Observers for systems with unknown and inaccessible inputs*. International Journal of Control, vol. 19, 1974, pag. 473-480.

[159] Meyer, C.D., *Matrix analysis and applied linear algebra: solutions manual*, SIAM, vol. 2, 2000.

[160] Michael, T., Harley, R., *Identification and control of induction machines using artificial neural networks*. IEEE Transaction on Industry Applications, vol 31, 1995, pag. 612-619.

[161] Monahemi, M., Barlow, J., O'Leary, D., *Design of Reduced-Order Observers with Precise Loop Transfer Recovery*. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, vol. 15, nr. 6, 1992.

[162] Morel, Y., *Applied Nonlinear Control of Unmanned Vehicles with Uncertain Dynamics.* Dissertation submitted to the Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State, 2009, Blacksburg, Virginia.

[163] Muramatsu, E., Ikeda, M., *Estimation of Parameters in State Equations via Multiple Observers*. 39th IEEE Conference on Decision and Control, December 2000, pag. 197-202.

[164] Murray-Smith, R., Johansen, T., *Multiple model approaches to modeling and control*. Editura Taylor and Francis, London, 1997.

[165] Nakade, P., Galgate, G.G., *Design of Linear Functional Observer for MIMO LTI Systems*. International Journal of Computer Applications, vol. 1, nr. 6, 2010.

[166] Narendra, K., Parthasarathy, K., *Identification and control of dynamic system using neural networks*. IEEE Transaction on Neural Network, vol. 1, 1990, pag. 4-27.

[167] Nikoukhah, R., Campbell, S., Delebecque, F., *Kalman filtering for general discrete-time systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 34, nr. 10, 1999, pag. 1829-1839.

[168] Nikoukhah, R., Willsky, A., Levy, B., *Kalman filtering and Riccati equations for descriptor systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 37, nr. 9, pag. 1325-1342.

[169] Oară, C., *Teoria sistemelor automate*. Suport de curs, Universitatea Politehnica Bucureşti, 2005.

[170] Oliveira, P., *Nonlinear Observers with Linearizable Error Dynamics*. Journal Automatica (Journal IFAC), vol. 43, nr. 8, August, 2007.

[171] Olivera, J., Guan, X., Manry, M., *Theory of monomial networks*. Proceedings of Implicit and Nonlinear Systems, 1992**,** pag. 96-101.

[172] O'Reilly, J., *Observers for Linear Systems.* New York: Academic, 1983.

[173] Orjuela, R., Marx, B., Ragot, J., Maquin, D., *Proportional-Integral observer design for nonlinear uncertain systems modelled by a multiple model approach*. 47th IEEE Conference on Decision and Control, Mexic, 2008.

[174] Park, J., Sandberg, I.W., *Universal approximation using radial-basis function networks*. Neural Comp., vol. 3, 1991, pag. 246-257.

[175] Patton, R.J., Chen, J., *Observer-based fault detection and isolation: robustness and applications*. Contr. Eng. Practice, vol. 5, nr. 5, 1997, pag. 671-682.

[176] Patton, R.J., Chen, C., Lopez-Toribio, J., *Fuzzy observer for nonlinear dynamic systems*. IEEE Conference on Decision and Control, Florida, 1998.

[177] Patton, R.J., Chen, J., Zhang, H., *Modelling methods for improving robustness in fault diagnosis of jet engine system*. Proceedings of the 31th IEEE Conference on Decision and Control, Arizona: Tucson, 1992, pag. 2330-2335.

[178] Patton, R.J., Frank, P.M., Clark, R.N., *Fault Diagnosis in Dynamic Systems, Theory and Applications*. Prentice-Hall Publisher, Englewood CliOEs, New Jersey, 1989.

[179] Paw, Y.C., *Synthesis and Validation of Flight Control for UAV*. Dissertation submitted to the Faculty of the Graduate School of the University of Minnesota, Decembrie, 2009.

[180] Pearson, A.E., Fiagbedzi, Y.A., *An observer for time lag systems.* IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 34, nr. 4, 1989, pag. 775-777.

[181] Pertew, A.M., Marquez, H.J., Zhao, Q., *H_∞ synthesis of unknown input observers for non-linear Lipschitz systems*. International Journal of Control, vol. 78, nr.15, 2005, pag. 1155-1165.

[182] Petersen, I.R., Mcfarlane, D.C., *Optimal guaranteed cost control and filtering for uncertain linear systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 39, 1994, pag. 1971-1977.

[183] PHILIPS, C., NAGLE, H.T., *DIGITAL CONTROL SYSTEM ANALYSIS AND DESIGN*. PRENTICE HALL, 1995.

[184] Plimbs, J., *Survey of Nonlinear Observer design Techniques,* 1 Iunie 1996.

[185] Rachik, M., Laarabi, H., El Kahlaoui, O., Saadi, S., *Observer for Perturbed Linear Continuous Systems*. Applied Mathematical Sciences, vol. 4, nr. 14, 2010, pag. 681-689.

[186] Rajamani, R., *Observers for Lipschitz nonlinear systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, AC-43, 1998, pag. 397-401.

[187] Rajamani R., Hedrick, J.K., *Adaptive observers for active automotive suspensions: Theory and experiment*. IEEE Transactions on Control Systems Technology, vol. 3, nr. 1, 1995, pag. 86-93.

[188] Selmic, R., Lewis, L., *Multimodel neural networks identification and failure detection of nonlinear systems*. Proceeding of the 40th IEEE Conference on Decision and Control, Florida, USA, 2001, pag. 3128-3133.

[189] Sename, O., *Unknown input robust observer for time delay system.* Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control, 1997, pag. 1629-1630.

[190] Seong-Hwan, K., Tae-Sik, P., Ji-Yoon, Y., Gwi-Tae, P., *Speed sensorless vector control of an introduction motor using neural network speed estimation*. IEEE Transaction on Industrial Electronics, vol 48, 2001, pag. 609-614.

[191] Shafai, B., Carrol, R.L., *Design of proportional-integral observer for linear time-varying multivariable systems*. Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control, vol. 24, 1985, pag. 597-599.

[192] Shaked, U., Xie, L., Soh, Y.C., *New approaches to robust minimum variance filter design*. IEEE Trans. Signal Process., vol. 49, 2001, pag. 2620-2629.

[193] Shankar, P., Yedavalli, R.K., *A neural network based adaptive observer for turbine engine parameter estimation*. Proceedings of GT2006, ASME Turbo Expo 2006: Power for Land, Sea and Air, May 8-11, Barcelona, 2006.

[194] Sharma, R., Aldeen, M., *Estimation of unknown disturbances in nonlinear systems*. Control 2004, University of Bath, UK, 2004.

[195] Singh, D., Pandey, J., Chauhan, D., *Radial basis neural network state estimation of electric power networks*. IEEE International Conference on Electric Utility Deregulation, Restructuring and Power Technologies, pag. 90-95.

[196] Sîngeorzan, D., *Regulatoare adaptive*. Editura Militară, Bucureşti, 1992.

[197] Snijders, J.G., *Wave Filtering and Thruster Allocation for Dynamic Positioned Ships*. Master's Thesis, 2005.

[198] Spurgeon, S.K., *Pole placement extensions for multivariable systemsa survey*. American Control Conference, vol. 27, 1990, pag. 1660-1665.

[199] Stefani, R.T., *Reducing the sensitivity to parameter variations of a minimum-order reduced-order observer*. Int. J. Cont., vol. 35, 1982, pag. 983-995.

[200] Takagi, T., Sugeno, M., *Fuzzy Identification of Systems and its Application to Modelling and Control*. IEEE Transaction Systems, Man and Cybernetics, vol. 15, nr. 1, 1985, pag. 116–132.

[201] Tan, C., Crusca, F., Aldeen, M., *Extended results on robust state estimation and fault detection*. Automatica, nr. 44, 2008, pag. 2027-2033.

[202] Tan, C., Edwards, C., *An LMI approach for designing mode observers for full detection and isolation*. European Control Conference (ECC 2001), Portugalia, 2001, pag. 481-486.

[203] Tan, C., Edwards, C., *An LMI approach for designing sliding mode observers*. International Journal of Control, vol. 74, nr. 16, 2001, pag. 1559-1568.

[204] Tan, C., Edwards, C., *Sliding mode observers for robust detection and reconstruction of actuator and sensor faults*. International Journal of Robust and Nonlinear Control, nr. 13, 2003, pag. 443-463.

[205] Tanaka, K., Ikeda, T., Wnag, O., *Fuzzy regulator and fuzzy observer: relaxed stability conditions and LMI based design*. IEEE Trans on Fuzzy Systems, vol. 6, nr. 2, 1998, pag. 250-256.

[206] Teel, A., Praly, L., *Global stabilization and observability imply semi-global stabilizability by output feedback.* Systems Control Letters, vol. 22, 1994, pag.

313-325.

[207] Thau, F.E., *Observing the State of Nonlinear Dynamic Systems.* International Journal of Control, vol. 17, 1973, pag. 471-479.

[208] Theocharis, J., Petridis, V., *Neural network observer for induction motor control*. IEEE Control Systems, 1994.

[209] Tlili, A.S., Braiek, N.B., *On the multimodel approaches for state observation of induction motors*. Transaction on Systems, Signals and Devices, vol. 1, nr. 2, 2006, pag. 141-155.

[210] Trinh, H., Ha, Q., *Design of linear functional observers for linear systems with unknown inputs*. International Journal of Systems Science, vol. 31, nr. 6, 2000, pag. 741-749.

[211] Utkin, V.I., *Sliding Modes in Control Optimization*. Springer-Verlag, 1992.

[212] Utkin, V.I., *Principles of identification using sliding regimes. Soviet Physic: Doklady, Sliding mode in control optimisation*. Berlin: Springer-Verlag, vol. 26, 1992, pag. 271-272.

[213] Vargas, J., Hemerly, E.M., *Nonlinear adaptive observer design for uncertain dynamical systems*. Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control, 2000, pag. 1307-1308.

[214] Vargas. J., Hemerly, E., *Robust neural adaptive observer for MIMO nonlinear systems*. Proceedings of the IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics, 1999.

[215] Vasile, I., *Automatica*.http://facultate.regielive.ro/cursuri/automatica/estimatoare.

[216] Walcott, B.L., Zak, S.H., *State observation of nonlinear uncertain dynamical systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 32, 1987, pag. 166-170.

[217] Walcott, B.L., Zak, S.H., *Observation of dynamical systems in the presence of bounded nonlinearities/uncertainties*. CDC'1988, pag. 961-966.

[218] Wang, H., Daley, S., *Actuator fault diagnosis: An adaptive observer-based technique*. IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 41, 1996, pag. 1073-1078.

[219] Wang, Z.D., James, L., Burnham, K.J., *Stability Analysis and Observer Design for Neutral Delay Systems.* IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 47,

nr. 3, 2002, pag. 478-482.

[220] Wang, Y., Zhang, Q.L., Liu, W.Q., *Stability Analysis and Design for T-S Fuzzy Descriptor Systems*. Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control, USA, 2001, pag. 3962-3967.

[221] Wilkinson, J.H., *The Algebraic eigenvalue Problem*. Oxford University Press, 1965.

[222] Xiao, X.H., Gao, W., *Nonlinear observer design by observer error linearization*. SIAM Journal on Control and Optimization, vol. 27, 1989, pag. 199-216.

[223] Xie, L., Soh, Y.C., *Robust Kalman filtering for uncertain systems*. Syst. Cont. Letts., vol. 22, 1994, pag. 123-129.

[224] Xu, A., Zhang, Q., *Residual generation for fault diagnosis in linear time-varying systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 49, nr. 5, 2004, pag. 767-772.

[225] Xu, J.X., Jia, Q.W., Lee, T.H., *On the design of a nonlinear adaptive variable structure derivative estimator*. IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 45, nr. 5, 2000, pag. 1028-1033.

[226] Xu, S., Lam, J., *Reduced-orde H_∞ filtering for singular systems*. Systems & Control Letters, vol. 56, 2007, pag. 48-57.

[227] Xu, S., Lam, J., Zou, Y., *H_∞ filtering for singular systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 48, nr. 12, 2003, pag. 2217-2222.

[228] Yang, F., Wilde, R.W., *Observers for linear systems with unknown inputs.* IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-33, 1988, pag. 677-681.

[229] Yao, Y.X., Zhang, Y.M., *Parameterization of observers for time delay systems and its application in observer design.* IEEE Processing Control Theory Applications, vol. 143, nr. 3, 1996, pag. 225- 232.

[230] Yoneyama, J., Ichikawa, I., *H-inf Control for Takagi-Sugeno Fuzzy Descriptor Systems*. Proceedings of the IEEE Int. Conf. Syst. Man Cybern., Tokyo, Japonia, 1999, pag. 28-33.

[231] Yuan, Y., Yu, P., Librescu, L., Marzocca, P., *Aeroelasticity of Time-Delayed Feedback Control of Two-Dimensional Supersonic Lifting Surfaces.* Journal of

Guidance, Control and Dynamics. vol. 27, nr. 5, 2004, pag. 795-804.

[232] Zeitz, M., *The extended Luenberger observer for nonlinear systems*. Systems and Control Letters, vol. 9, 1987, pag. 149-56.

[233] Zhang, K., Jiang, B., Cocquempot, V., *Adaptive Observer-based Fast Fault Estimation*. International Journal of Control, Automation, and Systems, vol. 6, nr. 3, 2008, pag. 320-326.

[234] Zhang, Q., *Adaptive observer for MIMO linear time varying systems.* Raport de cercetare, Proiect: Sigma2, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, 2001.

[235] Zhang, Q., Delyon, B., *A new approach to adaptive observer design for MIMO systems*. ACC'2001, Arlington.

[236] Zhu, F., Han, Z., *A note on observers for Lipschitz nonlinear systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 47, 2002, pag. 1751-1754.